

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК**  
**Институт проблем безопасного развития атомной энергетики**

## **ТРУДЫ ИБРАЗ**

Под общей редакцией члена-корреспондента РАН  
*Л. А. Большова*

**Выпуск 7**

### **ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Научный редактор  
член-корреспондент РАН *Л. А. Большой*

Москва Наука 2008

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук К. В. Чукбар,  
доктор физико-математических наук В. Н. Семенов

**Труды ИБРАЭ РАН** / под общ. ред. чл.-кор. РАН Л.А. Большова ; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. — М. : Наука, 2007— .

**Вып. 7** : Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах / науч. ред. Л.А. Большов. — 2008. — 128 с. : ил. — ISBN 978-5-02-036952-8 (в пер.).

В сборнике представлены результаты исследований, проводимых в лаборатории теоретической физики ИБРАЭ РАН, по проблеме аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах. Сборник состоит из 10 статей. Первые три посвящены исследованию переноса примеси в модели случайной адвекции с дальнедействующими корреляциями скоростей. Следующие пять статей содержат результаты исследования аномальных режимов переноса, обусловленных резко контрастной структурой сред. Последние две статьи посвящены изучению роли сильных пространственных флуктуаций характеристик среды. Полученные результаты дают основу для разработки методов получения оценок, касающихся надежности захоронений радиоактивных отходов в геологических скальных породах.

Для студентов, аспирантов и специалистов в области явлений переноса вещества.

**Proceedings of IBRAE RAS** / Ed. by L.A. Bolshov ; Nuclear Safety Institute (IBRAE) RAS. — Moscow : Nauka, 2007— .

**Issue 7** : Physical models for anomalous contaminant transport in highly heterogeneous media / Ed. by L.A. Bolshov. — 2008. — 128 p. : ill. — ISBN 978-5-02-036952-8 (bound).

The results of investigations of anomalous contaminant transport in highly heterogeneous media are represented. The work was performed at the laboratory of theoretical physics of Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences. The collection of works consists of 10 papers. In the first three papers the problem of random advection with long range velocity correlations is studied. Next five papers contain the results of anomalous transport regimes caused by sharply contrast structure of the media. The last two papers are devoted to a role of strong spatial fluctuations of medium characteristics. The results obtained give the basis for the development of methods for the assessment of waste storage reliability in rock geological media.

The assumed target for the issue are students and specialists in mass transport phenomena.

ISBN 978-5-02-036952-8

- © Продолжающееся издание «Труды ИБРАЭ РАН», 2007 (год основания), 2008
- © Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2008
- © Коллектив авторов, 2008
- © Редакционно-издательское оформление. Издательство «Наука», 2008

## Содержание

Предисловие .....	4
I. Супердиффузия в модели случайной адвекции <i>И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев</i> .....	6
II. Стохастическая адвекция во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции <i>П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев</i> .....	20
III. Супердиффузия в модели случайной адвекции при наличии дрейфа <i>И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, В. А. Лапин, Л. В. Матвеев</i> ....	31
IV. Аномальная диффузия в регулярно-неоднородных средах <i>А. М. Дыхне, И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, А. В. Попов</i> .....	51
V. Диффузия примеси по перколяционному кластеру <i>А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев</i> .....	71
VI. Режимы переноса и хвосты концентрации в регулярно-неоднородных сильно контрастных средах <i>П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев</i> .....	79
VII. Влияние диффузионного барьера на динамику распространения примеси в среде с трещиной <i>П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев</i> .....	92
VIII. Асимптотические профили концентрации примеси при диффузии в гребешковых структурах <i>О. А. Дворецкая, П. С. Кондратенко</i> .....	103
IX. Флуктуационные эффекты и перенормировка источника во фрактальных, сильно контрастных средах <i>Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, .....</i>	114
X. Флуктуационный подход к оценке безопасности захоронения радиоактивных отходов <i>Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко</i> .....	119

## Предисловие

Радиоактивные отходы представляют собой одну из ключевых проблем безопасного развития атомной энергетики. Общеизвестной концепцией ее решения для высокоактивных отходов считается захоронение в геологических средах. Для проведения оценок их надежности требуются знания закономерностей миграции примесей в сильно неоднородных средах, каковыми являются геологические структуры. Обширный массив данных наблюдений по процессам миграции, накопленный к настоящему времени, свидетельствует о том, что они далеко не всегда описываются известными ранее классическими зависимостями, и расхождение может составлять многие порядки. Все это привело к необходимости проведения на фундаментальном уровне исследований процессов переноса в сильно неоднородных средах. Такие работы были поставлены и ведутся в ИБРАЭ РАН. В настоящем сборнике представлены результаты теоретических исследований аномальных режимов переноса, выполненных в Институте применительно к проблеме захоронения радиоактивных отходов в геологических средах.

Физические модели, составившие предмет анализа, по нашему мнению, отражают наиболее важные особенности геологических сред, предопределяющие закономерности переноса примеси, и могут послужить основой для построения последовательной теории процессов переноса в указанных средах.

Одна из особенностей состоит в наличии системы трещин, по которым происходит просачивание влаги в скальных породах. Отсюда возникает адвекция примеси как основной механизм переноса. Наблюдения показывают, что системы трещин, будучи неупорядоченными, относятся к категории перколяционных сред. Структурные элементы таких сред (в рассматриваемом нами случае трещины) объединяются в кластеры, обладающие фрактальной геометрией. Поэтому пространственные корреляции скоростей адвекции внутри кластеров являются дальнедействующими (убывающими по степенным законам). Такое свойство при определенных условиях способно привести к возникновению режима супердиффузии. Результаты исследований случайной адвекции посвящены работы **I—III** настоящего сборника (см. Содержание).

Вторая особенность геологических структур возникает вследствие резкого контраста в распределении их характеристик. Относительно сильно проницаемая для примеси система трещин находится в слабо проницаемой матрице. По отношению к частицам примеси, локализованным в трещинах, матрица играет роль ловушки. Такую же роль играет одна из составных частей кластеров (“мертвые концы”) в перколяционной среде. Присутствие слабопроницаемой подсистемы приводит к замедлению процесса

переноса в сильно проницаемой среде. Поэтому в резко контрастной среде возникает тенденция к субдифузионному режиму переноса. Результаты исследований процессов переноса в моделях резко контрастных сред описаны в работах **IV—VIII**.

Еще одна особенность геологической среды состоит в наличии сильных пространственных флуктуаций ее характеристик. Отсюда следует, что эволюция концентрации в пространстве и во времени сильно зависит от места локализации источника примеси. В результате может происходить значительная перенормировка мощности источника примеси. Исследованиям роли пространственных флуктуаций на относительно близких расстояниях от источника посвящены работы **IX—X**.

Выражаем надежду на то, что настоящий сборник позволит читателю получить достаточно полное представление о результатах исследований процессов переноса в сильно неупорядоченных средах, проводимых в ИБРАЭ РАН.

Л.А. Большов,  
П.С. Кондратенко

# I. Супердиффузия в модели случайной адвекции

*И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

## **Введение**

Невозможность макроскопически описать процессы переноса в сильно неоднородных средах уравнением классической диффузии давно не вызывает сомнений [1, 2]. Среди моделей, призванных заменить его, — те, что основаны на уравнениях в дробных производных [3, 4]. Они хорошо описывают некорневой закон расширения облака частиц  $R \propto t^\gamma$  с  $\gamma \neq 1/2$  ( $R$  — размер облака,  $t$  — время), отличие которого от обычного (диффузионного) часто есть главная характеристика системы. Но другим допустимым следствием уравнений в дробных производных является необычная (по сравнению с классической), степенная форма хвостов концентрации частиц. Ее, кстати, предполагают и отличные от чисто дробно-диффузионных модели, такие как модель блужданий или полетов Леви, более общая модель случайных блужданий с непрерывным временем (CTRW) или базирующаяся на основном уравнении (master equation) [5].

Если временную зависимость  $R(t)$  экспериментально определить еще достаточно легко, то такое определение формы хвостов в средах, предназначенных, например, для изоляции радиоактивных отходов на геологические сроки (к тому же статистически надежное) потребовало бы как недостижимо долгого времени эксперимента, так и недостижимой прецизионности. Таким образом, вывод о степенных хвостах не поддается надежной верификации. Между тем, он катастрофически влияет на оценки надежности захоронений, потому что в удаленной от источника области степенной и, к примеру, гауссов хвосты различаются на много порядков.

Модели, названные выше, во многом являются феноменологическими и поэтому не могут претендовать на предсказание формы хвостов, на которое можно положиться без опытной проверки. С другой стороны, больше доверия вызвали бы модели, в основе которых — известная физика на микроуровне: например, модель адвекции частиц в случайном самоподобном поле скоростей. Оно может, в частности, описывать потоки жидкости в случайной фрактальной среде. Эта модель была исследована

в [6], где вывод об аномальной временной зависимости  $R(t)$  тоже присутствовал, однако предсказания формы хвостов сделано не было. Настоящая работа призвана восполнить этот пробел. Методом решения служит масштабный анализ, причем отсутствуют упрощающие предположения, сделанные в [6].

## 1. Постановка задачи

Основу модели составляет уравнение для концентрации примеси  $c(\vec{r}, t)$ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(\vec{v}c) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  — скорость адвекции. Величина  $\vec{v}(\vec{r})$  является случайной функцией координат, причем  $\langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle = 0$ , где  $\langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle$  — среднее значение по ансамблю реализаций.

Поле скоростей удовлетворяет уравнению несжимаемости:

$$\text{div } \vec{v}(\vec{r}) = 0. \quad (2)$$

Мы полагаем, что корреляции флуктуаций скорости являются дальнедействующими. Соответственно, корреляционные функции  $\vec{v}$  на больших расстояниях убывают по степенным законам. В частности, парная корреляционная функция

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \langle v_i(\vec{r}_1) v_j(\vec{r}_2) \rangle \quad (3)$$

обладает следующими свойствами:

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r}) \propto \begin{cases} V^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2h} & \text{при } r \gg a, \\ V^2 & \text{при } r \leq a. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $h > 0$ ;  $a$  — параметр длины, имеющий смысл нижней границы фрактального интервала;  $V$  — параметр, имеющий размерность скорости. Таким образом, при  $r \gg a$  величина  $K_{ij}^{(2)}(\vec{r})$  является однородной функцией своего аргумента порядка  $-2h$ . Аналогично  $n$ -точечный коррелятор скоростей, определенный формулой

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \langle v_{i_1}(\vec{r}_1) v_{i_2}(\vec{r}_2) \dots v_{i_n}(\vec{r}_n) \rangle, \quad (5)$$

в области  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \gg a$  (для всех пар переменных  $\vec{r}_i, \vec{r}_j$ ) удовлетворяет соотношению

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\lambda \vec{r}_1, \lambda \vec{r}_2, \dots, \lambda \vec{r}_n) = \lambda^{-nh} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (6)$$

По аналогии с теорией критических явлений [7] параметр  $h$  будем называть масштабной размерностью скорости  $\vec{v}$ . В соответствии с (6), для Фурье-образа  $n$ -точечного коррелятора

$$\begin{aligned} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\} = \\ \int d^3 r_1 d^3 r_2 \dots d^3 r_n \exp\left[-i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \dots + \vec{k}_n \vec{r}_n)\right] K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \quad (7) \\ = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_n) \tilde{K}_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\} \end{aligned}$$

справедливо масштабное соотношение

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\lambda \vec{k}_1, \lambda \vec{k}_2, \dots, \lambda \vec{k}_n\} = \lambda^{n(h-3)} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\}. \quad (8)$$

Из равенств (4) и (8) вытекает, что в области малых волновых векторов ( $ka \ll 1$ ,  $k = |\vec{k}|$ ) Фурье-образ парного коррелятора имеет вид

$$\tilde{K}_{ij}^{(2)}(\vec{k}) \sim V^2 a^{2h} k^{2h-3}. \quad (9)$$

## 2. Масштабный анализ

### 2.1. Макроскопическое уравнение переноса

Практический интерес представляет распределение концентрации, усредненное по ансамблю реализаций среды,  $\bar{c}(\vec{r}, t) = \langle c(\vec{r}, t) \rangle$ . Оно удовлетворяет стандартному макроскопическому уравнению:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\vec{q}(\vec{r}, t)$  — усредненная плотность потока, удовлетворяющая очевидному требованию обращаться в нуль при однородном распределении концентрации. С учетом линейности задачи и принципа причинности имеем:

$$q_i(\vec{r}, t) = - \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' f_{ij}(\vec{r}', t') \frac{\partial \bar{c}(\vec{r} - \vec{r}', t - t')}{\partial r_j}. \quad (11)$$

Тензорная функция отклика  $f_{ij}(\vec{r}, t)$  определяется свойствами среды и является положительно определенной:

$$f_{ij}(\vec{r}, t) s_i s_j > 0, \quad (12)$$

где  $s_i$  — произвольный вектор. Условие (12) следует из принципа возрастания энтропии.

Для определенности мы будем рассматривать задачу с начальным условием  $\bar{c}(\vec{r}, 0) = c^{(0)}(\vec{r})$  в отсутствие источника, так что средняя концентрация и ее начальное значение связаны соотношением:

$$\bar{c}(\vec{r}, t) = \int d^3 r' G(\vec{r} - \vec{r}', t) c^{(0)}(\vec{r}'). \quad (13)$$

Функция Грина  $G(\vec{r}, t)$  в представлении Фурье—Лапласа в соответствии с (10) и (11) дается выражением:

$$G_{\vec{k}p} = \left[ p - M(\vec{k}, p) \right]^{-1}, \quad (14)$$

где 
$$M(\vec{k}, p) = -k_i k_j \int_0^{\infty} dt e^{-pt} \int d^3 r e^{-i\vec{k}\vec{r}} f_{ij}(\vec{r}, t). \quad (15)$$

## 2.2. Масштабные размерности

В принятой модели (см. (4)) не существует пространственного масштаба, характеризующего поведение системы при  $r \gg a$ . Это обстоятельство позволяет использовать идеи теории критических явлений [7] и считать уравнения переноса на расстояниях  $r \gg a$  масштабно инвариантными. Иными словами, макроскопическое уравнение переноса должно быть инвариантным относительно преобразования

$$\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r},$$

при котором все величины, входящие в (10) и (11), преобразуются согласно

$$A \rightarrow \lambda^{-\Delta_A} A \quad (16)$$

с показателем  $\Delta_A$ , который называется масштабной размерностью величины  $A$ .

Из равенства (4) и свойства сохранения полного числа частиц вытекают значения масштабных размерностей скорости и концентрации:

$$\Delta_v = h, \quad \Delta_c = \Delta_G = 3. \quad (17)$$

Уравнения (10) и (11) позволяет связать масштабные размерности времени и плотности потока:

$$\Delta_t = 2 - \Delta_q. \quad (18)$$

Из тождества  $\vec{q} = \langle \vec{v}c \rangle$  с учетом равенств (17) и (18) приходим к соотношениям

$$\Delta_q = h + 3, \quad (19)$$

$$\Delta_t = -(1 + h). \quad (20)$$

Из равенств (11), (19) и (20) находим масштабный индекс функции  $f_{ij}(\vec{r}, t)$ :

$$\Delta_f = 2h + 3. \quad (21)$$

Отметим, что результаты этого раздела справедливы при условии, что свойства переноса определяются дальнедействующей ( $r \gg a$ ) частью корреляций скорости (см. ниже).

### **3. Поведение концентрации**

С учетом соотношений (20) и (21) функцию  $f_{ij}(\vec{r}, t)$  можно представить в виде

$$f_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{(Va^h)^2}{r^{2h+3}} \chi_{ij} \left( \vec{n}, \frac{r}{(Va^h t)^{1/(1+h)}} \right) \quad \text{при } r \gg a, \quad (22)$$

$$f_{ij}(\vec{r}, t) \sim \frac{V^2}{a^3} \quad \text{при } r \leq a. \quad (23)$$

Величина  $\chi_{ij}$ , входящая в (22), является безразмерной тензорной функцией, а  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ .

Обратимся теперь к свойствам функции Грина (и, соответственно, к поведению концентрации) в зависимости от значения индекса  $h$ . Отдельно рассмотрим случаи  $h > 1$ ,  $h < 1$  и  $h = 1$ .

### 3.1. $h > 1$

Как видно из выражений (22) и (23), при  $h > 1$  основной вклад в интеграл (15) дает область  $r \lesssim a$ ,  $t \lesssim a/V$ . При этом функция  $f_{ij}(\vec{r}, t)$  определяется оценкой (23). Поскольку нас интересует крупномасштабное распределение концентрации ( $r \gg a$ ,  $t \gg a/V$ ), в подынтегральном выражении (15) мы можем положить  $\exp(-ikr - pt) \cong 1$ . Таким образом, для  $h > 1$  получаем

$$M = Dk^2, \quad D \sim Va \quad \text{при } h > 1. \quad (24)$$

Переход отсюда с учетом (13), (14) в координатно-временное представление приводит к классическому уравнению диффузии

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} - D\Delta \bar{c} = 0.$$

Таким образом, при  $h > 1$  перенос примеси происходит в режиме классической диффузии. Отметим, что классический скейлинг  $\Delta_i = -2$  отличается от того, который вытекает из (20) при  $h > 1$ . Это неудивительно, поскольку, как мы только что убедились, перенос при  $h > 1$  определяется корреляционными свойствами скорости на малых расстояниях  $r \lesssim a$ , где масштабная инвариантность, необходимая для выполнения равенства (20), отсутствует.

### 3.2. $h < 1$

Из (22) и (23) следует, что основной вклад в интеграл (15) при  $h < 1$  получается за счет больших расстояний ( $r \gg a$ ). Поэтому для функции  $f_{ij}(\vec{r}, t)$  под интегралом в (15) можно воспользоваться выражением (22). Функция  $M(\vec{k}, p)$  тогда приобретает вид

$$M(\vec{k}, p) = -k_i k_j (Va^h)^2 \times \\ \times \int_0^\infty dt e^{-pt} \int d^3 r \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r^{3+2h}} \chi_{ij} \left( \vec{n}, \frac{r}{(Va^h t)^{1/(1+h)}} \right), \quad h < 1 \quad (25)$$

Вместо  $\vec{r}$  и  $t$  перейдем здесь к новым переменным интегрирования

$$y = kr, \quad \xi = \frac{r}{(a^h V t)^{1/(1+h)}}.$$

В результате выражение (25) преобразуется к виду

$$M(\vec{k}, p) = -(1+h) V a^h k^{1+h} m_i m_j \times \\ \times \int d\Omega_{\vec{n}} \int_0^\infty \frac{dy}{y^h} e^{-iy(\vec{m}\vec{n})} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^{2+h}} \chi_{ij}(\vec{n}, \xi) \exp \left\{ - \left( \frac{y}{\xi \sqrt{\eta}} \right)^{1+h} \right\}. \quad (26)$$

Здесь  $d\Omega_{\vec{n}}$  — элемент телесного угла в направлении вектора  $\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$ ,

$\vec{m} = \frac{\vec{k}}{k}$ . Переменная  $\eta$  определена равенством

$$\eta = k^2 \left( \frac{p}{V a^h} \right)^{\frac{2}{1+h}}. \quad (27)$$

Отметим, что для сходимости интеграла в (26) при  $\xi \rightarrow 0$  и любых значениях  $\eta$  необходимо, чтобы при  $\xi \rightarrow 0$  имело место  $\chi_{ij} \propto o(\xi^{1+h})$ , т. е.

$f_{ij} \propto o\left(\frac{1}{t}\right)$  при  $t \rightarrow \infty$  и фиксированном  $r$ . Это мягкое условие на быстроту забывания прошлого (в некотором смысле слабую марковость) мы будем считать выполненным. Заметим также, что сходимость интеграла по переменной  $y$  в (26) при  $h < 1$  является очевидной.

Из (26) с учетом определения (27) имеем

$$M(\vec{k}, p) = -p\phi(\eta), \quad (28)$$

где

$$\phi(\eta) = -(1+h)\eta^{\frac{1+h}{2}} m_i m_j \times \\ \times \int d\Omega_{\vec{n}} \int_0^\infty \frac{dy}{y^h} e^{-iy(\vec{m}\vec{n})} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^{2+h}} \chi_{ij}(\vec{n}, \xi) \exp \left\{ - \left( \frac{y}{\xi \sqrt{\eta}} \right)^{1+h} \right\}, \quad (29)$$

Полезно также, произведя замену переменной  $y \rightarrow y\xi\sqrt{\eta}$ , переписать соотношение (29) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \phi(\eta) = & -(1+h) \eta m_i m_j \times \\ & \times \int d\mathbf{o}_{\bar{n}} \int_0^\infty \frac{dy}{y^h} \exp\left[-iy(\bar{m}\bar{n})\xi\sqrt{\eta}\right] \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \chi_{ij}(\bar{n}, \xi) \exp\{-y^{1+h}\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим свойства функции  $\phi(\eta)$ . Из выражения (30) следует, что в пределе  $\eta \ll 1$  она является аналитической, имея регулярное разложение по целым степеням, начиная с члена  $\sim \eta$ :

$$\phi(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta^n \quad \text{при } \eta \ll 1. \quad (31)$$

С другой стороны, из равенства (29) видно, что при больших значениях своего аргумента функция  $\phi(\eta)$  имеет вид

$$\phi(\eta) \sim \eta^{\frac{1+h}{2}} \quad \text{при } \eta \gg 1. \quad (32)$$

Такая дробно-степенная асимптотика свидетельствует о том, что при конечном значении переменной  $\eta$  функция  $\phi(\eta)$  имеет точку ветвления. Поскольку при действительных положительных  $\eta$  она сама является вещественной, точка ветвления должна соответствовать действительному отрицательному значению  $\eta = \eta_b < 0$ . Принимая во внимание регулярный множитель  $\eta$  в равенстве (30) справа, с учетом асимптотики (32) приходим к выводу, что при  $\eta \rightarrow \eta_b$  функция  $\phi(\eta)$  имеет структуру

$$\phi(\eta) \sim \eta(\eta - \eta_b)^{\frac{1-h}{2}} \quad \text{при } |\eta - \eta_b| \ll 1. \quad (33)$$

Отсюда следует, что в точке ветвления  $\phi(\eta)$  обращается в бесконечность.

Нас в дальнейшем будут интересовать свойства распределения концентрации на временах, когда размер основной области локализации примеси много больше первоначального размера,  $R(t) \gg R_0$  ( $R_0 \equiv R(0)$ ). Тогда, согласно (13), находим

$$\bar{c}(\vec{r}, t) \cong NG(\vec{r}, t), \quad R(t) \gg R_0. \quad (34)$$

Отсюда после подстановки (28) в (14) и выполнения обратного преобразования Фурье—Лапласа приходим к равенству

$$\bar{c}(\vec{r}, t) = N \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{pt+i\vec{k}\vec{r}}}{p(1+\phi(\eta))}, \quad \text{Re } b > 0, \quad (35)$$

где переменная  $\eta$  определена (27).

Переходя в (35) от интегрирования по  $p$  и  $\vec{k}$  к безразмерным переменным согласно

$$p \rightarrow \bar{p} = pt, \quad (36)$$

$$k \rightarrow \bar{k} = kR(t)\bar{p}^{-\frac{1}{1+h}},$$

$$R(t) = (Va^h t)^{1/(1+h)}, \quad (37)$$

получаем

$$\bar{c}(\vec{r}, t) = \frac{N}{R^3(t)} \Phi(\xi), \quad (38)$$

где функция  $\Phi(\xi)$  задана равенством

$$\Phi(\xi) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi i} \bar{p}^{\frac{2-h}{1+h}} \int d\omega_{\vec{m}} \int_0^\infty \frac{\bar{k}^2 d\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp\left\{\bar{p} + i\bar{k}\xi \bar{p}^{\frac{1}{1+h}}(\vec{m}\vec{n})\right\}}{1 + \phi(\bar{k}^2)}, \quad \text{Re } \bar{b} > 0, \quad (39)$$

в котором

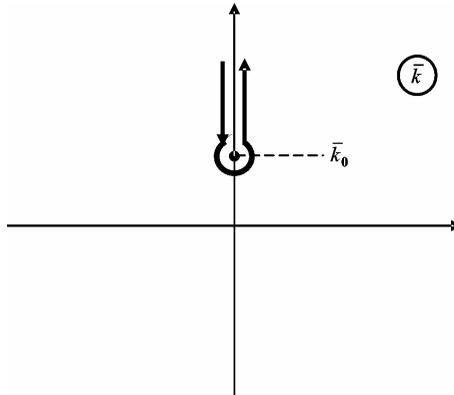
$$\xi = \frac{r}{R(t)}, \quad (40)$$

$d\omega_{\vec{m}}$  — элемент телесного угла в направлении единичного вектора  $\vec{m}$ . Величина  $R(t)$ , данная (37), определяет по порядку величины размер области локализации в момент  $t$  (при  $R(t) \gg R_0$ ). Показатель в зависимости  $R(t) \propto t^\gamma$  равен  $\gamma = 1/(1+h)$ . Следовательно, при  $h < 1$  имеет место  $\gamma > 1/2$ , и в этом случае перенос примеси происходит в режиме супердиффузии.

Проанализируем теперь асимптотическое поведение концентрации на больших расстояниях, т. е. при  $\xi = r / R(t) \gg 1$ . Выполнив в (39) интегрирование по угловым переменным с учетом свойства четности множителя при экспоненте в подынтегральном выражении, приходим к равенству

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_{\bar{b}-i\infty}^{\bar{b}+i\infty} \frac{d\bar{p}'}{2\pi i} \bar{p}'^{\frac{1-h}{1+h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{k}d\bar{k}}{(2\pi)^2 i} \frac{\exp\left\{\bar{p} + i\bar{k}\xi\bar{p}^{\frac{1}{1+h}}\right\}}{1 + \phi(\bar{k}^2)}, \quad \text{Re } \bar{b} > 0. \quad (41)$$

Функция  $\phi(\eta)$  вещественна при действительных значениях  $\eta$ . При этом ее знак совпадает со знаком аргумента. Учитывая, что в точке ветвления  $\eta = \eta_b$  ( $\eta_b < 0$ ) она обращается в бесконечность (см. (33)), приходим к выводу, что знаменатель,  $1 + \phi(\bar{k}^2)$ , имеет нуль при  $\bar{k}_0 = \pm i\sqrt{|\eta_0|}$ , где  $\eta_0 < 0$  и  $|\eta_0| < |\eta_b|$ . Таким образом, лежащая на мнимой оси точка  $\bar{k}_0$  является полюсом подынтегрального выражения в (41), причем его ближайшей к действительной оси особенностью, таким образом определяя асимптотику  $\Phi(\xi)$  при  $\xi \gg 1$ . Сдвигая контур интегрирования по переменной  $\bar{k}$  в верхнюю полуплоскость, как показано на рисунке 1 находим



Контур интегрирования по  $\bar{k}$  в (41),  
сдвинутый в верхнюю полуплоскость

$$\Phi(\xi) \cong \frac{1}{4\pi\phi'_0\xi} \int_{\bar{b}-i\infty}^{\bar{b}+i\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi i} \bar{p}^{\frac{1-h}{1+h}} \exp\{-\Gamma(\bar{p})\}, \quad \text{Re } \bar{b} > 0. \quad (42)$$

Здесь обозначено:

$$\Gamma(\bar{p}) = (1+h)\varepsilon\bar{p}^{\frac{1}{1+h}} - \bar{p}, \quad \varepsilon = \xi \frac{\sqrt{|\eta_0|}}{1+h}, \quad \phi'_0 = \left. \frac{d\Phi}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_0}. \quad (43)$$

Вычисляя оставшийся в (42) интеграл по переменной  $\bar{p}'$  методом перевала, приходим к выражению

$$\Phi(\xi) \cong \frac{1}{(4\pi)^{3/2} \phi'_0 \xi} \sqrt{\frac{2}{|\Gamma''_0|}} \bar{p}_0^{(1-h)/(1+h)} \exp\{-\Gamma\}. \quad (44)$$

Здесь  $\bar{p}_0$  — точка перевала, определяемая уравнением

$$\left. \frac{d\Gamma(\bar{p})}{d\bar{p}} \right|_{\bar{p}=\bar{p}_0} = 0. \quad (45)$$

Другие обозначения, использованные в (44):

$$\Gamma = \Gamma(\bar{p}_0), \quad \Gamma'' = \left. \frac{d^2\Gamma(\bar{p})}{d\bar{p}^2} \right|_{\bar{p}=\bar{p}_0}. \quad (46)$$

Решение уравнения (45) с учетом (43) дает:

$$\bar{p}_0 = \varepsilon^{\frac{1+h}{h}}. \quad (47)$$

Раскрывая с помощью (47) равенства (46), подставляя затем их в выражение (44), а после этого последнее — в (38), находим асимптотику концентрации при  $\bar{\xi} \gg 1$ .

$$\bar{c}(\bar{r}, t) = \frac{A}{\{4\pi R^2(t)\}^{3/2}} \varepsilon^{3(1-2h)/2h} \exp\left(-h\varepsilon^{\frac{1+h}{h}}\right), \quad (48)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{2|\eta_0|}{h(1+h)}} \frac{1}{\phi'_0}. \quad (49)$$

Отметим, что поскольку

$$\frac{1+h}{h} > 2 \quad \text{при} \quad h < 1,$$

хвост концентрации в модели случайной адвекции, согласно (48), имеет вид экспоненты, более сжатой, чем гауссиана. Другими словами, концентрация в режиме супердиффузии убывает даже быстрее, чем при классической диффузии. Этот вывод резко отличается от выводов дробно-диффузионной (с дробностью по пространству) модели, где хвосты ведут себя степенным образом.

### 3.3. $h=1$

Попытка рассмотреть этот случай как предел  $h \rightarrow 1$  с использованием функции отклика (22) приводит к логарифмической расходимости в (11). Отсюда заключаем, что классическая автомодельная переменная  $\xi \sim r / \sqrt{Dt}$  с  $D \sim Va$ , справедливая при  $h > 1$ , должна быть модифицирована слабой координатной зависимостью логарифмического типа:

$$\xi = r / \sqrt{D(r)t}. \quad (50)$$

Это означает, что при  $r \lesssim R(t)$  и  $R(t) \gg R(0)$  соотношение между плотностью потока частиц  $\bar{q}(\vec{r}, t)$  и концентрацией должно иметь форму

$$\bar{q}(\vec{r}, t) = -D(r) \nabla \bar{c}(\vec{r}, t) \quad (51)$$

с координатой  $\vec{r}$ , отсчитанной от центра начального распределения концентрации. Подставляя (50) в равенство (22) и затем последнее — в (11), находим из (51):

$$\frac{dD(r)}{dr} \sim \frac{(Va)^2}{rD(r)}. \quad (52)$$

Отсюда следует

$$D(r) = \tilde{D} \ln^{1/2} \left( \frac{r}{a} \right), \quad \tilde{D} \sim Va. \quad (53)$$

Подставляя в (50), получаем оценку для размера области локализации примеси на больших временах:

$$R(t) \sim \sqrt{\tilde{D}t} \ln^{1/4} \left( \frac{\sqrt{\tilde{D}t}}{a} \right) \quad \text{при } h = 1. \quad (54)$$

Подставляя (50) и (53) в (25), находим выражение для поляризационного оператора при вещественных и положительных значениях переменных  $p$  и  $k$ :

$$M(\vec{k}, p) \cong -\tilde{D}k^2 \ln^{1/2} \mu, \quad \tilde{D} \sim Va, \quad \mu = \min \left\{ (ka)^{-1}, \sqrt{\frac{\tilde{D}}{a^2 p}} \right\}. \quad (55)$$

Подстановка этого выражения в (14) с последующим выполнением обратного преобразования Фурье—Лапласа приводит к выражению для концентрации на достаточно больших ( $R(t) \gg R(0)$ ) временах при  $h = 1$

$$\bar{c}(\vec{r}, t) \cong \frac{N}{\left\{ 4\pi\tilde{D}t \ln^{1/2} \left( \frac{\tilde{D}t}{a} \right) \right\}} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4\tilde{D}t \ln^{1/2} \left( \frac{\tilde{D}t}{a} \right)} \right\}, \quad (56)$$

которое справедливо в логарифмическом приближении.

Таким образом, при масштабной размерности скорости  $h = 1$  перенос примеси происходит в логарифмически модифицированном классическом режиме.

## Заключение

В работе на основе масштабного анализа исследован перенос пассивной примеси в случайных самоподобных гидродинамических потоках, которые не меняются во времени. В зависимости от показателя  $h$  степенного убывания корреляторов скорости имеют место качественно различные режимы переноса. Когда корреляторы круто убывают (при  $h > 1$ ), проис-

ходит классическая диффузия. Когда, наоборот,  $h < 1$ , движение частиц вдоль траекторий скоррелировано достаточно, чтобы расширение облака было супердиффузионным. При  $h = 1$  классические закономерности модифицируются логарифмическими множителями.

Главный результат работы состоит в том, что в рамках модели установлено поведение асимптотик концентрации. Показано, что в супердиффузионном режиме хвосты имеют вид экспоненты, которая сжата даже больше, чем гауссиана классической диффузии. Этот вывод резко отличается от предлагаемого моделями дробной диффузии (дробность по пространству), где хвосты не просто тяжелее классических, но являются степенными.

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RGO-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. *Bouchaud, J.-P., A. Georges* // Phys. Rep. — 1990. — 195. — 127.
2. *Isichenko, M.B.* // Rev. Mod. Phys. — 1992. — 64. — 961.
3. *Compte, A.* // Phys. Rev. E. — 1996. — 53. — 4191.
4. *Meerschaert, M.M., D.A. Benson, H.-P. Scheffler, B. Baeumer* // Phys. Rev. E. — 2002. — 65. — 041103.
5. *Учайкин, В.В.* // УФН. — 2003. — 173. — 847.
6. *Koch, D.L., J.F. Brady* // Phys. Fluids. A. — 1989. — 1. — 47.
7. *Паташинский, А.З., В.Л. Покровский.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1975.

## II. Стохастическая адвекция во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции

*П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

### **Введение**

Вот уже несколько десятилетий адвекция примеси в случайных средах, обладающих фрактальными свойствами, является предметом активных исследований (см. [1–4] и указанную там литературу). Речь, в частности, идет о ситуации, когда адвекционное поле скоростей формируется в результате просачивания влаги в скальных породах по системе трещин, имеющей фрактальную структуру [5, 6]. Важными особенностями фрактальных сред являются, во-первых, большая амплитуда флуктуаций физических параметров, определяющих процессы переноса, и, во-вторых, медленно убывающие (степенным образом) корреляции этих флуктуаций. При адвекционном переносе таким параметром является скорость жидкости. В работах [8, 9] был исследован перенос примеси в стационарном самоподобном поле скоростей, характеризуемом степенным убыванием парного коррелятора скорости во всем пространстве, и показано, что при достаточно медленном убывании коррелятора перенос происходит в режиме супердиффузии. Подчеркнем, что при исследовании процессов переноса, наряду с определением режимов дисперсии, определяющих скорость распространения основной массы примеси, интерес представляет также подробное описание поведения примеси на больших расстояниях — в хвостах профиля концентрации. Это касается в первую очередь задач распространения радионуклидов в окружающей среде. В работе [9] было показано, что если пространственный диапазон степенного убывания коррелятора скорости (область фрактальности) простирается до бесконечности, то хвост имеет вид «сжатой» экспоненты, определяемой той же автономной переменной, что и поведение в основном облаке.

Обычно в реальных физических системах пространственный диапазон фрактальности конечен. Это может быть связано либо с ограниченными размерами системы, либо с конечным радиусом корреляции. Так, например, в случае перколяционных сред последний уменьшается по мере

удаления состояния среды от порога протекания. В задаче протекания жидкости по системе трещин это приводит к появлению средней скорости течения [2]. Целью настоящей работы является исследование вопроса о том, как наличие конечного радиуса корреляции и, следовательно, средней скорости меняет режим переноса во фрактальной среде, и к какому поведению в хвостах профиля концентрации это приводит.

## 1. Постановка задачи

Перенос примеси в заданном стационарном поле скоростей  $\vec{v}(\vec{r})$  описывается уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(\vec{v}c) = 0. \quad (1)$$

Поле скоростей в (1) удовлетворяет условию несжимаемости  $\text{div } \vec{v}(\vec{r}) = 0$ . Мы будем рассматривать задачу распространения примеси во всем пространстве, при заданном начальном условии  $c(\vec{r}, t = 0) = c_0(\vec{r})$ .

Как уже указывалось во введении, конечность корреляционного радиуса  $\xi$  приводит к тому, что сильно флуктуирующую скорость можно представить в виде

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{u} + \vec{V}(\vec{r}), \quad (2)$$

где

$$\langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle = \vec{u}, \quad \langle \vec{V}(\vec{r}) \rangle = 0, \quad (3)$$

а под  $\langle \dots \rangle$  подразумевается усреднение по ансамблю реализаций.

На масштабах меньших  $\xi$  среда имеет фрактальные свойства, в соответствии с чем парный коррелятор флуктуирующей компоненты скорости имеет вид

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle V_i(\vec{r}_1) V_j(\vec{r}_2) \rangle \propto V^2 \left( \frac{a}{r} \right)^{2h}, \quad a \ll r < \xi, \quad (4)$$

где  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ;  $a$  — нижняя граница интервала фрактальности;  $V^2$  определяет характерную величину  $K_{ij}^{(2)}$  при  $r \leq a$ . Вне интервала фрактальности на расстояниях  $r \gg \xi$  корреляции убывают экспоненциально быстро.

С учетом этих свойств Фурье образ парной корреляционной функции принимает вид

$$K_{ij}^{(2)}\{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \xi\} = (2\pi)^3 \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) K_{ij}^{(2)}\{\bar{k}_1, \xi\}, \quad (5)$$

$$K_{ij}^{(2)}\{\bar{k}, \xi\} \propto V^2 a^{2h} \begin{cases} k^{2h-3}, & k \gg \xi^{-1}; \\ \xi^{3-2h}, & k \ll \xi^{-1}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $k = |\bar{k}|$ .

Отсюда видно, что  $K_{ij}^{(2)}\{\bar{k}, \xi\}$  является однородной функцией переменных  $\bar{k}$  и  $\xi^{-1}$ :

$$K_{ij}^{(2)}\{\lambda\bar{k}, \xi/\lambda\} = \lambda^{2h-3} K_{ij}^{(2)}\{\bar{k}, \xi\}. \quad (7)$$

По аналогии с теорией критических явлений [18] мы будем называть параметр  $h$  масштабной размерностью флуктуирующей скорости  $\vec{V}(\vec{r})$ . Аналогичные соотношения справедливы для многоточечных корреляторов скорости.

Согласно [8, 9] режим аномальной диффузии в модели случайной адвекции (при условии  $\xi \rightarrow \infty$ ) возникает только когда показатель степени в выражении для коррелятора (4) меньше двойки, то есть  $h < 1$ . Ниже мы рассматриваем именно этот нетривиальный случай.

### 3. Функция Грина и масштабный анализ

Концентрацию примеси в произвольный момент времени можно выразить через ее начальное распределение с помощью функции Грина  $G(\vec{r}, \vec{r}', t)$ :

$$c(\vec{r}, t) = \int d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}'; t) c_0(\vec{r}'), \quad (8)$$

где  $G(\vec{r}, \vec{r}'; t)$  есть функция Грина, являющаяся решением уравнения

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_i(\vec{r}) \right\} G(\vec{r}, \vec{r}'; t) = 0. \quad (9)$$

С начальными условиями

$$G(\vec{r}, \vec{r}', 0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (10)$$

Практический интерес представляет концентрация, усредненная по ансамблю реализаций среды  $\bar{c}(\vec{r}, t) \equiv \langle c(\vec{r}, t) \rangle$ . Она удовлетворяет соотношению (8) с заменой  $G$  на  $\bar{G}$ , где  $\bar{G}(\vec{r} - \vec{r}', t) \equiv \langle G(\vec{r}, \vec{r}'; t) \rangle$  есть усредненная функция Грина (ниже называемая просто функцией Грина). Вычисление  $\bar{G}$  проводилось методом крестовой диаграммной техники, развитой в [13] и ранее применявшейся к описанию переноса в неупорядоченных средах в [14–16].

Изначально эта техника предназначалась ([13] см. также [17]) для расчета электронной функции Грина в металлах с примесями. В нашем случае, с учетом условия несжимаемости, оператор  $v_i(\vec{r})\partial/\partial x_i$ , следующий из (9), можно отождествить с оператором возмущения, описывающим взаимодействие электронов с примесями в проблеме [13, 17]. Мы выписываем ряд теории возмущений для функции Грина и усредняем его по ансамблю реализаций поля скоростей, аналогично тому, как проводилось усреднение по расположению атомов примеси в [13, 17].

В результате для усредненной функции Грина получаем уравнение Дайсона, которое в представлении Фурье—Лапласа имеет вид:

$$\bar{G}\{\vec{k}, p\} = \frac{1}{p + i\vec{k}\vec{u} - M\{\vec{k}, p\}}, \quad (11)$$

где  $p$  есть переменная Лапласа, а  $M\{\vec{k}, p\}$  есть «массовый» оператор, определяемый суммой неприводимых скелетных диаграмм [17]:

$$M\{\vec{k}, p\} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \quad (12)$$

Здесь, как обычно, горизонтальные линии соответствуют функции Грина  $\bar{G}$ , кресты — оператору возмущения вида

$$\hat{T} = -V_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (13)$$

Штриховые линии объединяют кресты, относящиеся к одному из куммулянтов, разложение по которым составляет суть процедуры усреднения по ансамблю реализаций. Каждой исходящей из креста штриховой линии отвечает свой волновой вектор, по которому происходит интегрирование. В каждом кресте, где сходятся три линии, выполняется закон сохранения волнового вектора. После подстановки (11) в диаграммное разложение (12) последнее превращается в интегральное уравнение для функции  $M\{\bar{k}, p\}$ .

В теории примесных металлов [13, 17] были использованы существенные упрощения, связанные с малой концентрацией примеси и близостью импульсов электронов к поверхности Ферми. Это позволило при расчете  $M\{\bar{k}, p\}$  ограничиться первой скелетной диаграммой в разложении (12). В нашем случае такое упрощение невозможно, поскольку все диаграммы в (12) одного порядка. Однако корреляционные функции, по которым производится разложение, обладают свойством масштабной инвариантности (7). Поэтому естественно предположить (а затем и доказать), что и сам массовый оператор обладает этим свойством. Согласно этому предположению, масштабные соотношения для  $M\{\bar{k}, p\}$  должны иметь вид

$$M\{\lambda^{-1}\bar{k}, \lambda^{-\Delta} p, \lambda\xi\} = \lambda^{-\Delta} M\{\bar{k}, p, \xi\}. \quad (14)$$

Здесь также учтено, что масштабные размерности  $\Delta$  Лапласовой переменной и массового оператора равны, что следует из того, что эти величины входят в выражение (11) аддитивно.

Рассмотрим произвольное слагаемое разложения (12), содержащее, например,  $n$ -точечную корреляционную функцию. Масштабный индекс этого слагаемого есть сумма индексов элементов этой диаграммы. Эти элементы включают  $n$ -точечный коррелятор (масштабный индекс  $n(h-3)$ ),  $n$  градиентов ( $n$ ),  $n-1$  функцию Грина ( $(n-1)\Delta_G$ ), и  $3n$ -мерный дифференциал волнового вектора ( $3n$ ). (Поскольку волновой вектор  $\bar{q}$ , используемый как переменная интегрирования, входит в выражения аддитивно с  $\bar{k}$ , его масштабный индекс совпадает с индексом  $\bar{k}$ ). Сумма перечисленных индексов должна равняться масштабной размерности  $M$ , откуда получаем

$$\Delta = n + (n-1)\Delta_G + n(h-3) + 3n. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что, согласно определению, масштабные размерности Фурье—Лаплас-образа функции Грина  $\Delta_G$  и переменной Лапласа  $\Delta$  связаны равенством

$$\Delta_G = -\Delta, \quad (16)$$

мы приходим к соотношению

$$\Delta = 1 + h, \quad (17)$$

не зависящему от порядка диаграммы. Поскольку соотношение (14) с  $\Delta = 1 + h$  справедливо для каждого слагаемого разложения (12), оно справедливо и для всего ряда в целом.

Исходя из установленных соотношений, мы можем представить массовый оператор в общем виде

$$M\{\vec{k}, p\} = -pF(\eta, k\xi), \quad \eta = k^2 \left( \frac{Va^h}{p} \right)^{2/(1+h)}, \quad (18)$$

где  $F$  есть безразмерная функция двух безразмерных переменных, а множитель  $Va^h$  получен с учетом соотношения (4).

Еще один вывод касается средней скорости  $\vec{u}$ . Поскольку скорость адвекции  $\vec{V}(r)$  и  $\vec{u}$  имеют одну и ту же физическую размерность, они должны иметь и одинаковую масштабную размерность. Откуда следует

$$\Delta_u = \Delta_v = h. \quad (19)$$

Исходя из того, что средняя скорость может зависеть только от корреляционного радиуса, получаем

$$u \sim V \left( \frac{a}{\xi} \right)^h. \quad (20)$$

Отметим, что в пределе  $\xi \rightarrow \infty$  имеем  $u = 0$ .

## 4. Асимптотики массового оператора

Исследование массового оператора начнем с анализа первой диаграммы уравнения (12)

$$M\{\vec{k}, p\} \approx -k_i k_j \int \frac{K_{ij}^{(2)}\{\vec{q}, \xi\} d^3 q}{p + i\vec{k}\vec{u} - i\vec{q}\vec{u} - M\{\vec{k} - \vec{q}, p\}}. \quad (21)$$

Рассмотрим два предельных случая.

В первом случае справедливо соотношение

$$\max \left\{ k, \left( \frac{p}{Va^h} \right)^{\frac{1}{1+h}} \right\} \gg \xi^{-1}. \quad (22)$$

В пределе  $\xi \rightarrow \infty$  массовый оператор определяется выражениями, полученными в [9]. Из результатов [9] следует, что интеграл (21) (в пределе  $\xi \rightarrow \infty$ ) определяется следующими значениями переменной интегрирования:

$$q \geq k \text{ когда } p \leq Va^h k^{1+h} \text{ и } q \geq (p/Va^h)^{\frac{1}{1+h}} \text{ когда } p \geq Va^h k^{1+h}. \quad (23)$$

Следовательно, при конечных значениях  $\xi$ , удовлетворяющих неравенству (22), для функции  $K_{ij}^{(2)}\{\bar{q}, \xi\}$  в подынтегральном выражении (21) справедливо выражение из первой строчки соотношения (6), а членами  $i\bar{q}\bar{u}$  и  $i\bar{k}\bar{u}$  в знаменателе (21) можно пренебречь:

$$M\{\bar{k} - \bar{q}, p\} \sim Va^h q^{1+h} \gg qu, ku.$$

Это остается справедливым для всех диаграмм высших порядков разложения (12). В результате выражение для массового оператора  $M\{\bar{k}, p\}$  в пределе (22) принимает вид

$$M\{\bar{k}, p\} = -pF(\eta, k\xi) \approx -pF(\eta, \infty) = -p\varphi(\eta), \quad (24)$$

где свойства функции  $\varphi(\eta)$  описаны в [9].

В противоположном пределе

$$\max \left\{ k, \left( \frac{p}{Va^h} \right)^{\frac{1}{1+h}} \right\} \ll \xi^{-1} \quad (25)$$

основной вклад в интеграл (21) дают значения  $q$  порядка  $\xi^{-1}$ . Поэтому в знаменателе выражения (21) мы можем пренебречь как  $p$ , так и  $i\bar{k}\bar{u}$ , и положить  $M\{\bar{k} - \bar{q}, p\} \equiv M\{-\bar{q}, 0\} \sim Va^h q^{1+h}$ .

В результате интеграл не зависит от  $p$  и  $\bar{k}$  оказывается порядка  $u\xi$ .

Это же справедливо и для интегралов в высших диаграммах разложения (12). В итоге массовый оператор принимает вид

$$M\{\vec{k}, p\} \approx -Dk^2, \quad (26)$$

где в соответствии с (20) эффективный диффузионный коэффициент есть

$$D \sim u\xi. \quad (27)$$

## 5. Поведение концентрации частиц

На достаточно больших временах, когда размер облака частиц существенно превосходит свой начальный размер, функция Грина непосредственно описывает поведение концентрации. Функция  $\bar{G}(\vec{r}, t)$  определяется обратным Фурье—Лаплас-преобразованием функции (11):

$$\bar{G}(\vec{r}, t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\vec{k}\vec{r} + pt)}{p + i\vec{k}\vec{u} - M(\vec{k}, p)}, \quad \text{Re } b > 0. \quad (28)$$

Анализ показывает, что поведение системы принципиально различно в двух временных интервалах, граница между которыми определяется выражением

$$t_* = \frac{\xi}{u} \approx \frac{\xi^{1+h}}{Va^h}. \quad (29)$$

В интервале  $t \ll t_*$  для основного облака частиц переменная Лапласа в подынтегральном выражении (28) удовлетворяет условию  $p \sim t^{-1} \gg t_*^{-1} \approx Va^h \xi^{-(1+h)}$ . Следовательно, выполняется неравенство (22), и для массового оператора справедливо выражение (24). В этом случае характерные значения  $k$  в (28) порядка  $k \sim (p/Va^h)^{1/(1+h)}$ . Отсюда следует неравенство  $ku \ll p, M$  и, следовательно, мы можем пренебречь членом  $i\vec{k}\vec{u}$  в знаменателе (28). Это тем более верно в области хвостов, поскольку здесь  $p \gg t^{-1}$ . Поэтому в интервале  $t \ll t_*$  дисперсия примеси происходит в режиме супердиффузия, изученном в [9]. При этом режиме размер облака частиц растет как

$$R(t) \sim (Va^h t)^{\frac{1}{1+h}} \quad (30)$$

(формула (23) работы [9]) а функция Грина на больших расстояниях ведет себя согласно

$$\bar{G}(\vec{r}, t) \cong \frac{B}{(4\pi)^{3/2} R(t)^3} \left( \frac{r}{R(t)} \right)^{\frac{3(1-h)}{1+h}} \exp \left\{ -C \left( \frac{r}{R(t)} \right)^{\frac{1+h}{h}} \right\}, \quad (31)$$

где константы  $B, C \sim 1$  вычислены в [9].

На больших временах  $t \gg t_*$  для основного облака частиц имеем оценку  $p \sim t^{-1} \ll t_*^{-1}$ , откуда следует, что в этом случае справедливо неравенство (25). Поэтому выражение для массового оператора принимает вид (26), и интеграл в (28), приводит к классическому диффузионному выражению

$$\bar{G}(\vec{r}, t) \approx (4\pi Dt)^{-\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{(\vec{r} - \vec{u}t)^2}{4Dt} \right). \quad (32)$$

Данные результаты находятся в соответствии предположением работы [3], где дисперсия частиц во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции исследовалась численно.

Рассмотрим теперь область далеких хвостов. Как следует из вычислений, характерные величины волнового вектора, определяющие значение интеграла (28), можно оценить как

$$k \sim \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{Dt}}, \frac{r}{2Dt} \right\}, \quad (33)$$

и на расстояниях

$$r \gg ut \quad (34)$$

условие (25) нарушается. Поэтому в области (34) вычисления в (28) должны проводиться с использованием выражения для массового оператора (24). В результате на расстояниях  $r \gg ut$  хвост концентрации имеет супердиффузионный вид (31).

В итоге хвост на временах  $t \gg t_*$  принимает двухступенчатый вид, так что ближняя часть соответствует классическому диффузионному переносу, а дальняя часть описывается супердиффузионным выражением (31). Сравнивая (31) с (32), видим, что дальняя супердиффузионная часть хвоста убывает быстрее, чем его ближняя часть.

Переход от одной части хвоста к другой происходит на расстояниях  $r_* \sim ut$ . Характерную величину концентрации на этих расстояниях можно оценить как

$$c(r_*, t) \propto \exp\left(-A \frac{t}{t_*}\right), \quad (35)$$

где  $A \sim 1$ .

Отметим, что время  $t_*$  перехода от супердиффузионного режима к классической диффузии (соотношение (29)) можно интерпретировать несколькими разными способами. С одной стороны, на временах  $t \sim t_* = \frac{\xi^{1+h}}{Va^h}$  размер облака частиц становится порядка корреляционной длины  $R(t_*) \sim \xi$ . Поэтому на временах  $t > t_*$  среда представляется статистически однородной, и, следовательно, дисперсия частиц растет по классическому диффузионному закону (32). С другой стороны, из оценки  $R(t_*) \sim \xi$  следует соотношение

$$\frac{R(t_*)}{u} \sim \frac{\xi}{u} \sim \frac{\xi^{1+h}}{Va^h} \sim \frac{\xi^2}{D}, \quad (36)$$

что означает, что на временах  $t \sim t_*$  размер облака частиц, определяемый независимо супердиффузией либо классической диффузией, становится сравнимым со смещением  $ut_*$ , обусловленным дрейфом со средней скоростью  $u$ .

## Заключение

В работе исследовано влияние конечности корреляционного радиуса фрактальной среды на процесс переноса частиц случайной адвекцией. Найдено характерное время  $t_*$ , которое разделяет интервалы различных режимов переноса. На ранних временах  $t \ll t_*$  перенос происходит в режиме супердиффузии, ранее изученном в [9]. На поздней стадии  $t \gg t_*$  (когда размер облака частиц становится больше корреляционной длины) этот режим переходит в режим классической диффузии с эффективным коэффициентом диффузии, определяемым произведением средней скорости адвекции на корреляционную длину. Однако на данных временах классический гауссов профиль имеет место только в области основного облака и ближней части хвоста концентрации. Вне этой области (в «далеком хвосте») профиль концентрации описывается супердиффузионной асимптотикой. Такая двухступенчатая асимптотика хвоста была получена ранее в другой работе (см. [19]), и, мы полагаем, является общим свойством систем, в которых тип режима переноса меняется со временем. В этом

случае, чем более удаленная часть хвоста рассматривается, тем более ранний режим переноса определяет ее структуру.

Авторы выражают глубокую благодарность И. Л. Драникову за плодотворное обсуждение результатов статьи. Работа выполнена при поддержке CRDF (Project RG0-20101-RW40) и РФФИ (Проект № 06-08-00176-а).

## Литература

1. *Isichenko, M.B.* // Rev. Mod. Phys. — 1992. — 64. — 961.
2. *Sahimi, M.* // Rev. Mod. Phys. — 1993. — 65. — 1393.
3. *Guyot, R.A.* // Phys. Rev. B. — 1986. — 34. — 7816.
4. *Compte, A. and M.O. Cáceres* // Phys. Rev. Lett. — 1998. — 81. — 3140.
5. *Chukbar, K. and V. Zaburdaev* // Phys. Rev. E. — 2005. — 71. — 061105.
6. *Bonnet, E., O. Bour, N.E. Odling, P. Davy, I. Main, P. Cowie, B. Berkowitz* // Reviews of Geophysics. — 2001. — 39. — 347.
7. *Sahimi, M., M.C. Robertson, C.G. Sammis* // Phys. Rev. Lett. — 1993. — 70. — 2186.
8. *Koch, D.L. and J.F. Brady* // Phys. Fluids A. — 1989. — 1. — 47.
9. *Дыхне, А.М., И.Л. Драников, П.С. Кондратенко, Л.В. Матвеев.* Супердиффузия в модели случайной адвекции // Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. тр. / ИБРАЭ РАН. — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 6.
10. *Guyot, R.A.* // Phys. Rev. A. — 1985. — 32. — 2324.
11. *Roman, H.E. and M. Giona* // J. Phys. A. — 1992. — 25. — 2107.
12. *D. ben-Avraham and S. Havlin.* Diffusion and Reaction in Fractals and Disordered Systems. — Cambridge University Press, 2000.
13. *Абрикосов, А.А., Л.П. Горьков* // ЖЭТФ. — 1958. — 35. — 1158; — 1959. — 36. — 319.
14. *Финкельберг, В.М.* // ЖЭТФ. — 1967. — 53. — 40.
15. *Дрейзин, Ю.А., А.М. Дыхне* // ЖЭТФ. — 1972. — 63. — 242.
16. *Vouchaud, J.-P. and A. Georges* // Phys. Rep. — 1990. — 195. — 127.
17. *Абрикосов, А.А., Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: ИФМЛ, 1962.
18. *Ma, S.-K.* Modern theory of Critical Phenomena. — Benjamin, London, 1976.
19. *Дыхне, А.М., П.С. Кондратенко, Л.В. Матвеев.* Диффузия примеси по перколяционному кластеру // Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. тр. / ИБРАЭ РАН. — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 71.

### III. Супердиффузия в модели случайной адвекции при наличии дрейфа

*И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, В. А. Лапин, Л. В. Матвеев*

#### **Введение**

Анализ данных по распространению примесей в геологических средах показывает, что в большинстве случаев перенос примесей не описывается классической моделью диффузии—адвекции. В частности, размер облака локализации частиц  $R(t)$  растет со временем пропорционально  $t^\gamma$ , где  $\gamma \neq 1/2$ . Для описания таких аномальных зависимостей была с успехом использована модель случайной адвекции, в рамках которой учет медленного пространственного убывания корреляций приводит к супердиффузионному режиму переноса с  $\gamma > 1/2$  [1].

Данная модель имеет непосредственное отношение к процессу адвекции в ненасыщенных трещиноватых скальных породах, где поле скоростей формируется в результате просачивания влаги из верхних слоев к водному горизонту. Характерной особенностью таких сред является наличие двух подсистем с сильно различающимися свойствами: плотной, слабо проницаемой матрицы и хорошо проницаемой системы трещин. Последняя очень часто обладает фрактальными свойствами, в результате чего возникают сильные, скоррелированные флуктуации скорости просачивания. Именно в этом случае адвекция приводит к аномальным режимам распространения примеси. Модель, учитывающая только флуктуирующую часть поля скоростей, была рассмотрена в одной из предыдущих статей [1]. С другой стороны, скорость просачивания в матрице практически однородна по пространству, что обусловлено слабыми вариациями проницаемости в самой матрице. В результате взаимодействия этих двух подсистем (матрицы и трещин) формируется поле скоростей, содержащее как отличную от нуля среднюю, так и флуктуирующую в пространстве компоненты.

В настоящей работе рассматривается адвекция примеси в случайном стационарном поле скоростей с отличной от нуля средней скоростью. Полагается, что корреляционная функция флуктуирующей компоненты убывает по степенному закону. Целью работы является определение режимов переноса и анализ структуры хвостов концентрации в зависимости

от параметров течения и времени процесса. План статьи следующий. Во втором разделе описана постановка задачи. В третьей части с помощью диаграммной техники выведены основные соотношения для функции Грина и поляризационного оператора. Свойства поляризационного оператора и асимптотическое поведение концентрации проанализированы в четвертом и пятом разделах. В шестом разделе содержится заключение.

## 1. Постановка задачи

Основу модели, как и в [1], составляет уравнение для концентрации примеси  $c(\vec{r}, t)$ , описывающее процесс адвекции:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(\vec{v}c) = 0. \quad (1)$$

Как и в [1], рассматриваем задачу с заданным начальным (при  $t=0$ ) распределением примеси в отсутствие источника. Скорость адвекции  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  является случайной функцией координат:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{u} + \vec{v}'(\vec{r}). \quad (2)$$

Здесь  $\vec{u} = \langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle$  — не зависящее от координат среднее по ансамблю реализаций значение скорости, а  $\vec{v}'(\vec{r})$  — флуктуационная компонента:  $\langle \vec{v}'(\vec{r}) \rangle = 0$ .

Поле скоростей удовлетворяет уравнению несжимаемости:

$$\text{div} \vec{v}(\vec{r}) = \text{div} \vec{v}'(\vec{r}) = 0. \quad (3)$$

Мы полагаем, что корреляции флуктуаций скорости являются дальнедействующими: соответственно, корреляционные функции ее случайных компонент  $\vec{v}'$  убывают на больших расстояниях по степенным законам. В частности, парная функция корреляции

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \langle v'_i(\vec{r}_1) v'_j(\vec{r}_2) \rangle \quad (4)$$

обладает следующими свойствами:

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r}) \propto \begin{cases} V^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2h} & \text{при } r \gg a, \\ V^2 & \text{при } r \leq a. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $h > 0$ ,  $a$  — параметр длины, имеющий смысл нижней границы фрактального интервала,  $V$  — параметр, имеющий размерность скорости. Таким образом, при  $r \gg a$  величина  $K_{ij}^{(2)}(\vec{r})$  является однородной функцией своего аргумента порядка  $-2h$ . Аналогичным образом, будем считать, что  $n$ -точечный коррелятор скоростей, определенный формулой

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \langle v'_{i_1}(\vec{r}_1) v'_{i_2}(\vec{r}_2) \dots v'_{i_n}(\vec{r}_n) \rangle, \quad (6)$$

в области  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \gg a$  (для всех пар переменных  $\vec{r}_i, \vec{r}_j$ ) удовлетворяет соотношению

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\lambda \vec{r}_1, \lambda \vec{r}_2, \dots, \lambda \vec{r}_n) = \lambda^{-nh} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (7)$$

По аналогии с теорией критических явлений [2] параметр  $h$  будем называть масштабной размерностью флуктуации скорости  $\vec{v}'$ . В соответствии с (7) для Фурье-образа  $n$ -точечного коррелятора

$$\begin{aligned} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\} &= \\ &= \int d^3 r_1 d^3 r_2 \dots d^3 r_n \exp\left[-i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \dots + \vec{k}_n \vec{r}_n)\right] K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \\ &= (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_n) \tilde{K}_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_{n-1}\} \end{aligned} \quad (8)$$

справедливо масштабное соотношение

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\lambda \vec{k}_1, \lambda \vec{k}_2, \dots, \lambda \vec{k}_n\} = \lambda^{n(h-3)} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\}. \quad (9)$$

Из равенств (5) и (9) вытекает, что в области малых волновых векторов,  $ka \ll 1$  ( $k = |\vec{k}|$ ), Фурье-образ парного коррелятора имеет вид

$$\tilde{K}_{ij}^{(2)}(\vec{k}) \sim V^2 a^{2h} k^{2h-3}, \quad (10)$$

а при  $ka \gg 1$  он убывает по экспоненциальному закону.

## 2. Диаграммная техника

Концентрация частиц, удовлетворяющая уравнению (1), в произвольный момент времени может быть выражена через свое начальное распределение с помощью соотношения

$$c(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' g(\vec{r}, \vec{r}'; t) c(\vec{r}', 0), \quad (11)$$

где функция Грина  $g(\vec{r}, \vec{r}'; t)$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_i(\vec{r}) \right\} g(\vec{r}, \vec{r}'; t) = 0 \quad (12)$$

с начальным условием

$$g(\vec{r}, \vec{r}'; 0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (13)$$

Интерес представляет концентрация, усредненная по ансамблю реализаций поля скоростей,  $\bar{c}(\vec{r}, t)$ . Ее связь с начальным распределением концентрации

$$\bar{c}(\vec{r}, t) = \int d^3 r' G(\vec{r} - \vec{r}', t) c(\vec{r}', 0) \quad (14)$$

осуществляется посредством средней по ансамблю функцией Грина  $G(\vec{r} - \vec{r}', t) \equiv g(\vec{r}, \vec{r}'; t)$  (далее для краткости называем ее просто функцией Грина). Вычисление  $G(\vec{r} - \vec{r}', t)$  удобно производить методами квантовой теории поля на основе «крестовой» диаграммной техники, разработанной в [3–5], которая нашла дальнейшее применение в теории распространения волн в неупорядоченных средах [6–12]; см. также [13]. Для задачи о стохастической адвекции—диффузии техника была впервые применена Дрейзиным и Дыхне в [14].

В представлении Фурье по пространственным координатам и Лапласа по времени

$$G\{\vec{k}, p\} = \int_0^\infty dt \int d^3 r e^{-pt - i\vec{k}\vec{r}} G(\vec{r}, t), \quad (15)$$

с учетом (12), (13) и (2), функция Грина принимает вид

$$G\{\vec{k}, p\} = \frac{1}{p + i\vec{k}\vec{u} - M(\vec{k}, p)}, \quad (16)$$

где  $\vec{k}$  и  $p$  — переменные Фурье и Лапласа, а  $M(\vec{k}, p)$  — поляризационный оператор, представляющий собой сумму неприводимых скелетных диаграмм [5]:

$$M(\vec{k}, p) = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots$$

Здесь горизонтальные линии соответствуют функции  $G$ , кресты отвечают оператору возмущения

$$\hat{T} = -v'_i(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{18}$$

а пунктирные линии объединяют кресты, относящиеся к одному из кумулянтов (см., например, [7]), разложение по которым составляет существо процедуры усреднения по ансамблю реализаций. Помимо флуктуаций скорости, каждый крест в (17), согласно определению (18), содержит градиенты. В представлении Фурье они сводятся к волновым векторам, причем в соответствии с (3) каждый из них в равной мере может соответствовать волновому вектору любой из двух примыкающих к кресту  $G$ -линий. Каждому исходящему из креста пунктиру отвечает свой волновой вектор, по которому происходит интегрирование. После подстановки равенства (16) в диаграммное разложение (17) последнее превращается в интегральное уравнение для функции  $M(\vec{k}, p)$ .

### 3. Анализ свойств поляризационного оператора

Совершенно очевидно, что перенос за счет средней скорости адвекции сам по себе более эффективен, чем благодаря флуктуациям скорости. Поэтому реальный смысл имеет только задача, в которой средняя скорость намного меньше флуктуационной. Именно этот случай мы и будем иметь в виду:

$$u \ll V. \tag{19}$$

Для удобства перейдем из лабораторной системы координат в движущуюся со скоростью  $\vec{u}$ . Это приведет к замене пространственной переменной:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t. \tag{20}$$

В свою очередь, в представлении Фурье—Лапласа также произойдет замена:

$$p \rightarrow p' = p + i\vec{k}\vec{u}. \tag{21}$$

В новых переменных Фурье—Лапласа образ функции Грина будет иметь вид

$$\tilde{G}(\vec{k}, p') = \frac{1}{p' - \tilde{M}(\vec{k}, p')}. \quad (22)$$

Отличие от нуля средней скорости приводит к возникновению дополнительного параметра размерности частоты. Им является произведение  $uk$ . Эта величина сравнивается с комбинацией той же размерности  $Va^h k^{1+h}$  (которая не содержит средней скорости  $u$ ) при значении волнового вектора  $k$ , равном

$$k_* = \left(\frac{u}{V}\right)^{\frac{1}{h}} a^{-1}. \quad (23)$$

Поскольку  $Va^h k^{1+h}$  определяет порядок величины поляризационного оператора  $M(\vec{k}, p)$  в задаче о случайной адвекции без дрейфа, т. е. при  $\vec{u} = 0$  (см. [1]), то понятно, что имеют место качественные соотношения

$$\begin{aligned} uk \ll M(\vec{k}, p) \Big|_{\vec{u}=0} & \quad \text{при} \quad k \gg k_*, \\ uk \gg M(\vec{k}, p) \Big|_{\vec{u}=0} & \quad \text{при} \quad k \ll k_*. \end{aligned} \quad (24)$$

Ниже мы убедимся в том, что поляризационный оператор имеет различный вид в двух случаях  $k \gg k_*$  и  $k \ll k_*$ . Проанализируем отдельно каждый из них.

$$k \gg k_*$$

Предположим, что первое из неравенств (24) остается справедливым и при замене  $M(\vec{k}, p) \Big|_{\vec{u}=0} \rightarrow \tilde{M}(\vec{k}, p')$ , т. е. что

$$uk \ll \tilde{M}(\vec{k}, p') \quad \text{при} \quad k \gg k_*. \quad (25)$$

Если так, то во всех диаграммах для  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$  слагаемыми типа  $\vec{u}\vec{k}_i$  в знаменателях функций Грина станет возможным пренебречь в сравнении с  $\tilde{M}(\vec{k} - \vec{u}\vec{k}_i, p')$ . В результате диаграммное уравнение (17) совпадет с таковым для функции  $M(\vec{k}, p)$  при  $\vec{u} = 0$ , и мы получим

$$\tilde{M}(\vec{k}, p') \cong M(\vec{k}, p) \Big|_{\vec{v}=0} \quad \text{при } k \gg k_*. \quad (26)$$

Таким образом, сформулированное предположение (25) оправдывается.

Приступая к анализу свойств поляризационного оператора при малых волновых векторах, сделаем ряд предварительных оценок. Из самого вывода соотношения (26) следует, что при малых волновых векторах выполняется неравенство, противоположное (25):

$$\tilde{M}(\vec{k}, p') \ll uk \quad \text{при } k \ll k_*. \quad (27)$$

Оценим вклады для модифицированного поляризационного оператора, получающиеся от трех характерных областей интегрирования по волновым векторам пунктирных линий. Обозначим  $M^{(0)}$  вклад области интегрирования  $k_{(l)} \sim k_*$ . Для того чтобы получить для него оценку при  $k \ll k_*$ , заметим, что при  $k \sim k_*$  он имеет порядок  $uk_*$ . С другой стороны, при  $k \ll k_*$  этот вклад пропорционален  $k^2$  за счет двух крайних крестов, поскольку в подынтегральных выражениях можно положить  $\vec{k} = 0$ . Поэтому для величины  $M^{(0)}$  при  $k \ll k_*$  получается оценка

$$M^{(0)} \sim uk_* \left( \frac{k}{k_*} \right)^2. \quad (28)$$

Существенно, что она справедлива для вклада области  $k_{(l)} \sim k_*$  не только в поляризационный оператор в целом, но и в каждую диаграмму (любого порядка). Вторая характерная область интегрирования соответствует волновым векторам пунктирных линий  $k_{(l)} \sim k$ . Обозначим  $\tilde{M}_n^{(1)}$  вклад этой области в диаграмму  $n$ -го порядка. Отношение  $\tilde{M}_n^{(1)}$  к  $M^{(0)}$  определяется произведением трех сомножителей. Первый  $\left( \frac{k}{k_*} \right)^{n-2}$  возникает от того, что при переходе от  $M^{(0)}$  к  $\tilde{M}_n^{(1)}$  волновые векторы, возникшие от градиентов  $n-2$  внутренних крестов, вместо  $k_*$ , теперь имеют порядок  $k$ . Второй

множитель  $\left(\frac{k}{k_*}\right)^{nh}$  образуется из-за перехода  $k_* \rightarrow k$  в корреляционных функциях и в объеме интегрирования по области  $k_{(l)} \sim k$ . Третий множитель  $\left(\frac{k}{k_*}\right)^{-(n-1)}$  получается из-за того, что каждая из  $(n-1)$   $\tilde{G}$ -функций при  $k_{(l)} \sim k$  имеет порядок  $(uk)^{-1}$  вместо  $(uk_*)^{-1}$ , как было при  $k_{(l)} \sim k_*$ . Собирая множители вместе, получаем оценку:

$$\frac{\tilde{M}_n^{(1)}}{\tilde{M}^{(0)}} \sim \left(\frac{k}{k_*}\right)^{nh-1}. \quad (29)$$

Наконец, третья характерная область интегрирования соответствует волновым векторам пунктирных линий  $k_{(l)} \sim \frac{M^{(0)}}{u}$ . Вклад этой области в  $\tilde{M}$  обозначим  $\tilde{M}_n^{(2)}$ . Поступая так же, как в предыдущем случае, находим оценку для отношения этого вклада к величине  $M^{(0)}$ :

$$\frac{\tilde{M}_n^{(2)}}{\tilde{M}^{(0)}} \sim \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n(2h-1)}. \quad (30)$$

Оценки (29) и (30) показывают, что при масштабном индексе  $\frac{1}{2} < h < 1$  в области малых волновых векторов  $k \ll k_*$  вклады  $\tilde{M}_n^{(1)}$  и  $\tilde{M}_n^{(2)}$  малы по сравнению с  $M^{(0)}$ . Поэтому величина  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$  по порядку величины совпадает с  $M^{(0)}$ , так что для нее справедлива оценка (28). Таким образом, поляризационный оператор  $k \ll k_*$ , как при классической диффузии, оказывается пропорциональным квадрату волнового вектора. Особенность рассматриваемого нами здесь случая  $\vec{u} \neq 0$ ,  $k \ll k_*$ ,  $h > 1/2$ , состоит в том, что функция  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$  должна теперь зависеть от взаимной ориентации векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{u}$ . Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\vec{k}, p') &= -D_{ij} k_i k_j \quad \text{при } k \ll k_*, \quad \frac{1}{2} < h < 1. \\ D_{ij} &\sim u k_*^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

Квадратичная форма  $D_{ij} k_i k_j$  является положительно определенной. Симметрический тензор второго ранга  $D_{ij}$  приобретает диагональный вид в системе координат, одна из осей которой ориентирована вдоль средней скорости  $\vec{u}$  (при этом две его диагональные компоненты, соответствующие плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{u}$ , совпадают). Из оценок (29) и (30) следует, что при значениях масштабного индекса скорости из интервала  $0 < h < \frac{1}{2}$  поляризационный оператор во всех порядках диаграммного разложения определяется областью интегрирования по пунктирным линиям, соответствующей  $u k_{(l)} \sim \tilde{M}$ , и, следовательно,  $k_{(l)} \ll k$ . Это дает нам основание пренебречь волновыми векторами пунктирных линий  $\vec{k}_{(l)}$  под знаками интегралов по сравнению с  $\vec{k}$  как в аргументах поляризационных операторов (заменив их таким образом на функцию  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$ ), так и в множителях, возникающих от градиентов.

В итоге волновые векторы  $\vec{k}_{(l)}$  в подынтегральных выражениях остаются только в качестве аргументов корреляционных функций, а также в знаменателях функций Грина в слагаемых типа  $-i\vec{u}\vec{k}_{(l)}$ . Все это приводит к возможности искать такое решение диаграммного уравнения (17) для  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$ , которое удовлетворяет свойству симметрии

$$\tilde{M}(\lambda \vec{k}, \lambda^\Delta p') = \lambda^\Delta \tilde{M}(\vec{k}, p'). \quad (32)$$

С учетом уравнения Дайсона (16), из (32) следует также

$$\tilde{G}(\lambda \vec{k}, \lambda^\Delta p') = \lambda^{-\Delta} \tilde{G}(\vec{k}, p'). \quad (33)$$

Для доказательства существования такого решения (и, более того, чтобы его найти) рассмотрим произвольную диаграмму  $n$ -го порядка. Сделаем в ней преобразования

$$\vec{k} \rightarrow \lambda \vec{k}, \quad (34)$$

$$p' \rightarrow \lambda^\Delta p' \quad (35)$$

с одновременной заменой переменных интегрирования

$$\vec{k}_{(l)} \rightarrow \lambda^\Delta \vec{k}_{(l)}. \quad (36)$$

Естественно, объем интегрирования по  $\vec{k}_{(l)}$  останется прежним — все пространство  $\vec{k}_{(l)}$ .

В результате диаграмма  $n$ -го порядка приобретет множитель  $\lambda^{\Delta_n}$ , показатель степени  $\Delta_n$  в котором равен

$$\Delta_n = nh\Delta + n - (n-1)\Delta. \quad (37)$$

Здесь первое слагаемое справа обусловлено множителем, возникающим от корреляционных функций и всех дифференциалов  $d^3\vec{k}_{(l)}$  за счет преобразования переменных интегрирования (36), второе слагаемое — за счет  $n$  множителей  $\vec{k}$  (от градиентов в крестах), а третье — за счет  $n-1$  функций Грина (с учетом предположения (33)), стоящих в диаграмме  $n$ -го порядка для  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$ . Приравнявая в (36)  $\Delta_n = \Delta$ , получаем уравнение, решение которого есть

$$\Delta = \frac{1}{1-h}. \quad (38)$$

Тот факт, что нашлось решение для показателя  $\Delta$ , которое не зависит от порядка диаграммы, сам по себе уже является доказательством свойства масштабной симметрии (32) (а значит, и (33)). Из него следует, что функцию  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$  можно представить в виде:

$$\tilde{M}(\vec{k}, p') = -p' \psi(\eta, \vec{m}) \quad \text{при} \quad k \ll k_*, \quad 0 < h < \frac{1}{2}. \quad (39)$$

Здесь  $\eta$  — безразмерная комбинация величин  $k$  и  $p'$ , инвариантная относительно преобразования (34), (35);  $\vec{m}$  — единичный вектор в направлении вектора  $\vec{k}$ ,  $\vec{m} = \vec{k} / k$ .

Для определения явного вида автомодельной переменной  $\eta$  (включая размерный множитель) достаточно рассмотреть выражение для диаграммы второго порядка (с двумя крестами) в пределе  $p' \neq 0$ ,  $\vec{k} \rightarrow 0$ :

$$\tilde{M}^{(2)}(\vec{k}, p) = \begin{array}{c} \vec{k}_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \times \text{---} \times \\ \vec{k} - \vec{k}_1 \end{array} \quad (40)$$

Ей соответствует выражение

$$\tilde{M}^{(2)}(\vec{k}, p) \sim -k^2 V^2 a^{2h} \int d^3 k_1 \frac{k_1^{2h-3}}{p' - i\vec{k}_1 \vec{u} - \tilde{M}(\vec{k} - \vec{k}_1, p)}. \quad (41)$$

Отсюда в пределе  $p' \neq 0$ ,  $\vec{k} \rightarrow 0$  получаем

$$\tilde{M}^{(2)}(\vec{k}, p) \Big|_{p' \neq 0, \vec{k} \rightarrow 0} \sim \frac{(uk)^2}{(uk_*)^{2h}} p'^{2h-1}. \quad (42)$$

Сопоставляя (42) с выражением (39), находим автомодельную переменную:

$$\eta = \left( \frac{k}{k_*} \right)^2 \left( \frac{uk_*}{p'} \right)^{2(1-h)}. \quad (43)$$

Займемся теперь изучением свойств функции  $\psi(\eta, \vec{m})$ . Ее предел при  $\eta \ll 1$  соответствует малым волновым векторам при фиксированном ненулевом значении переменной Лапласа. Разложение каждой диаграммы в этом пределе начинается с квадратичного по волновому вектору слагаемого (за счет градиентов от внешних крестов). Поэтому с учетом (43) имеем

$$\psi(\eta, \vec{m}) \sim \eta \quad \text{при} \quad \eta \ll 1. \quad (44)$$

Из выражения для диаграммы второго порядка, так же как и высших порядков, видно, что точка  $\vec{k} = 0$  для поляризационного оператора, а

значит, и точка  $\eta = 0$  для функции  $\psi(\eta, \vec{m})$ , является регулярной, так что при малых  $\eta$  имеет место разложение по целым степеням:

$$\psi(\eta, \vec{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\vec{m}) \eta^n \quad \text{при } \eta \ll 1. \quad (45)$$

С другой стороны, на примере того же выражения (41) видно, что в обратном пределе  $p' = 0$ ,  $\vec{k} \neq 0$  функция  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$  конечна и не равна нулю. Этот факт в сочетании с равенствами (39) и (43) приводит к соотношению

$$\psi(\eta, \vec{m}) \sim \eta^{\frac{1}{2(1-h)}} \quad \text{при } \eta \gg 1. \quad (46)$$

Такая дробно-степенная асимптотика является свидетельством того, что при конечном значении  $\eta$  функция  $\psi(\eta, \vec{m})$  имеет точку ветвления. Поскольку при действительных положительных  $p'$  и действительных  $k$  поляризационный оператор вещественен и симметричен относительно преобразования  $k \rightarrow -k$ , точка ветвления должна иметь действительное отрицательное значение,  $\eta = \eta_b < 0$ . Учитывая регулярный множитель  $k^2$ , присутствующий в выражениях каждой диаграммы для  $\tilde{M}(\vec{k}, p')$  (он соответствует множителю  $\eta$  в функции  $\psi(\eta, \vec{m})$ ), мы с учетом (45) приходим к выводу, что при  $\eta \rightarrow \eta_b$   $\psi(\eta, \vec{m})$  имеет структуру

$$\psi(\eta, \vec{m}) \sim \eta(\eta - \eta_b(\vec{m}))^{\frac{1-2h}{2(1-h)}} \quad \text{при } |\eta - \eta_b| \ll 1. \quad (47)$$

Отсюда следует, что в точке ветвления функция  $\psi(\eta, \vec{m})$  обращается в бесконечность.

Отдельного рассмотрения требует поведение поляризационного оператора при  $k \ll k_*$ ,  $h = \frac{1}{2}$ . Оценки (28)–(30) указывают на то, что при  $h = \frac{1}{2}$ ,

подобно случаю  $\frac{1}{2} < h < 1$ , существенен вклад области интегрирования по волновым векторам пунктирных линий  $k_{(t)} \ll k_*$ . Различие состоит только в том, что одна лишь диаграмма второго порядка ( $n=2$ ) для  $h = \frac{1}{2}$  имеет дающую логарифм область интегрирования, которая простирается от  $\max\left\{\frac{p'}{u}, \frac{k^2}{k_*}\right\}$  до  $uk_*$ . Поэтому имеем

$$\tilde{M}(\vec{k}, p') = -\tilde{D}_{ij} k_i k_j \ln \left\{ \frac{uk_*}{\max\left(p', \frac{uk^2}{k_*}\right)} \right\}, \quad k \ll k_*, \quad h = \frac{1}{2}. \quad (48)$$

$$\tilde{D}_{ij} \sim uk_*^{-1}$$

#### 4. Поведение концентрации

Нас будут интересовать свойства распределения концентрации на временах, когда размер основной области локализации примеси много больше первоначального размера,  $R(t) \gg R_0$  ( $R_0 \equiv R(0)$ ). Тогда, согласно формуле (14), находим

$$\bar{c}(\vec{r}, t) \cong N G(\vec{r}, t), \quad R(t) \gg R_0. \quad (49)$$

Используя (14), (15) и (22), получим

$$\bar{c}(\vec{r}, t) = N \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp'}{2\pi i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{p't + i\vec{k}\vec{r}}}{p' - \tilde{M}(\vec{k}, p')}, \quad \text{Re } b > 0. \quad (50)$$

Структура профиля концентрации зависит от интервала, которому принадлежит время. Для дальнейшего анализа важно, что существенные значения переменной интегрирования  $p'$  в (50) находятся в области

$$p' \gtrsim t^{-1}. \quad (51)$$

Учитывая результаты предыдущего раздела, дальнейший анализ проведем отдельно для двух интервалов времени:  $t \ll t_*$  и  $t \gg t_*$ , где  $t_* = (k_* u)^{-1}$ .

$$t \ll t_*$$

Согласно (26), на этих временах благодаря (51) поляризационный оператор в (50) приближенно равен поляризационному оператору в задаче без дрейфа (при  $\vec{u} = 0$ ). Соответственно, и поведение концентрации на этих временах совпадает с тем, что было найдено в работе [1] для случая  $\vec{u} = 0$ .

$$t \gg t_*$$

С учетом оценки (51), какие значения переменной Лапласа существенны, и результатов предыдущего раздела легко видеть, что режимы переноса примеси на этих временах различаются в зависимости от того, какому интервалу принадлежит масштабный индекс случайной составляющей скорости:  $0 < h < \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} < h < 1$  или он равен  $\frac{1}{2}$ . Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

$$t \gg t_*, \quad 0 < h < \frac{1}{2}$$

Подставляя равенство (39) в выражение для концентрации (50), преобразуем последнее к виду

$$\bar{c}(\vec{r}, t) = N \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp'}{2\pi i} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{p't + i\vec{k}\vec{r}}}{p'(1 + \psi(\eta, \vec{m}))}, \quad \text{Re } b > 0, \quad (52)$$

где, напомним, автомодельная переменная  $\eta$  определена (43).

После перехода к новым переменным интегрирования согласно

$$\begin{aligned} p' &\rightarrow \bar{p}' = p't, \\ k &\rightarrow \bar{k} = k\bar{R}(t) \bar{p}'^{h-1}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\bar{R}(t) = k_*^{-1} (uk_* t)^{1-h}, \quad (54)$$

выражение (52) приобретает форму

$$\bar{c}(\bar{r}, t) = \frac{N}{\bar{R}^3(t)} \Psi(\bar{\xi}, \bar{n}), \quad (55)$$

где функция  $\Psi(\bar{\xi}, \bar{n})$  задана равенством

$$\Psi(\bar{\xi}, \bar{n}) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{d\bar{p}'}{2\pi i} \int_{dO_{\bar{m}}} d\bar{m} \int_0^{\infty} \frac{\bar{k}^2 d\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp\{\bar{p}' + i\bar{k}\bar{\xi}\bar{p}'^{1-h}(\bar{m}\bar{n})\}}{\bar{p}'^{3h-2} (1 + \Psi(\bar{k}^2, \bar{m}))}, \text{Re } \bar{b} > 0, \quad (56)$$

в котором величины  $\bar{\xi}$  и  $\bar{n}$  определены согласно

$$\bar{\xi} = \frac{r'}{\bar{R}(t)}, \quad \bar{n} = \frac{\bar{r}'}{r'}. \quad (57)$$

Напоминаем, что  $\bar{r}' = \bar{r} - \bar{u}t$  — радиус-вектор в сопутствующей системе координат.

Обратим внимание на то, что распределение концентрации является анизотропным (зависимость от вектора  $\bar{n}$  в (56)). Величина  $\bar{R}(t)$  определяет по порядку величины размер области локализации частиц в момент  $t$ . Показатель в зависимости  $\bar{R}(t) \propto t^\gamma$  равен  $\gamma = 1 - h$ . Следовательно, при  $h < 1/2$  имеет место  $\gamma > 1/2$ , и перенос примеси происходит в режиме супердиффузии.

Проанализируем асимптотическое поведение концентрации при  $\bar{\xi} = r' / \bar{R}(t) \gg 1$ . Выполним сначала интегрирование в (56) по угловым переменным. Ниже мы убедимся, что в асимптотическом пределе концентрация экспоненциально мала. Поэтому показатель экспоненты в (56) велик в сравнении с единицей. Это позволяет провести угловое интегрирование методом стационарной фазы. Учитывая наличие двух стационарных точек  $\bar{m} = \bar{n}$  и  $\bar{m} = -\bar{n}$ , а также свойство симметрии  $\Psi(\bar{k}^2, -\bar{m}) = \Psi(\bar{k}^2, \bar{m})$ , получаем из (56):

$$\Psi(\bar{\xi}, \bar{n}) = \frac{1}{\bar{\xi}} \int_{\bar{b}-i\infty}^{\bar{b}+i\infty} \frac{d\bar{p}'}{2\pi i} \bar{p}'^{1-2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{k}d\bar{k}}{(2\pi)^2 i} \frac{\exp\{\bar{p}' + i\bar{k}\bar{\xi}\bar{p}'^{1-h}\}}{1 + \Psi(\bar{k}^2, \bar{n})}, \quad \text{Re } \bar{b} > 0. \quad (58)$$

Функция  $\Psi(\eta, \bar{n})$  вещественна при действительных значениях  $\eta$ . При этом ее знак совпадает со знаком  $\eta$ . Учитывая, что в точке ветвления

$\eta = \eta_b$  ( $\eta_b < 0$ ) она обращается в бесконечность, приходим к выводу, что знаменатель подынтегрального выражения,  $1 + \Psi(\bar{k}^2, \bar{n})$ , обращается в нуль при  $\bar{k}_0 = \pm i\sqrt{|\eta_0(\bar{n})|}$ , где  $\eta_0 < 0$  и  $|\eta_0| < |\eta_b|$ . Таким образом, лежащая на мнимой оси точка  $\bar{k}_0$  является полюсом подынтегрального выражения в (58). Он при этом представляет собой ближайшую к действительной оси особенность этого выражения и определяет асимптотику интеграла при  $\bar{\xi} \gg 1$ . Сдвигая контур интегрирования по переменной  $\bar{k}$  в верхнюю полуплоскость, как показано на рис. 1 в работе [1], получаем

$$\Psi(\bar{\xi}, \bar{n}) \cong \frac{1}{4\pi\psi'_0(\bar{n})\bar{\xi}} \int_{\bar{b}-i\infty}^{\bar{b}+i\infty} \frac{d\bar{p}'}{2\pi i} \bar{p}'^{1-2h} \exp\{-\Gamma(\bar{p}')\}, \quad \text{Re } \bar{b} > 0. \quad (59)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Gamma(\bar{p}') = \bar{p}'^{1-h} \frac{\varepsilon(\bar{n})}{1-h} - \bar{p}', \quad \varepsilon(\bar{n}) = (1-h)\sqrt{|\eta_0(\bar{n})|}\bar{\xi} \quad (60)$$

$$\psi'_0(\bar{n}) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0}$$

Вычисляя оставшийся интеграл по переменной  $\bar{p}'$  методом перевала, приходим к выражению

$$\Psi(\bar{\xi}, \bar{n}) \cong \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \psi'_0 \bar{\xi}} \sqrt{\frac{2}{|\Gamma''_0|}} \bar{p}'_0{}^{1-2h} \exp\{-\Gamma\}. \quad (61)$$

Здесь  $\bar{p}'_0$  — точка перевала, определяемая уравнением

$$\left. \frac{d\Gamma(\bar{p}')}{d\bar{p}'} \right|_{\bar{p}'=\bar{p}'_0} = 0. \quad (62)$$

Другие обозначения, использованные в (61):

$$\Gamma = \Gamma(\bar{p}'_0), \quad \Gamma'' = \left. \frac{d^2\Gamma(\bar{p}')}{d\bar{p}'^2} \right|_{\bar{p}'=\bar{p}'_0}. \quad (63)$$

Решение уравнения (62) с учетом (60) дает:

$$\bar{p}'_0 = \varepsilon(\bar{n})^{1/h}. \quad (64)$$

Раскрывая с помощью (64) равенства (63), подставляя затем их в выражение (61), а после этого последнее — в (55), находим асимптотику концентрации при  $\bar{\xi} \gg 1$ :

$$\bar{c}(\vec{r}, t) \cong N \frac{A(\bar{n})}{[4\pi\bar{R}^2(t)]^{3/2}} [\varepsilon(\bar{n})]^{3(1-2h)/2h} \exp\{-\Gamma\}, \quad (65)$$

$$\Gamma = \frac{h}{1-h} [\varepsilon(\bar{n})]^{1/h}, \quad A(\bar{n}) = \frac{1-h}{\psi'_0(\bar{n})} \sqrt{\frac{2|\eta_0(\bar{n})|}{h}}.$$

Это выражение справедливо до тех пор, пока значения переменной Лапласа, существенные при его выводе, удовлетворяют неравенству  $p' < \frac{1}{t_*}$ .

С учетом (53), (64) и (65) (для  $\Gamma$ ) приходим к выводу, что условие применимости асимптотики (65) дается неравенством

$$\Gamma < \frac{t}{t_*}. \quad (66)$$

В обратном предельном случае, когда  $\Gamma > \frac{t}{t_*}$ , асимптотика концентрации определяется выражением, полученным в работе [1] для случая  $\vec{u} = 0$ :

$$\bar{c}(\vec{r}, t) \cong \frac{A}{\{4\pi\bar{R}^2(t)\}^{3/2}} \varepsilon^{3(1-2h)/2h} \exp\left\{-h\varepsilon^{\frac{1+h}{h}}\right\}, \quad \varepsilon = \frac{\xi\sqrt{|\eta_0|}}{1+h}, \quad (67)$$

$$A = \sqrt{\frac{2|\eta_0|}{h(1+h)}} \frac{1}{\phi'_0}, \quad \xi = \frac{r}{R(t)}, \quad R(t) = (Va^h t)^{1/(1+h)}.$$

$$t \gg t_*, \quad \frac{1}{2} \leq h < 1$$

Выражения для концентрации, справедливые как в основной области локализации, так и на умеренно больших расстояниях от источника, получаются из (31) и (48) путем обратного преобразования Фурье—Лапласа:

$$\bar{c}(\vec{r}', t) \cong \frac{1}{\left(4\pi|\hat{D}|^{1/3}t\right)^{3/2}} \exp\{-\Gamma\}, \quad (68)$$

$$\Gamma = \frac{D_{ik}^{-1}r'_i r'_k}{4t}, \quad \frac{1}{2} < h < 1$$

$$\bar{c}(\vec{r}', t) \cong \frac{1}{\left(4\pi|\hat{D}|^{1/3}t \ln \frac{t}{t_*}\right)^{3/2}} \exp(-\Gamma), \quad (69)$$

$$\Gamma = \frac{\tilde{D}_{ik}^{-1}r'_i r'_k}{4t \ln \frac{t}{t_*}}, \quad h = \frac{1}{2}$$

Как и (65), эти формулы справедливы при условии (66). В обратном случае, когда  $\Gamma > \frac{t}{t_*}$ , мы снова возвращаемся к асимптотическому выражению (67), относящемуся к случаю случайной адвекции без дрейфа.

## Заключение

В заключение подведем итоги исследования. В работе рассмотрена модель случайной адвекции, в которой средняя составляющая скорости отлична от нуля и не связана со свойствами флуктуационной компоненты. Как и при равной нулю средней скорости (см. [1]), важным параметром, определяющим характер переноса, является показатель  $h$  степенного убывания коррелятора флуктуаций.

В работе рассмотрены значения  $h < 1$ , приводящие к аномальным режимам переноса (в обратном случае имеем дело с полностью классически-диффузионным поведением). Также полагается, что амплитуда флуктуационной компоненты скорости  $V$  много больше средней скорости дрейфа  $u$ .

На малых временах,  $t < t_* = \frac{a}{u} \left(\frac{V}{u}\right)^{\frac{1}{h}}$ , все происходит как и в отсутствие средней скорости адвекции: перенос примеси описывается супердиффу-

зионным законом  $R(t) \sim t^{\frac{1}{1+h}}$ , и поведение в хвостах определяется соответствующей этому закону автомодельной переменной  $r/R(t)$  вплоть до сколь угодно больших расстояний.

На больших временах,  $t > t_*$ , режим переноса зависит от величины параметра  $h$ . Если значение  $h$  лежит в диапазоне  $1/2 < h < 1$ , реализуется режим классической диффузии. При меньших значениях  $h$ , в диапазоне  $0 < h < 1/2$ , супердиффузионный характер переноса сохраняется, но с другим показателем:  $\bar{R}(t) \sim t^{1-h}$ .

При  $t > t_*$ , когда снос за счет средней скорости  $ut$  обгоняет расширение облака, асимптотика концентрации делится на две области. Ближняя асимптотика (умеренно далекие расстояния) подвержена влиянию средней скорости адвекции и является различной в зависимости от масштабного параметра флуктуаций скорости:  $h \geq 1/2$  — гауссова асимптотика (при этом и основная область расширяется в классическом режиме),  $h < 1/2$  — супердиффузионная асимптотика, т.е. более короткая (при этом и основная область расширяется в супердиффузионном режиме). Дальняя асимптотика (сверхдалекие расстояния) не зависит от средней скорости адвекции и при рассматриваемых значениях  $h < 1$  является супердиффузионной, имевшей место на временах  $t < t_*$  (убывает быстрее гауссовой).

Таким образом, если задача не сводится полностью к классической диффузии (т.е. если  $h < 1$ ), то дальняя асимптотика всегда супердиффузионная, независимо от того, в классическом ли или супердиффузионном режиме расширяется более близкая область. Граница между ближней и дальней асимптотиками расширяется со скоростью  $2u$ .

Отметим, что наличие средней скорости дрейфа, не связанной со статистическими свойствами флуктуаций скорости, привело к появлению новых режимов переноса по сравнению со случаем, когда средняя скорость определялась конечностью корреляционного радиуса фрактальной подсистемы [15].

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. Дыхне, А.М., И.Л. Драников, П.С. Кондратенко, Л.В. Матвеев. Супердиффузия в модели случайной адвекции // Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / Ин-т проблем безопс. развития атом. энергетики РАН; под ред. Л.А. Большова. — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 6.
2. Паташинский, А.З., В.Л. Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1975.
3. Абрикосов, А.А., Л.П. Горьков // ЖЭТФ. — 1958. — 35. — С. 1158.
4. Абрикосов, А.А., Л.П. Горьков // ЖЭТФ. — 1959. — 36. — С. 319.
5. Абрикосов, А.А., Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: ИФМЛ, 1962.
6. Татарский, В.И., М.Е. Герценштейн // ЖЭТФ. — 1963. — 44. — С. 676.
7. Финкельберг, В.М. // ЖЭТФ. — 1967. — 53. — С. 40.
8. Татарский, В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
9. Рытов, С.М., Ю.А. Крацов, В.И. Татарский. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2: Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
10. Кляцкин, В.И. Динамика стохастических систем. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
11. Кляцкин, В.И. Стохастические уравнения глазами физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
12. Кляцкин, В.И. Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
13. Лифшиц, И.М., М.И. Каганов, В.М. Цукерник // Учен. записки Харьковского ун-та. — 1950. — 2. — С. 41.
14. Дрейзин, Ю.А., А.М. Дыхне // ЖЭТФ. — 1972. — 63. — С. 242.
15. Кондратенко, П.С., Л.В. Матвеев. Стохастическая адвекция во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции // Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / ИБРАЭ РАН; под ред. Л.А. Большова. — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 20.

## IV. Аномальная диффузия в регулярно-неоднородных средах

*А. М. Дыхне, И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, А. В. Попов*

### **Введение**

На протяжении последних десятилетий изучение процессов переноса в неупорядоченных средах переживает период бурного развития (см., например, [1] и имеющиеся там ссылки). Во многом причиной служит то обстоятельство, что для большинства рассматриваемых систем характерны аномальные зависимости дисперсии мигрантов от времени, для которых степенные асимптотики имеют отличный от единицы показатель. Такие системы не могут описываться обычным уравнением переноса с регулярной и кусочно-дифференцируемой зависимостью параметров от координат, иначе говоря, они имеют стохастическую или фрактальную структуру.

В настоящей работе мы проанализируем пример очень простой системы, состоящей из двух областей с постоянными параметрами в каждой из двух составляющих ее областей, которая в чрезвычайно широком интервале времен, охватывающем много порядков, проявляет аномальные диффузионные свойства. Рассматривается классическая диффузия\* в среде, занимающей область  $I$ , которая ограничена в одном или в двух измерениях и отвечает соответственно плоскопараллельному слою толщиной  $a$  или прямому цилиндру (не обязательно круглому) с тем же значением характерного диаметра. Вторая область  $II$ , занятая окружающей средой, занимает всю остальную часть пространства. Предполагается, что коэффициент диффузии в области  $I$  существенно превосходит соответствующее значение для области  $II$ .

Применительно к переносу примеси в геологических структурах рассматриваемая модель учитывает один из принципиальных аспектов этих сред — резкий контраст в распределении свойств. В этом смысле можно говорить, что область  $I$  имитирует трещину, а область  $II$  соответствует матрице скальной породы.

---

\* В роли диффузии не обязательно выступает молекулярная диффузия. Это может быть и конвекция, и в этом случае более употребительным термином является «дисперсия».

## 1. Постановка задачи

В области  $I$  концентрация частиц  $c(\vec{r}, t)$  удовлетворяет классическому уравнению диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c. \quad (1)$$

Здесь  $D$  — коэффициент диффузии в сильно проницаемой среде. Уравнение для концентрации в области  $II$  получается из (1) заменой  $D$  на коэффициент диффузии слабо проницаемой среды  $d$ . Между коэффициентами диффузии имеется соотношение

$$D \gg d. \quad (2)$$

Как обычно, на границе двух сред непрерывными являются концентрация и нормальная компонента плотности потока. Мы полагаем, что в начальный момент все частицы сосредоточены внутри области  $I$ .

Для случая, когда область  $I$  является односвязной (одиночная трещина), мы будем рассматривать два варианта геометрии, различающиеся числом измерений  $l$ , по которым эта область ограничена (рис. 1):

$l = 1$  — плоскопараллельный слой толщины  $a$ ;

$l = 2$  — прямой цилиндр (не обязательно круглый) с площадью поперечного сечения  $S \sim a^2$ .

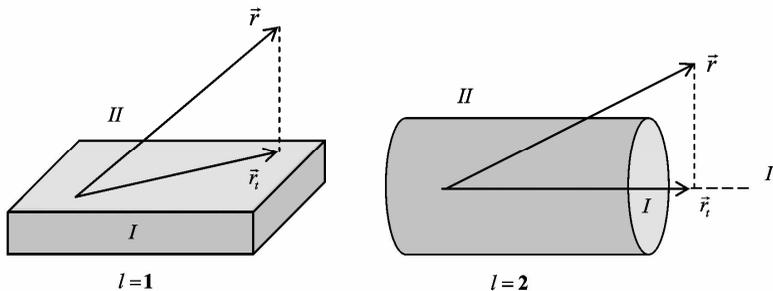


Рис. 1. Геометрия задачи

Наша задача будет состоять в том, чтобы выяснить зависимость дисперсии примеси  $P(t)$  в области  $I$  от времени. Величину  $P(t)$  определим равенством

$$P(t) \equiv \langle \bar{r}_t^2 \rangle = \left( \int_{(I)} d^3 r c(\bar{r}, t) \right)^{-1} \int_{(I)} d^3 r \bar{r}_t^2 c(\bar{r}, t). \quad (3)$$

Здесь  $\bar{r}_t$  —  $(3-l)$ -мерный радиус-вектор ( $l$  — количество направлений, по которым область  $I$  ограничена). При  $l=1$   $\bar{r}_t$  есть проекция трехмерного радиуса-вектора  $\vec{r}$  на плоскую границу раздела двух сред, а при  $l=2$  — проекция вектора  $\vec{r}$  на ось прямого цилиндра. Интегрирование в (3) происходит по области  $I$ . Здесь и далее предполагается, что начало координат выбрано так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{(I)} d^3 r \bar{r}_t c(\bar{r}, 0) = 0. \quad (4)$$

Отметим, что характер зависимости  $P(t)$  определяет режим переноса примеси. На временах, когда размер области локализации в области  $I$ ,  $R(t)$ , велик по сравнению с первоначальным размером  $R_0 = R(0)$ , имеется очевидное соотношение, вытекающее из определения дисперсии (3):

$$R(t) \sim \sqrt{P(t)}. \quad (5)$$

## 2. Качественный анализ

Так как за время  $t$  частицы в области  $I$  диффундируют на расстояние  $\sim \sqrt{4Dt}$ , то на временах  $t \ll t_0$ , где

$$t_0 = a^2 / 4D, \quad (6)$$

частицы не выходят за пределы этой области. Диффузия тогда происходит так, как если бы область  $I$  занимала все бесконечное пространство и являлась трехмерной.

На временах  $t \gg t_0$  распределение концентрации в области  $I$  становится однородным по одному (для плоскопараллельного слоя) или двум (для цилиндра) направлениям, по которым область ограничена. Если при этом длина диффузии в слабо проницаемой среде мала по сравнению с  $a$ , то есть  $t \ll t_1$ , где

$$t_1 = a^2 / 4d, \quad (7)$$

то большую часть времени частицы проводят внутри области  $I$ , так что при этом мы имеем дело с квазидвумерной при  $l=1$  или квазиодномерной при  $l=2$  диффузией. Дисперсия при этом дается известным выражением

$$P(t) = 2(3-l)Dt. \quad (8)$$

Ситуация существенно меняется на временах  $t \gg t_1$ , когда доля времени  $\tau$  из интервала  $t$ , проводимая частицей в среде  $I$ , становится меньше единицы. До тех пор пока  $P(t)$  растет главным образом благодаря диффузии в среде  $I$  (время окончания этого режима будет определено ниже), можно считать, что частицы распространяются по направлениям, вдоль которых среда  $I$  бесконечна, только в эти отрезки времени ( $\sim \tau$ ). Величину  $\tau$  по порядку величины можно оценить как отношение объемов, занятых частицами в областях  $I$  и  $II$ :

$$\tau(t) \sim (a / \sqrt{dt})^l. \quad (9)$$

Оценку для дисперсии будем искать по формуле

$$P(t) \sim D \int_{t_1}^t \tau(t') dt'. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), находим:

$$P(t) \sim D \sqrt{tt_1} \quad \text{при } l=1, \quad (11)$$

$$P(t) \sim Dt_1 \ln \frac{t}{t_1} \quad \text{при } l=2. \quad (12)$$

Эти соотношения остаются справедливыми до тех пор, пока дисперсия за счет диффузии в слабопроницаемой среде ( $\sim dt$ ) остается малой по сравнению с дисперсией в среде  $I$  (11) или (12). Приравнивание этих величин дает оценку верхних границ  $t_2$  для режимов переноса, определяемых зависимостями (11), (12):

$$t_2 \sim t_1 \left( \frac{D}{d} \right)^2 \quad \text{при } l=1, \quad (13)$$

$$t_2 \sim t_1 \frac{D}{d} \ln \frac{D}{d} \quad \text{при } l=2. \quad (14)$$

При  $t \gg t_2$  доля времени, проводимая частицами в области  $I$ , столь мала, что дисперсия определяется диффузией в слабо проницаемой среде. Тогда имеем:

$$P(t) \cong 2(3-l)dt. \quad (15)$$

## 2. Одинокая трещина. Количественный анализ

При выводе результатов, относящихся к временам  $t \gg t_0$ , когда концентрация в области  $I$  однородна по ее поперечному сечению, удобно перейти к представлению Фурье по координате  $\vec{r}_i$  и Лапласа по времени

$$c_{\vec{k}p} = \int_0^{\infty} dt \int d^{(3-l)}\vec{r}_i c(\vec{r}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}_i - pt). \quad (16)$$

Выраженная через это представление дисперсия частиц (3) имеет вид

$$P(t) = - \left[ \int_{p_* - i\infty}^{p_* + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} c_{0p} \right]^{-1} \int_{p_* - i\infty}^{p_* + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \nabla_{\vec{k}}^2 c_{\vec{k}p} \Big|_{\vec{k}=0}, \quad Re p_* > 0. \quad (17)$$

Здесь, как и в (16), концентрация частиц относится к области  $I$ .

Проинтегрировав уравнение (1) по  $l$  координатам внутри области  $I$  (по ее поперечному сечению) и перейдя в представление Фурье по координате  $\vec{r}_i$  и Лапласа по времени, придем к равенству

$$(p + Dk^2) S c_{\vec{k}p} + q_{\vec{k}p} = N. \quad (18)$$

Здесь  $N$  — полное число частиц;  $S$  — площадь поперечного сечения области  $I$  ( $S = a$  при  $l = 1$  и  $S \sim a^2$  при  $l = 2$ );  $q_{\vec{k}p}$  — компонента Фурье — Лапласа плотности потока частиц из области  $I$  в область  $II$  через границу между ними. Предполагается, что абсолютная величина вектора  $\vec{k}$  удовлетворяет неравенству

$$kR_0 \ll 1, \quad (19)$$

где  $R_0$  — размер области локализации частиц по координате  $\vec{r}_i$  в начальный момент времени.

Для того чтобы замкнуть задачу о среде  $I$ , необходимо установить связь между величинами  $q_{\vec{k}p}$  и  $c_{\vec{k}p}$ . С этой целью воспользуемся уравнением диффузии в области  $II$ , учтя граничные условия непрерывности концентрации и плотности потока. Отдельно рассмотрим случаи  $l = 1$  и  $l = 2$ .

$$l = 1$$

Уравнение диффузии в  $\vec{k}p$ -представлении для концентрации частиц в области II,  $c_{\vec{k}p}(z)$ , имеет вид

$$\left( p + dk^2 - d \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c_{\vec{k}p}(z) = 0. \quad (20)$$

Здесь  $z$  — координата по нормали к плоскопараллельному слою. Решение уравнения (20) для положительных значений координаты  $z$  имеет вид

$$c_{\vec{k}p}(z) = c_{\vec{k}p} \exp \left\{ -z \sqrt{k^2 + p/d} \right\}. \quad (21)$$

В этой формуле начало отсчета координаты  $z$  выбрано на границе между областями I и II и учтено граничное условие

$$c_{\vec{k}p}(0) = c_{\vec{k}p}. \quad (22)$$

Учитывая наличие двух равноценных частей границы ( $z = 0$  и  $z = -a$ ), для суммарной плотности потока имеем из (21):

$$q_{\vec{k}p} = -2d \left. \frac{\partial c_{\vec{k}p}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 2d \sqrt{k^2 + p/d} c_{\vec{k}p}. \quad (23)$$

Выражая с помощью этой зависимости  $q_{\vec{k}p}$  через  $c_{\vec{k}p}$  в уравнении (18), находим компоненту Фурье—Лапласа концентрации частиц в области I:

$$c_{\vec{k}p} = \frac{N/S}{p + Dk^2 + \sqrt{\frac{p + dk^2}{t_1}}}. \quad (24)$$

Здесь  $t_1$  — характерное время, определенное формулой (7).

Подстановка (24) в (17) дает

$$P(t) = 2 \left[ \int_{p_* - i\infty}^{p_* + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{1}{p + \sqrt{\frac{p}{t_1}}} \right]^{-1} \int_{p_* - i\infty}^{p_* + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{2D + \frac{d}{\sqrt{pt_1}}}{\left( p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} \right)^2}, \quad Re p_* > 0. \quad (25)$$

Отсюда после интегрирования получается выражение для дисперсии на временах, больших по сравнению с  $t_1$  :

$$\begin{aligned} P(t) &= 4Dt && \text{при } t_0 \ll t \ll t_1, \\ P(t) &= 4\left(D\sqrt{\pi t t_1} + dt\right) && \text{при } t \gg t_1. \end{aligned} \quad (26)$$

$l = 2$

В представлении Фурье—Лапласа уравнение диффузии в области II имеет вид

$$(p + dk^2 - d\Delta_{\vec{\rho}})c_{\vec{k}\vec{p}}(\vec{\rho}) = 0. \quad (27)$$

Здесь  $\vec{\rho}$  — двумерная координата в плоскости, нормальной к оси прямого цилиндра.

Фурье—Лаплас-компонента отнесенного к единице длины потока,  $q_{\vec{k}\vec{p}}$ , дается интегралом по замкнутому контуру поперечного сечения цилиндра  $U$  :

$$q_{\vec{k}\vec{p}} = -d \int_U du (\vec{s} \nabla_{\vec{\rho}}) c_{\vec{k}\vec{p}}(\vec{\rho}). \quad (28)$$

Здесь  $du$  — элемент длины контура,  $\vec{s}$  — единичный вектор внешней нормали к линии контура в плоскости поперечного сечения.

Как и при выводе формулы (26), мы будем рассматривать времена  $t \gg t_1$ . Поскольку главный вклад во встречающиеся далее интегралы обратного преобразования Лапласа дает область  $p \sim t^{-1}$ , то имеет место неравенство

$$pt_1 \ll 1. \quad (29)$$

Время  $t_1$  определено формулой (7). Поскольку  $a \sim \sqrt{S}$ , определим его для  $l = 2$  как  $a = \sqrt{S/\pi}$ . Тогда имеем

$$t_1 = \frac{S}{\pi d}. \quad (30)$$

Для дальнейшего вывода удобно ввести в плоскости поперечного сечения окружность  $O$  радиуса  $\rho_0$ , охватывающую цилиндр так, чтобы площадь соответствующего круга была минимальной. Очевидно,

$$\rho_0 \sim \sqrt{\frac{S}{\pi}}. \quad (31)$$

Проинтегрируем, далее, уравнение (27) по переменной  $\bar{\rho}$  по области между контуром поперечного сечения цилиндра и окружностью  $O$  (рис. 2).

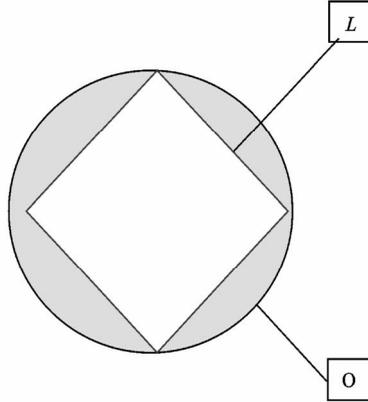


Рис. 2. Площадь интегрирования (закрашенная) уравнения (27) при выводе формулы (32)

Благодаря неравенству (29) с учетом (31) вкладом двух первых слагаемых в интеграл от уравнения (27) следует пренебречь. Тогда, используя теорему Гаусса, получим:

$$q_{\bar{k}\bar{p}} \cong -d \cdot \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left. \frac{\partial c_{\bar{k}\bar{p}}(\bar{\rho})}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}. \quad (32)$$

Функция  $c_{\bar{k}\bar{p}}(\bar{\rho})$  может быть разложена в ряд по собственным функциям уравнения (27), которые имеют вид

$$K_m \left( \rho \sqrt{k^2 + p/d} \right) \exp(\pm im\varphi).$$

Здесь  $K_m$  — функция Макдональда (см. [2]);  $\varphi$  — азимутальный угол в плоскости поперечного сечения. После подстановки ряда в интеграл (32) от него останется лишь первый член, который в силу граничного условия непрерывности концентрации имеет вид

$$c_{\bar{k}\bar{p}}^{(1)}(\bar{\rho}) = c_{\bar{k}\bar{p}} \frac{K_0 \left( \rho \sqrt{k^2 + p/d} \right)}{K_0 \left( \rho_0 \sqrt{k^2 + p/d} \right)} \quad (33)$$

с предельным видом функции Макдональда нулевого порядка [2] при малых значениях аргумента

$$K_0(u) \cong -\ln u \quad \text{при } u \ll 1.$$

После подстановки получившегося выражения в (32) находим плотность потока частиц через границу между областями I и II:

$$q_{\bar{k}p} \cong -\frac{2\pi d c_{\bar{k}p}}{\ln(\rho_0 \sqrt{k^2 + p/d})} \quad (34)$$

Здесь и далее для случая  $l = 2$  подразумевается логарифмическая точность. Иными словами, аргумент логарифма определен с точностью до численного множителя порядка единицы. Исключив величину  $q_{\bar{k}p}$  с помощью (34) из (18) и снова воспользовавшись неравенством (29), приходим к выражению для концентрации в области I:

$$c_{\bar{k}p} = \frac{N/S}{Dk^2 + \frac{4}{t_1} \ln^{-1}\left(\frac{1}{\rho_0^2 k^2 + pt_1}\right)}. \quad (35)$$

Подстановка этой формулы в (17) дает:

$$P(t) = -\frac{\int_{p_*-i\infty}^{p_*+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left\{ \frac{Dt_1}{2} \ln^2(pt_1) + \frac{2d}{p} \right\}}{\int_{p_*-i\infty}^{p_*+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \ln(pt_1)}, \quad \text{Re } p_* > 0. \quad (36)$$

Вычисление интегралов приводит к окончательному выражению для дисперсии, справедливому на больших по сравнению с  $t_1$  временах:

$$P(t) = Dt_1 \ln \frac{t}{t_1} + 2dt \quad \text{при } t \gg t_1. \quad (37)$$

В интервалах времени  $t_1 \ll t \ll t_2$  и  $t \gg t_2$ , где  $t_2$  определено в (13) и (14), формулы (26) и (36) подтверждают оценки дисперсии (11), (12), полученные качественными оценками. Сами же формулы (26) и (36) остаются справедливыми и в переходной области, т. е. при  $t \sim t_2$ .

Учитывая (5), формулам (11) и (12) можно придать еще один вид:

$$R(t) \propto t^{1/4}, \quad l=1$$

$$R(t) \propto \ln^{1/2}\left(\frac{t}{t_1}\right), \quad l=2 \quad \text{при } t_1 \ll t \ll t_2. \quad (38)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче имеет место промежуточный интервал времени  $t_1 \ll t \ll t_2$ , в котором перенос примеси является неклассическим. В обоих вариантах геометрии области  $I$  (плоскопараллельного слоя или прямого цилиндра) он соответствует субдиффузии. При  $l=1$  это степенная субдиффузия, а при  $l=2$  — логарифмическая. В этом интервале показатель в зависимости  $R(t) \propto t^\gamma$  принимает значения:

$$\gamma = 1/4 \quad \text{при } l=1,$$

$$\gamma \rightarrow 0 \quad \text{при } l=2.$$

С учетом поведения концентрации при  $t \ll t_1$  легко подобрать интерполяционные формулы, описывающие поведение дисперсии при  $t \gg t_0$ :

$$P(t) = 2\pi D t_1 \left( \sqrt{1 + \frac{4t}{\pi t_1}} - 1 \right) + 4dt \quad \text{при } l=1,$$

$$P(t) = 2D t_1 \ln\left(1 + \frac{t}{t_1}\right) + 2dt \quad \text{при } l=2. \quad (39)$$

Зависимость дисперсии от времени, описываемая формулами (39), изображена на рис. 3.

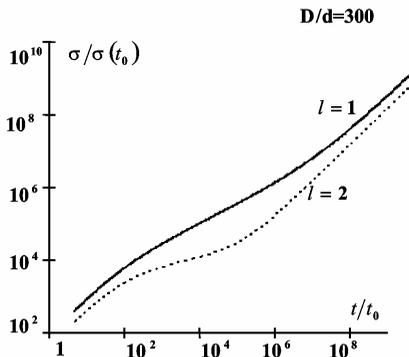


Рис. 3. Зависимость дисперсии от времени в задаче об одиночной трещине

Картина смены режимов переноса может быть еще более сложной, если область  $I$  имеет форму прямого цилиндра с сильно анизотропным сечением. Например, если сечение — прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , удовлетворяющими условию

$$a\sqrt{\frac{d}{D}} \ll b \ll a,$$

то имеют место следующие режимы:

1.  $t_0 \ll t \ll t_{1b}$  :  
 $R(t) \sim \sqrt{Dt}$  — быстрая классическая диффузия;
2.  $t_{1b} \ll t \ll t_{1a}$  :  
 $R(t) \sim (D\sqrt{tt_b})^{1/4}$  — степенная субдиффузия с  
 показателем  $\gamma=1/4$ ;
3.  $t_{1a} \ll t \ll t_{2a}$  :  
 $R(t) = \left( D\sqrt{t_a t_b} \ln \frac{t}{t_a} \right)^{1/2}$  — логарифмическая  
 субдиффузия;
4.  $t \gg t_{2a}$  :  
 $R(t) \sim \sqrt{dt}$  — медленная классическая диффузия.

Здесь использованы обозначения:

$$t_{1a} = \frac{a^2}{4d}, \quad t_{1b} = \frac{b^2}{4d}, \quad t_{2a} = t_{1a}(D/a)\ln(D/a).$$

Отметим, что в реальных ситуациях отношение коэффициентов диффузии двух сред  $D/d$  может быть достаточно большим, чтобы время  $t_2$  оказалось практически недостижимым, и тогда субдиффузия будет играть роль асимптотического режима, как это происходит в нерегулярных средах.

Отметим, что в отношении систематики режимов переноса рассматриваемая здесь модель напоминает гребешковую модель, исследовавшуюся в [3]. Однако различие между ними состоит в том, что в гребешковой мо-

дели для слабо проницаемой среды отсутствует возможность переноса в продольных направлениях (по которым сильно проницаемая среда бесконечна). Из-за этого режим переноса, отвечающий самым поздним временам, в нашей модели определяется матрицей (слабо проницаемой средой), а в гребешковой модели — нет.

### **3. Системы трещин**

В этом разделе мы рассмотрим вариант модели, в которой сильно проницаемая среда занимает многосвязную область  $I$  и соответствует периодической системе  $M$  параллельных друг другу одинаковых плоскопараллельных слоев ( $l = 1$ ) либо прямых цилиндров ( $l = 2$ ) (для краткости и те и другие будем называть трещинами). Как и ранее, толщину слоя будем обозначать  $a$ , площадь поперечного сечения цилиндра —  $S \sim a^2$ . Расстояние между трещинами  $b$  считается большим в сравнении с их поперечным размером:

$$b \gg a. \quad (40)$$

Как и прежде, будем считать, что примесь изначально сосредоточена в одной из трещин. Назовем её основной и выберем в ней начало координат, причем так, чтобы выполнялось условие (4). Дисперсия по-прежнему определена равенством (3), в котором интегрирование происходит по объему основной трещины. Анализ проведем на качественном уровне.

Оценку для дисперсии будем искать по формуле

$$P(t) \sim \int_0^t D_{ef}(t') dt', \quad (41)$$

где  $D_{ef}(t)$  — средневзвешенное значение коэффициента диффузии по области локализации примеси в момент времени  $t$ :

$$D_{ef}(t) \sim \frac{DA_I(t) + dA_{II}(t)}{A_I(t) + A_{II}(t)}. \quad (42)$$

Здесь  $D$  и  $d$  — коэффициенты диффузии, соответственно, сильно и слабо проницаемой среды.  $A_I(t)$  и  $A_{II}(t)$  — парциальные объемы, прихо-

дящиеся, соответственно, на сильно и слабопроницаемую среды в области локализации примеси на момент времени  $t$  в пространстве  $l$  измерений, по которым сильно проницаемая среда имеет ограничения.

Для рассмотренного в предыдущих разделах случая одиночной трещины при  $t \gg t_0$  имеем

$$\begin{aligned} A_I = a, \quad A_{II} \sim \sqrt{4dt} & \quad \text{при } l = 1 \\ A_I = S, \quad A_{II} \sim 4dt & \quad \text{при } l = 2 \end{aligned} \quad (M = 1). \quad (43)$$

Легко проверить, что подстановкой (43) в (42), а затем (42) в (41) получаются все результаты раздела 2 для одиночной трещины. При этом условная граница между режимами быстрой классической диффузии и субдиффузии  $t_1$  соответствует моменту, когда второе слагаемое в знаменателе формулы (42) сравнивается с первым; при этом второе слагаемое в числителе (42) остается много меньше первого. Граница же между режимами субдиффузии и медленной классической диффузии  $t_2$  соответствует моменту, когда вклад в интеграл (41), возникающий от второго слагаемого в числителе (42), сравнивается с вкладом от первого. Отметим, что из-за выполнения неравенства (40) величина  $A_{II}(t)$  определяется (43) независимо от количества трещин.

При переходе от одиночной трещины к системе трещин существенны два соображения. Первое из них: поскольку диффузия по слабопроницаемой среде между основной и ближайшей к ней трещиной занимает время

$$t_b = \frac{b^2}{4d}, \quad (44)$$

то на временах  $t \ll t_b$  присутствие всех остальных (помимо основной) трещин на переносе не сказывается. Второе соображение: в задаче об одиночной трещине на временах  $t \gg t_2$  ( $t_2$  определено формулами (13), (14)) величина дисперсии определяется исключительно слабопроницаемой средой. Сопоставляя их, приходим к выводу, что при  $t_b \gg t_2$  дисперсия частиц в задачах о системе трещин совпадает с найденной в предыдущих разделах соответствующей дисперсией в случае единственной трещины. Иначе говоря, при выполнении неравенства  $t_b \gg t_2$  присутствие всех других трещин, кроме основной, на переносе примеси не сказывается. Поэтому далее, рассматривая случай  $M \geq 2$ , будем считать, что выполняется обратное неравенство

$$t_b \ll t_2. \quad (45)$$

Начнем со случая двух трещин.

$$\underline{M = 2}$$

Заметим сразу, что благодаря (40) между характерными временами:  $t_b$  и  $t_1$  (см. (7)) справедливо неравенство

$$t_1 \ll t_b. \quad (46)$$

Поэтому при  $t \ll t_1$  перенос идет в режиме быстрой классической диффузии, а в интервале между временами  $t_1$  и  $t_b$  реализуется режим субдиффузии, соответствующий одиночной трещине:

$$P^{(2)}(t) = P(t) \quad \text{при} \quad t_1 \ll t \ll t_b. \quad (47)$$

Здесь и далее номер в верхнем индексе будет обозначать количество трещин, к которому относится рассматриваемый случай. Величины без верхнего индекса относятся к одиночной трещине. Так,  $P(t)$  есть дисперсия в задаче об одиночной трещине (см. формулы (11) и (12)).

На временах  $t \sim t_b$  в процесс переноса вовлекается вторая трещина, и дисперсия приобретает дополнительный коэффициент 2:

$$P^{(2)}(t) = 2P(t) \quad \text{при} \quad t_b \ll t \ll t_2. \quad (48)$$

На временах  $t \gg t_2$  перенос идет в режиме медленной классической диффузии с дисперсией, определенной формулой (15).

Перейдем к рассмотрению задачи о переносе в регулярно-неоднородной среде с большим количеством трещин,  $M \gg 1$ . На временах  $t \leq t_b$  помимо основной трещины в процессе переноса участвуют только соседние с ней. Поэтому качественно дисперсия ведет здесь себя так же, как на соответствующих временах в рассмотренном только что случае двух трещин. Следовательно, далее мы можем сосредоточиться на временах  $t \gg t_b$ . Анализ удобно провести отдельно для системы плоскопараллельных пластин ( $l = 1$ ) и прямых цилиндров ( $l = 2$ ).

$$M \gg 1, \quad t \gg t_b, \quad l = 1$$

Парциальный объем сильно проницаемой среды при  $t \gg t_b$  можно записать в виде

$$A_l(t) = am(t), \quad (49)$$

где  $m(t)$  — количество трещин, вовлеченных в процесс переноса к моменту  $t$ . Далее для краткости будем называть  $m(t)$  числом активных трещин. Подставляя (49) в (42), а затем (42) в (41), получаем выражение для дисперсии при  $t \gg t_b$ :

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \int \left( \frac{Dam(t')}{\sqrt{4dt'}} + d \right) dt'. \quad (50)$$

Число активных трещин дается очевидными оценками

$$m(t) \sim \frac{\sqrt{4dt}}{b} \quad \text{при } t < M^2 t_b, \quad (51)$$

$$m(t) = M \quad \text{при } t > M^2 t_b.$$

После подстановки (51) в (50) приходим к заключению о наличии трех последовательно сменяющих друг друга режимов переноса примеси. В каком режиме протекает процесс, зависит от того, какой из членов в скобках под интегралом в (50) доминирует и каким из выражений (51) определяется величина  $m(t)$ .

Первый режим реализуется, когда число активных трещин растет, оставаясь меньше максимального значения  $M$ :

$$P^{(M)}(t) \sim \left( \frac{a}{b} \right) Dt \quad \text{при } t_b \ll t \ll M^2 t_b. \quad (52)$$

Это режим ослабленной классической диффузии с эффективным коэффициентом  $D_{\text{ef}} = (a/b)D$ , удовлетворяющим неравенству

$$d \ll D_{\text{ef}} \ll D. \quad (53)$$

Второй режим протекает, когда число активных трещин достигло максимального, а вклад слабо проницаемой среды в величину дисперсии (см. второе слагаемое в скобках в (50)) по-прежнему остается пренебрежимо малым:

$$\sigma^{(M)}(t) \sim MD\sqrt{tt_1} \quad \text{при } M^2 t_b \ll t \ll M^2 t_2. \quad (54)$$

Этот режим соответствует усиленной (множитель  $M$ ) степенной субдиффузии.

Наконец третий, самый поздний режим наступает, когда вклад слабо проницаемой среды становится преобладающим:

$$P^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при} \quad t \gg M^2 t_2. \quad (55)$$

Это режим медленной классической диффузии.

$$\underline{M \gg 1, \quad t \gg t_b, \quad l = 2}$$

В связи с тем, что при  $l = 2$  теперь  $A_{II} \sim 4dt$ , формула для дисперсии (50) модифицируется следующим образом:

$$P^{(M)}(t) \sim \int_0^t \left( \frac{DSm(t')}{4dt} + d \right) dt'. \quad (56)$$

Рассмотрим отдельно две конфигурации периодической системы  $M$  параллельных друг другу цилиндрических трещин. Первая из них соответствует линейной цепочке цилиндров, когда их оси лежат в одной плоскости (рис. 4), а вторая — объемной периодической системе цилиндрических трещин (рис. 5).

### Плоская периодическая цепочка $M$ трещин



Рис. 4. Поперечное сечение плоской системы цилиндрических трещин

Число активных трещин для этой конфигурации, как и в случае  $l = 1$ , описывается (51). Подставляя (51) в (56) и действуя, как при  $l = 1$ , находим режимы переноса. Их систематика зависит от соотношения между двумя характерными временами  $t_2$  и  $Mt_b$ .

Если

$$t_2 \gg Mt_b, \quad (57)$$

реализуется три режима.

Сначала это ослабленный (множитель  $\sqrt{S}/b$ ) степенной субдиффузионный режим,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \frac{\sqrt{S}}{b} D \sqrt{tt_1} \quad \text{при } t_b \ll t \ll M^2 t_b, \quad (58)$$

затем усиленный (множитель  $M$ ) логарифмический субдиффузионный режим,

$$P^{(M)}(t) \sim MDt_1 \ln \frac{t}{t_b} \quad \text{при } M^2 t_b \ll t \ll Mt_2, \quad (59)$$

и, наконец, последним реализуется режим медленной классической диффузии,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при } t \gg Mt_2. \quad (60)$$

Если же, наоборот,

$$t_2 \ll Mt_b, \quad (61)$$

то при  $t > t_b$  режимов всего два — ослабленный степенной (субдиффузионный) и режим медленной классической диффузии:

$$P^{(M)}(t) \sim \frac{\sqrt{S}}{b} D \sqrt{tt_1} \quad \text{при } t_b \ll t \ll t_2^2/t_b. \quad (62)$$

$$P^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при } t \gg t_2^2/t_b. \quad (63)$$

### Объемная периодическая система $M$ трещин

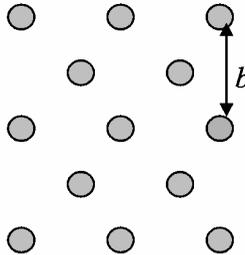


Рис. 5. Поперечное сечение объемной системы цилиндрических трещин

Число активных трещин для этой конфигурации дается оценками

$$\begin{aligned} m_i &\sim \frac{4dt}{b^2} && \text{при } t < Mt_b, \\ m_i &= M && \text{при } t > Mt_b. \end{aligned} \quad (64)$$

Поступая как в предыдущих случаях, находим три режима: ослабленная (множитель  $S/b^2$ ) классическая диффузия,

$$P^{(M)}(t) \sim \frac{S}{b^2} Dt \quad \text{при } t_b \ll t \ll Mt_b, \quad (65)$$

усиленная (множитель  $M$ ) логарифмическая субдиффузия,

$$P^{(M)}(t) \sim MDt_1 \ln\left(\frac{t}{Mt_b}\right) \quad \text{при } Mt_b \ll t \ll Mt_2, \quad (66)$$

и медленная классическая диффузия,

$$P^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при } t \gg Mt_2. \quad (67)$$

Подведем итоги рассмотрения задачи о переносе примеси в периодической системе трещин. Если расстояние между трещинами  $b$  таково, что переход к режиму медленной (определяемой свойствами матрицы) классической диффузии произойдет раньше, чем область локализации примеси достигнет соседней трещины ( $t_2 \ll t_b$ ), то перенос происходит как у одиночной трещины. В противоположном случае  $t_2 \gg t_b$  влияние трещин на перенос примеси коллективизируется, и тогда при конечном числе трещин  $M \gg 1$  в дополнение к режиму субдиффузии, который был найден для одиночной трещины, возникают дополнительные промежуточные режимы. Среди них, в зависимости от конфигурации и соотношения между параметрами задачи, могут быть ослабленная классическая диффузия и усиленная степенная или логарифмическая субдиффузия. Самым поздним режимом, как и для одиночной трещины, является медленная классическая диффузия.

Если количество трещин бесконечно ( $M \rightarrow \infty$ ), то для системы плоскопараллельных слоев и объемной системы прямых цилиндров конечным режимом становится ослабленная присутствием матрицы классическая диффузия. Для плоской же системы прямых цилиндров, как и для  $M \neq \infty$ , самым поздним режимом является медленная классическая диффузия.

## **Заключение**

Основные результаты работы состоят в следующем.

Процессы миграции примесей в системе, отвечающей среде с коэффициентом диффузии  $D$ , занимающей область, ограниченную по одному (плоскопараллельный слой) или по двум (прямой цилиндр) направлениям, и окруженной бесконечной средой с коэффициентом диффузии  $d \ll D$ , в зависимости от времени описываются принципиально различными закономерностями. На очень малых ( $t \ll t_1$ ) и очень больших ( $t \gg t_2$ ) временах происходит классическая диффузия с большим  $D$  и малым  $d$  коэффициентами диффузии соответственно. В промежуточной области ( $t_1 \ll t \ll t_2$ ) имеет место аномальный режим диффузии (субдиффузия), отвечающий корневой зависимости дисперсии от времени для плоскопараллельного слоя и логарифмическому плато для прямого цилиндра. Следует особо отметить, что при больших  $D/d$  (например,  $10^7$ ) границы этой области могут быть разнесены на много порядков, и  $t_2$  может оказаться практически недостижимо. В этом случае, подобно случаю нерегулярных сред, аномальный режим будет выступать в роли асимптотического. Задача об одиночной трещине обобщена на случай, когда сильно проникаемая среда занимает многосвязную область  $I$  и соответствует периодической системе  $M$  параллельных друг другу трещин. Если расстояние между трещинами  $b$  таково, что переход к режиму медленной классической диффузии произойдет раньше, чем область локализации примеси достигнет соседней трещины ( $t_2 \ll t_b$ ), то перенос происходит как у одиночной трещины. В противоположном случае  $t_2 \gg t_b$  влияние трещин на перенос примеси коллективизируется, и тогда при конечном  $M \gg 1$  в дополнение к режиму субдиффузии, который был найден для одиночной трещины, возникают дополнительные промежуточные режимы. Среди них, в зависимости от конфигурации и соотношения между параметрами задачи, могут быть ослабленная классическая диффузия и усиленная степенная или логарифмическая субдиффузия. Самым поздним режимом, как и для одиночной трещины, является медленная классическая диффузия. Если количество трещин бесконечно ( $M \rightarrow \infty$ ), то для системы плоскопараллельных слоев и объемной системы прямых цилиндров конечным режимом становится ослабленная присутствием матрицы классическая диффузия.

Для плоской же системы прямых цилиндров, как и для  $M \neq \infty$ , самым поздним режимом является медленная классическая диффузия.

Отметим, что задача о диффузии примеси в ограниченной по одному или двум направлениям области  $I$ , которой может быть, например, трещина в скальных породах, представляет интерес в связи с проблемой захоронения радиоактивных отходов. Экспериментальные измерения распространяющихся из хранилищ «хвостов» на порядки расходятся с теоретическими оценками, основанными на обычных диффузионных асимптотиках. Трещиноватая скальная порода есть наиболее типичное место таких хранилищ. Поэтому изучение диффузионного поведения частиц в ее «элементарной ячейке» — единичной трещине, окруженной слабопроницаемой средой, — важно для понимания процессов, приводящих к указанному расхождению, и разработки методов оценки надежности захоронений.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность *С. А. Рыбаку* за интересные и плодотворные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. *Isichenko, M.B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media // *Reviews of modern physics.* — 1992. — Vol. 64, №. 4. — P. 961–1043.
2. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. *М. Абрамовиц, И. Стиган.* — М.: Наука, 1979.
3. *Архинчев, В.Е., Э.М. Баскин.* Аномальная диффузия и дрейф в гребешковой модели перколяционных кластеров // *ЖЭТФ.* — 1991. — 100. — С. 292.

## V. Диффузия примеси по перколяционному кластеру

*А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

Моделирование диффузии примеси по перколяционному кластеру является одной из фундаментальных задач проблемы переноса в неоднородных неупорядоченных средах. Интерес к этой задаче определяется ее важностью как с теоретической, так и с практической точки зрения. В частности, геологические формации в потенциальных местах захоронения отходов отработанного ядерного топлива, как правило, характеризуются крайне неоднородной структурой, состоящей из слабопроницаемой матрицы и каналов с высокой проницаемостью. Примером могут служить трещиноватые скалы, в которых роль каналов играют заполненные водой трещины, окруженные плотной скальной породой. Исследование структуры ансамблей этих трещин показывают, что они имеют фрактальную структуру с размерностью, близкой к размерности перколяционного кластера [1].

Полученные к настоящему времени результаты исследования переноса в перколяционных средах [2–5] в основном относятся к оценкам среднеквадратичного смещения частиц примеси на больших временах  $R(t)$ . Вместе с тем во многих случаях интерес представляют более детальные характеристики распределения концентрации примеси, в частности — на расстояниях  $r \gg R(t)$  («хвосты» концентрации). Для получения таких характеристик требуется уравнение, пригодное для описания эволюции распределения концентрации во времени. Предлагаемые в литературе уравнения, на наш взгляд, не являются удовлетворительными. Они либо основаны на формализме дробных производных и не подкреплены физическим содержанием [6, 7], либо получены обобщением классического уравнения диффузии с введением зависимости от координат в коэффициенте диффузии [4, 5]. Последнее обстоятельство находится в явном противоречии с тем фактом, что представляющая интерес концентрация примесей является характеристикой, усредненной по ансамблю реализаций сильно неупорядоченной среды.

Цель настоящего сообщения состоит в выводе не обладающего отмеченными выше недостатками феноменологического уравнения переноса примеси в перколяционной среде и получении асимптотик для распределения концентрации. Сформулируем кратко существенные для нашего анализа свойства среды [2].

Главной особенностью перколяционных сред является то, что они состоят из не перекрывающихся областей (кластеров), внутри каждой из которых процессы переноса возможны, в то время как переход частиц из одного кластера в другой — невозможен. Если среда находится в состоянии выше порога перколяции, то в ней имеется бесконечный кластер, и перенос происходит без ограничения по расстоянию. В среде, находящейся до порога перколяции, существуют только конечные кластеры, и перенос на большие расстояния затруднен. Ключевая роль в описании перколяционных систем принадлежит корреляционной длине  $\xi$ . Для среды, находящейся в состоянии ниже перколяционного порога, распределение кластеров по размерам  $l$  соответствует области  $l < \xi$ , количество кластеров с размерами  $l \gg \xi$  экспоненциально мало. При подходе к порогу перколяции корреляционная длина неограниченно возрастает,  $\xi \rightarrow \infty$ . Выше порога перколяции корреляционная длина становится опять конечной. При этом распределение конечных кластеров обладает теми же свойствами, что и до порога. Что же касается бесконечного кластера, то на пространственных масштабах  $L < \xi$  он обладает фрактальными свойствами и является масштабно инвариантным, а на масштабах  $L \gg \xi$  он становится статистически однородным. Важная топологическая особенность любого кластера состоит в том, что его можно разбить на две подобласти: «позвоночный хребет» («backbone» —  $bb$ ) и множество «мертвых концов» («dead ends» —  $de$ ), так что  $bb$  связывает удаленные друг от друга части кластера, а  $de$  соединяются с  $bb$ , каждый в одном месте, оставаясь изолированными между собой. Существенно, что фрактальная размерность подобласти  $de$  больше размерности  $bb$ . Далее частицы примеси, находящиеся в  $bb$ , мы будем называть активными. Полное число активных частиц со временем убывает за счет ухода в  $de$ , а также локализации в кластерах малых размеров. С учетом сказанного уравнение для концентрации активных частиц, усредненной по ансамблю реализаций среды, запишем в следующем виде

$$\frac{\partial c(\vec{r}, t)}{\partial t} + Q + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$j_i(r, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^3 r' f_{ij}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \frac{\partial c(r', t')}{\partial r'_j} \quad (2)$$

— поток частиц, связанный с переносом по  $bb$ . По сравнению с обычным уравнением переноса, выражающим закон сохранения полного числа частиц

$N(t) \equiv \int d^3r c(\vec{r}, t)$ , в уравнении (1) содержится дополнительное слабое, описывающее уход частиц в  $de$ , а также локализацию их в кластерах меньших размеров:

$$Q = \int_{-\infty}^t dt' \varphi(t-t') c(\vec{r}, t'). \quad (3)$$

Ядро  $f_{ij}(\vec{r}, t)$  в соотношении (2) определяет физический механизм переноса частиц. В этой работе мы будем считать ядро короткодействующим, имея в виду перенос за счет блуждания с ограниченным размером одного шага. Соответственно, для описания процессов переноса на масштабах больше указанного шага уравнение (1) с учетом выражения (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial c(\vec{r}, t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^t dt' \varphi(t-t') c(\vec{r}, t') = D\Delta c. \quad (4)$$

Проанализируем структуру интегрального ядра  $\varphi(t)$ . Перколяционная система, обладая фрактальными свойствами, является самоподобной в пространственном интервале масштабов  $\xi_0 \ll l \ll \xi$ , где  $\xi_0$  определяет ближний радиус корреляции. Отсюда следует существование временного интервала  $\tau_0 \ll t \ll \tau$ , в котором функция ядра  $\varphi(t)$  также является самоподобной, и может быть записана в виде

$$\varphi(t) \sim -\frac{1}{\tau_0^2} \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^{1+\alpha}. \quad (5)$$

Знак «минус» в формуле (5) «-» будет обоснован ниже. Показатель степени  $\alpha$  заключен в интервале  $0 < \alpha < 1$ . Левая граница интервала вытекает из требования сходимости интеграла от функции  $\varphi(t)$  на больших временах, а правая — из условия, чтобы вклад стока в (4) при  $\tau_0 \ll t \ll \tau$  был определяющим, по сравнению с производной по вре-

мени. Из сравнения различных членов в (4) следует  $\varphi(\tau_0)\tau_0 \sim D/\xi_0^2$  и  $\varphi(\tau)\tau \sim D/\xi^2$ , откуда для  $\tau_0$  и  $\tau$  имеем:

$$\tau_0 \sim \xi_0^2/D, \quad \tau \sim \tau_0 \left(\xi/\xi_0\right)^{\frac{2}{\alpha}}.$$

За пределами интервала фрактальности на больших временах,  $t \gg \tau$ , функция  $\varphi(t)$  (аналогично пространственным корреляциям при  $r \gg \xi_0$ ) убывает достаточно быстро, так что существуют все ее степенные моменты по времени. Мы также считаем, что на малых временах  $t < \tau_0$  вклад второго члена в (4) не превосходит вклада первого:

$$\varphi(t) \sim 1/\tau_0^2 \quad \text{при} \quad t \lesssim \tau_0.$$

Следует подчеркнуть, что поскольку (4) получено путем усреднения по ансамблю реализаций среды, оно справедливо на пространственных масштабах больше  $\xi_0$ .

Исходя из установленных свойств функции  $\varphi(t)$ , находим ее образ Лапласа  $\varphi_s$ . В диапазоне лапласовской переменной  $\tau^{-1} \ll s \ll \tau_0^{-1}$ :

$$\varphi_s \cong \frac{1}{\tau_0} (s\tau_0)^\alpha. \quad (6)$$

При малых  $s < \tau^{-1}$  функция  $\varphi_s$  разлагается в ряд по целым степеням величины  $s\tau$ . Это свойство  $\varphi_s$  совместно с соотношением (6) позволяет сделать вывод, что  $\varphi_s$  имеет точку ветвления в комплексной плоскости  $s_1 = -\tau^{-1}$  (что можно рассматривать как определение  $\tau$ ), и значения  $\varphi_s$  при  $s = 0$  и  $s = s_1$  одного порядка (если нет специальных условий) и для них справедлива оценка:

$$\varphi_0 \lesssim \varphi_{s_1} \sim \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^\alpha. \quad (7)$$

Исследуем на основе сформулированной модели поведение концентрации активных частиц примеси в зависимости от координат и времени. Для оп-

ределенности будем иметь в виду задачу с начальным условием, считая, что при  $t = 0$  все частицы сосредоточены в начале координат, выбор которого произволен ввиду трансляционной инвариантности постановки задачи о концентрации, усредненной по ансамблю реализаций;  $c(\vec{r}, 0) = N_0 \delta(\vec{r})$ . Решение уравнения (4) имеет вид:

$$c(\vec{r}, t) = \frac{N_0}{4\pi D r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{2\pi i} \exp\left(-\left(\frac{\Phi_s + s}{D}\right)^{1/2} r + st\right). \quad (8)$$

Рассмотрим следствия, вытекающие из этого выражения. На временах  $t \ll \tau_0$  оно сводится к решению классического уравнения диффузии, в котором  $Q = 0$  и соответственно  $\varphi = 0$ .

Перейдем к интервалу времени  $\tau_0 \ll t \ll \tau$ . Интегрированием выражения (8) по всему пространству получаем полное число активных частиц в зависимости от времени

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \Gamma(\alpha) \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{1-\alpha}. \quad (9)$$

Отметим, что положительный знак справа здесь обусловлен знаком «минус» в формуле (5), что и является доказательством правильности выбора этого знака. Концентрация активных частиц при  $\tau_0 \ll t \ll \tau$  и дополнительном условии  $1 \ll r/\xi_0 \ll t/\tau_0$ , согласно (8), имеет общую структуру:

$$c(\vec{r}, t) = \frac{1}{\xi_0^3} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{\frac{2+\alpha}{2}} F(\eta), \quad \eta \equiv \frac{r^2}{4Dt} \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{1-\alpha}. \quad (10)$$

Функция  $F(\eta)$  быстро убывает при  $\eta > 1$ . Отсюда следует, что среднее смещение частиц примеси за время  $t$  имеет оценку

$$R(t) \sim \xi_0 \left(t/\tau_0\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (11)$$

свидетельствующую о том, что ввиду неравенства  $0 < \alpha < 1$  перенос примеси в рассматриваемой модели отвечает режиму субдиффузии.

Концентрация активных частиц на малых расстояниях равна

$$c(\vec{r}, t) \cong \frac{\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2}\right) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{4\pi^2} \frac{1}{\xi_0^3} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{2+\alpha} \quad \text{при } \eta \ll 1. \quad (12)$$

Отметим, что это выражение, как следует из (9) и (11), удовлетворяет очевидному соотношению  $c(0, t) \sim N(t)/R^3(t)$ .

Концентрация на далеких расстояниях (в «хвосте») дается формулой

$$c(\vec{r}, t) \cong \frac{N_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\alpha^{1-\alpha}}{\sqrt{2-\alpha}} \eta^{-\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{2-\alpha}{\alpha} (\alpha^2 \eta)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right\}, \quad \eta \gg 1. \quad (13)$$

Данное выражение описывает поведение концентрации вплоть до расстояний  $r \sim \xi_0 t / \tau_0$ . На еще больших расстояниях — таких, что  $r / \xi_0 \gg t / \tau_0$ , выражение (13) перестает быть справедливым, поскольку динамика системы описывается гармониками с волновыми векторами  $k > \xi_0^{-1}$ , для которых модель (1–7) неприменима. На этих расстояниях для концентрации можно указать только мажорирующее выражение:

$$c(\vec{r}, t) < \frac{N_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \frac{\alpha}{\sqrt{2-\alpha}} \exp\left\{-\frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{t}{\tau_0}\right\}. \quad (14)$$

Поведение концентрации на временах  $t \gg \tau$  зависит от того, является ли перколяционная система до- или запороговой. В допороговом состоянии имеет место асимптотика

$$c(\vec{r}, t) \sim \frac{N_0}{\xi_0^3} \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1+\alpha} \exp\left(-\frac{r}{\xi} - \frac{t}{\tau}\right).$$

При ее получении было учтено, что, согласно (7), функция  $\phi$  имеет точку ветвления при  $s \sim -\tau^{-1}$  и оценку  $\phi_0 \sim \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^\alpha$ .

Для переноса примеси в системах, находящихся выше порога перколяции, активная концентрация разбивается на две части  $c(\vec{r}, t) = c_f(\vec{r}, t) + c_\infty(\vec{r}, t)$ . Первая из них, начальные условия для которой определяются соотношением  $c_f(\vec{r}, 0) = c(\vec{r}, 0)(1 - P_\infty)$ , отвечает примесям, принадлежащим конечным кластерам, вторая, для которой  $c_\infty(r, 0) = c(r, 0)P_\infty$  — бесконечному кластеру. Поведение концентрации  $c_f(\vec{r}, t)$  совпадает с уже рассмотренным поведением для допороговых состояний. К этим же закономерностям сводится и поведение концентрации  $c_\infty(\vec{r}, t)$  при  $t < \tau$ , с той лишь разницей, что индекс  $\alpha$  в (6), хотя и удовлетворяет неравенству  $0 < \alpha < 1$ , отличается теперь от прежнего значения [8, 9].

Кардинальное отличие поведения концентрации  $c_\infty(\vec{r}, t)$  на временах  $t > \tau$  связано с тем, что для бесконечного кластера имеет место равенство  $\varphi_0 = 0$ . Оно вытекает из того факта, что при  $t \rightarrow \infty$  количество активных частиц на бесконечном кластере стремится к конечному пределу. В самом деле, из уравнения  $\frac{\partial N_\infty}{\partial t} + \int_0^t dt' \varphi(t-t') N_\infty(t') = 0$ , получающегося из (4) интегрированием по всему пространству, в силу того, что  $N_\infty(\infty) \neq 0$  и  $\frac{\partial N_\infty(\infty)}{\partial t} = 0$ , получаем  $\int_0^\infty dt \varphi(t) \equiv \varphi_0 = 0$ . По этой причине в области  $s \ll \tau^{-1}$  главным членом разложения функции  $\varphi_s$  является  $\varphi_s \equiv As$ , где  $A \sim (\tau/\tau_0)^{1-\alpha} \gg 1$ . Из этого обстоятельства вытекает два важных следствия. Первое это то, что при  $t \gg \tau$  концентрация  $c_\infty(\vec{r}, t)$  удовлетворяет классическому уравнению диффузии с перенормированным коэффициентом диффузии

$$\tilde{D} = \frac{D}{A}. \quad (15)$$

Второе следствие дает отношение величин концентрации при  $t \rightarrow \infty$  и  $t = 0$ :

$$N_\infty(\infty) = \frac{N_\infty(0)}{A}. \quad (16)$$

Поведение концентрации на бесконечном кластере при  $t \gg \tau$  в «хвосте» имеет следующий вид. Сначала при  $\sqrt{\tilde{D}t} \ll r \ll \xi(t/\tau)$  идет гауссова асимптотика с перенормированным коэффициентом диффузии  $\tilde{D}$  и числом частиц, уменьшенным в  $A$  раз, а за ней следует субдиффузионная асимптотика типа (13) с указанными ограничениями (14).

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. Bonnet, E., O. Bour, N.E. Odling, P. Davy, I. Main, P. Cowie, B. Berkowitz // *Reviews of Geophysics*. — 2001. — 39. — P. 347.
2. Isichenko, M.B. // *Rev. Mod. Phys.* — 1992. — 64. — P. 961.
3. Sahimi, M. // *Ibid.* — 1993. — 65. — P. 1393.
4. O'Shaughnessy, B. and I. Procaccia // *Phys. Rev. Lett.* — 1985. — 54. — P. 455.
5. Mendez, V., D. Campos, J. Fort // *Phys. Rev. E.* — 2004. — 69. — P. 016613.
6. Giona, M. and H.E. Roman // *Physica A.* — 1995. — 185. — P. 87.
7. Compte, A. // *Phys. Rev. E.* — 1996. — 53. — P. 4191.
8. Gefen, Y., A. Aharony // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — 50. — P. 77.
9. Harris, A., Y. Meir, A. Aharony // *Phys. Rev. B.* — 1987. — 36. — P. 8752.

## VI. Режимы переноса и хвосты концентрации в регулярно-неоднородных сильно контрастных средах

*П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

### **Введение**

Адекватное моделирование переноса примесей в неоднородных сильно контрастных средах является важным этапом в решении проблемы надежности захоронения радиоактивных отходов. Реальные геологические формации являются совокупностью областей, транспортные характеристики которых меняются в широком диапазоне [1]. Так, в трещиноватых скальных породах перенос по насыщенным влагой трещинам может происходить со скоростью, на порядки превышающей скорость переноса по плотной скальной матрице. Исследование пространственного распределения трещин показывает, что оно может быть почти регулярным (например, одиночные трещины), статистически однородным либо фрактальным [2]. В зависимости от этого перенос примесей может происходить в различных режимах — как по закону классической, так и субдиффузии. Полученные в рамках различных моделей результаты в основном состоят в определении дисперсии примеси (или зависимости размера облака от времени  $R(t)$ ) и пространственно-временного распределения концентрации на размерах  $r \sim R(t)$  (в области диффузионного фронта) [3]. Что касается больших расстояний  $r \gg R(t)$  (хвостов концентрационного профиля), то обычно полагают, что здесь распределение концентрации определяется единственной автомодельной переменной, соответствующей режиму переноса  $\eta = r/R(t)$  [4]. Поскольку детальное описание в этой области может оказаться важным (особенно когда речь идет о радиоактивном загрязнении окружающей среды), данный вопрос нуждается в тщательном исследовании.

В настоящей работе нами исследуется модель переноса в регулярно-неоднородной среде, состоящей из двух макроскопических областей с сильно отличающимися коэффициентами диффузии: из области с высокой проницаемостью, ограниченной в одном либо двух направлениях (ниже

мы обозначаем эту область символом  $I$  и оставшейся части пространства (область  $II$ ), заполненной средой с низкой проницаемостью. Такая постановка моделирует диффузию примеси по заполненной влагой трещине, окруженной плотной, но также проницаемой матрицей. Ранее [5] были проанализированы возможные режимы переноса в такой системе. Целью настоящей работы является детальное исследование пространственно-временных характеристик профиля концентрации. Специальное внимание уделено анализу асимптотического поведения концентрации в хвостах.

## 1. Постановка проблемы

В области  $I$  концентрация частиц примеси удовлетворяет классическому уравнению диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n. \quad (1)$$

Ниже мы будем называть  $n(\vec{r}, t)$  концентрацией активных частиц примеси.

Уравнение для концентрации частиц в среде  $II$   $c(\vec{r}, t)$  получается из (1) с помощью замен  $n \rightarrow c$ ,  $D \rightarrow d$ , причем для коэффициентов диффузии справедливо неравенство:

$$D \gg d. \quad (2)$$

Как обычно, граничные условия заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока частиц.

Мы рассмотрим две геометрические конфигурации среды  $I$ , отличающиеся числом измерений  $l$ , в которых эта область ограничена: 1)  $l = 1$  плоскопараллельный слой толщины  $a$  (рис. 1, а) и 2)  $l = 2$  прямой цилиндр, (не обязательно круглого сечения) с площадью сечения  $S \sim a^2$  (рис. 1, б).

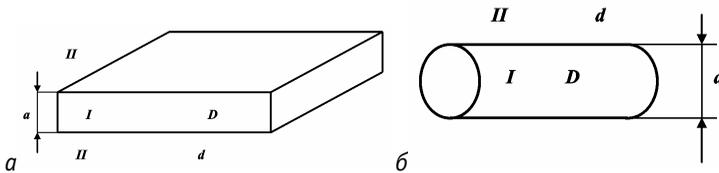


Рис. 1. Геометрия задачи,  
 $a$  — плоскопараллельный слой; б — прямой цилиндр

Будем считать, что в начальный момент времени  $t = 0$  частицы сосредоточены в среде  $I$ , занимая объем размером  $R(0) < a$ , и рассмотрим поведение концентрации  $n(\vec{r}, t)$  на временах  $t \gg t_0$  ( $t_0 = a^2 / 4D$ ), когда распределение частиц в среде  $I$  однородно по координатам  $l$ , вдоль которых она ограничена.

Проинтегрировав уравнение (1) по  $l$  координатам внутри среды  $I$  и выполнив преобразование Фурье по остальным координатам, а также преобразование Лапласа по времени, приходим к алгебраическому уравнению:

$$(s + Dk^2)n_{s\vec{k}} + \frac{q_{s\vec{k}}}{S_l} = \frac{N_0}{S_l}. \quad (3)$$

Здесь

$$n_{s,\vec{k}} = \int_0^\infty dt \int d^{3-l}x \exp(-st - i\vec{k}\vec{x}) n(\vec{r}, t), \quad (4)$$

$q_{s\vec{k}}$  — Фурье—Лаплас-образ плотности потока частиц через границу, отнесенной к единице ее площади для  $l = 1$  и к единице длины для  $l = 2$ ;  $\vec{x}$  и  $\vec{k}$  —  $(3-l)$ -мерные радиус-вектор и волновой вектор соответственно;  $N_0 = N(0)$ , где  $N(t)$  — полное число активных частиц (частиц, локализованных в среде  $I$ );  $S_1 = a$ ,  $S_2 = S$ . При выводе (3) полагалось, что выполнено неравенство

$$kR(0) \ll 1, \quad (5)$$

а начало координат находится внутри объема первоначальной локализации примеси.

Поскольку рассматриваемая задача линейна, связь между величинами  $q_{s\vec{k}}$  и  $n_{s\vec{k}}$  должна быть также линейна:

$$q_{s\vec{k}} = S_l M(s, \vec{k}) n_{s\vec{k}}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), разрешая получающееся соотношение относительно  $n_{s\vec{k}}$  и выполняя обратные преобразования Фурье и Лапласа, приходим к общему выражению для концентрации активных частиц:

$$n(\vec{r}, t) = \frac{N_0}{S_l} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \int \frac{d^{3-l}k}{(2\pi)^{3-l}} \times \frac{1}{s + Dk^2 + M(s, \vec{k})} \exp(i\vec{k}\vec{x} + st), \quad \text{Re}b > 0. \quad (7)$$

Интегрирование этого выражения по  $(3-l)$ -мерному радиус-вектору и умножение его на  $S_l$  дает полное число активных частиц

$$N(t) = N_0 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{st}}{s + M(s, 0)}. \quad (8)$$

## 2. Случай плоскопараллельного слоя $l = 1$

Обозначим  $y$  координату вдоль нормали к плоской границе. Решение уравнения (1) с указанными заменами приводит к следующему выражению для концентрации частиц в среде II при  $t \gg t_0$ :

$$c_{s\vec{k}}(y) = n_{s\vec{k}} \exp\left\{-y\sqrt{\frac{s + dk^2}{d}}\right\}, \quad y > 0. \quad (9)$$

Из соотношения

$$q_{s\vec{k}} = -2d \frac{dc_{s\vec{k}}}{dy} \Big|_{y=+0}$$

и равенства (9) следует выражение для плотности потока частиц через границу (I-II). Сравнивая результат с выражением (6), получаем

$$M(s, \vec{k}) = \sqrt{\frac{s + dk^2}{t_1}}, \quad (10)$$

где

$$t_1 = \frac{a^2}{4d} \quad (11)$$

есть характерное время диффузии частиц в среду II на расстояние  $\sim a$ . Подстановка (10) в (7) и (8) дает

$$n(\vec{r}, t) = \frac{N_0}{a} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\exp(i\vec{k}\vec{x} + st)}{s + Dk^2 + \sqrt{\frac{s + dk^2}{t_1}}}, \quad (12)$$

$$N(t) = N_0 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{st}}{s + \sqrt{\frac{s}{t_1}}}. \quad (13)$$

Для дальнейшего анализа мы воспользуемся двумя довольно очевидными утверждениями. Первое касается интервалов интегрирования в (12) по переменной  $k$  при фиксированном значении  $s$ . Они удовлетворяют неравенствам

$$dk^2 \ll s \quad \text{при} \quad s \gg t_2^{-1} \quad (14)$$

и

$$s + Dk^2 \ll \sqrt{\frac{s + dk^2}{t_1}} \quad \text{при} \quad s \ll t_2^{-1}, \quad (15)$$

где

$$t_2 = t_1 \left( \frac{D}{d} \right)^2. \quad (16)$$

Второе утверждение состоит в том, что интервалы интегрирования по переменной  $s$  в уравнениях (12), (13) есть

$$s \lesssim t^{-1} \quad \text{в (13) и (12) при } x \lesssim R(t), \quad (17)$$

$$s \gg t^{-1} \quad \text{в (12) при } x \gg R(t). \quad (18)$$

Теперь рассмотрим поведение концентрации активных частиц на временах  $t \ll t_2$ . С учетом соотношений (14–18) из (12) получаем

$$n(\vec{r}, t) \cong \frac{N_0}{2\pi a D} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} K_0 \left( x \sqrt{\frac{s + \sqrt{s/t_1}}{D}} \right), \quad t \ll t_2. \quad (19)$$

Здесь  $K_0(z)$  есть функция Макдональда,  $x = |\vec{x}|$ .

Для значений  $s \gg t_1^{-1}$  членом  $\sqrt{s/t_1}$  в аргументе (19) можно пренебречь. Тогда после выполнения интегрирования приходим к выражению

$$n(\vec{r}, t) \cong \frac{N_0}{4\pi a D t} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad t_0 \ll t \ll t_1, \quad (20)$$

которое соответствует очевидному факту, что на временах  $t_0 \ll t \ll t_1$  перенос примеси в среде  $I$  происходит в режиме быстрой (с коэффициентом  $D$ ) двумерной классической диффузии. На рис. 2, а схематически изображено сечение облака примеси по нормали к границе слоя.

Рассмотрим поведение концентрации на временах  $t_1 \ll t \ll t_2$ . Согласно (17), аргумент функции  $K_0$  в (19) в области основного облака частиц ( $x \lesssim R(t)$ ) аппроксимируется выражением  $x(s/D^2 t_1)^{1/4}$ . Поэтому имеем

$$n(\vec{r}, t) = \frac{N_0}{8\pi a D t} F(\eta), \quad \eta = \frac{x^2}{4D\sqrt{t t_1}} \quad \text{при} \quad \eta \lesssim 1, \quad (21)$$

где

$$F(\eta) = 4 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{du}{2\pi i} e^u K_0(2\eta^{1/2} u^{1/4}). \quad (22)$$

Так как  $K_0(z) \cong -\ln z$  при  $|z| \ll 1$ , из (22) находим  $F(0) = 1$ . В результате из (21) следует

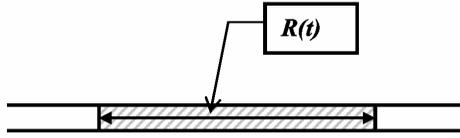
$$n(0, t) = \frac{N_0}{8\pi a D t}. \quad (23)$$

Из выражений (21) и (22) вытекает оценка для размера основного облака частиц примеси:

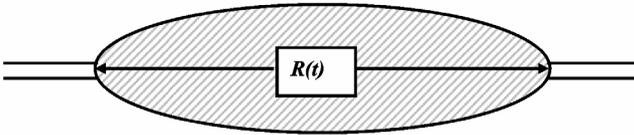
$$R(t) \sim (4D\sqrt{t t_1})^{1/2} \quad \text{при} \quad t_1 \ll t \ll t_2, \quad (24)$$

указывающая на субдиффузионный режим переноса в этом временном диапазоне. Отметим, что (24) совпадает со среднеквадратичным смещением частиц, полученном в [5]. Причиной появления субдиффузионного режима является то, что в среде  $I$ , где происходит основной перенос частиц примеси, последние проводят лишь часть времени  $\sim a/\sqrt{dt}$  (рис. 2, б).

а.  $t_0 \ll t \ll t_1$



б.  $t_1 \ll t \ll t_2$



в.  $t \gg t_2$

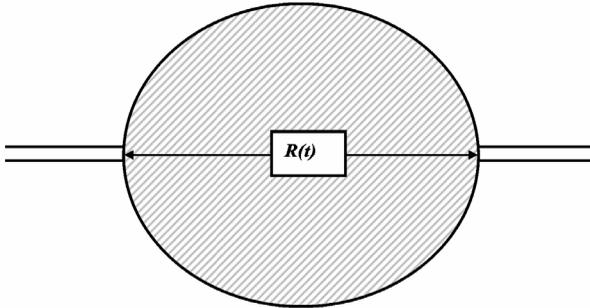


Рис. 2. Сечение облака примеси по нормали к плоскости слоя ( $l=1$ ) либо вдоль оси цилиндра ( $l=2$ ) для разных интервалов времени:  
 а — быстрая классическая диффузия; б — субдиффузия;  
 в — медленная классическая диффузия

Выражение для концентрации в пределе  $x \gg R(t)$  при  $t_1 \ll t \ll t_2$  находится из (19) путем использования соотношения  $K_0(z)|_{z \gg 1} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$ . Применяя далее метод стационарной фазы, получаем следующие асимптотические выражения

$$n(r,t) \cong \frac{N_0}{2\sqrt{6}\pi aDt} \exp\left\{-3\left(\frac{\eta}{4}\right)^{2/3}\right\},$$

$$1 \ll \eta \ll 4\left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2},$$
(25)

и

$$n(r,t) \cong \frac{N_0}{4\pi aDt} \exp\left\{-\eta\sqrt{\frac{t_1}{t}}\right\} = \frac{N_0}{4\pi aDt} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\},$$

$$\eta \gg 4\left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}.$$
(26)

Таким образом, видно, что при  $t_1 \ll t \ll t_2$  асимптотика профиля концентрации на больших расстояниях состоит из двух частей. При этом более удаленная часть (26) совпадает с выражением для концентрации на малых временах (20).

Перейдем теперь к анализу поведения концентрации на больших временах  $t \gg t_2$ . Согласно (15) и (17), на этих временах при  $x \lesssim R(t)$  последний член в знаменателе выражения (12) оказывается доминирующим. Тогда из (12) следует выражение:

$$n(r,t) = \frac{N_0}{4\pi a d t} \sqrt{\frac{t_1}{\pi t}} \exp(-\xi) \cong \frac{N_0}{(4\pi d t)^{3/2}} \exp(-\xi),$$

$$\xi = \frac{x^2}{4dt} \quad \xi \lesssim 1,$$
(27)

что соответствует режиму медленной (с коэффициентом диффузии  $d$ ) классической трехмерной диффузии (см. рис. 2, в).

Характерные значения переменной Лапласа, приводящие к выражению (27), имеют порядок  $\xi/t$ . Поэтому формула (27) справедлива при  $\xi \ll t/t_2$ , и наряду с основным облаком описывает также и ближнюю часть хвоста концентрации при условии  $1 \ll \xi \ll t/t_2$ . Если  $\xi \gg t/t_2$  при  $t \gg t_2$ , то в соответствии с (14) под корнем в знаменателе (12) следует пренебречь слагаемым  $dk^2$ . В результате мы возвращаемся к

выражениям (25) и (26), в которых должна быть сделана следующая подстановка:

$$\eta = \xi \sqrt{\frac{t}{t_2}}. \quad (28)$$

Таким образом, хвост концентрации на временах  $t \gg t_2$  состоит из трех различных по структуре частей, описываемых выражениями (27), (25) и (26).

Отсюда следует, что чем дальше от источника расположена рассматриваемая часть хвоста, тем более ранний по времени режим переноса определяет ее форму.

Рассмотрим зависимость от времени полного числа частиц. Для нее из (13) следуют простые выражения в двух предельных случаях:

$$\begin{aligned} N(t) &\cong N_0, & t \ll t_1; \\ N(t) &\cong N_0 \sqrt{\frac{t_1}{\pi t}}, & t \gg t_1. \end{aligned} \quad (29)$$

В завершении раздела оценим величину  $\Delta$  — глубину проникновения частиц в среду II. Из формулы (9) следует, что  $\Delta \sim \sqrt{d/s_*}$ , где  $s_*$  есть характерная величина переменной  $s$ , дающая основной вклад при обратном преобразовании Лапласа. Из (17) и (18) следует, что  $s_* \sim t^{-1}$  в области переменной  $\bar{x}$ , соответствующей основному облаку частиц в среде I, и  $s_* \sim |\Gamma| t^{-1}$  для значений  $\bar{x}$  в хвостах профиля концентрации. Здесь  $\Gamma$  есть показатель экспоненты определяющей концентрацию в области  $x \gg R(t)$ . Например, при  $t_1 \ll t \ll t_2$  из (25) следует, что

$$|\Gamma| = 3 \left( \frac{\eta}{4} \right)^{2/3} \quad \text{в интервале } 1 \ll \eta \ll 4 \left( \frac{t}{t_1} \right)^{3/2}, \quad \text{а из (26) } |\Gamma| = \eta \sqrt{\frac{t_1}{t}} \quad \text{в интервале } \eta \gg 4 \left( \frac{t}{t_1} \right)^{3/2}.$$

Поэтому мы имеем следующие оценки для глубины проникновения:

$$\Delta \sim \sqrt{dt} \quad x \lesssim R(t), \quad (30)$$

$$\Delta \sim \sqrt{\frac{dt}{\Gamma}} \quad x \gg R(t). \quad (31)$$

### 3. Случай прямого цилиндра $l = 2$

Определяя времена  $t_0$  и  $t_1$  для случая  $l = 2$  как

$$t_0 = \frac{S}{4\pi D}, \quad t_1 = \frac{S}{4\pi d}, \quad (32)$$

замечаем, что в интервале  $t_0 \ll t \ll t_1$  концентрация в среде II имеет вид (9) и, аналогично (20) и первой строчке (29), для частиц в среде I получаем следующие выражения

$$n(x, t) \cong \frac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad t_0 \ll t \ll t_1, \quad (33)$$

$$N(t) \cong N_0,$$

которые соответствуют быстрой одномерной классической диффузии. Переменная  $x$  в первом соотношении (33) есть координата вдоль оси цилиндра.

При значениях переменной Лапласа  $s \ll t_1^{-1}$  и радиальной координаты  $\rho \gg \sqrt{S/\pi}$  концентрация в среде II описывается выражением

$$c_{s\vec{k}}(\rho) = 2n_{s\vec{k}} \frac{K_0\left(\rho\sqrt{\frac{s+dk^2}{d}}\right)}{\ln\left(\frac{H}{(s+dk^2)t_1}\right)}. \quad (34)$$

Здесь  $H \sim 1$  зависит от формы сечения цилиндра. Действуя, как и при выводе (12), мы приходим к общему выражению для концентрации и полного числа активных частиц для  $l = 2$  при  $t \gg t_1$ :

$$n(x, t) = \frac{N_0}{S} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\exp(ikx + st)}{s + Dk^2 + \left[ t_1 \ln \left( \frac{H}{(s + dk^2)t_1} \right) \right]^{-1}}. \quad (35)$$

$$N(t) \equiv N_0 t_1 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \ln \left( \frac{H}{st_1} \right) = N_0 \frac{t_1}{t}. \quad (36)$$

Как и в п. 2, для анализа (35) важны неравенства (14–18), но с двумя оговорками. Теперь величина  $t_2$  определяется как

$$t_2 = t_1 \frac{D}{d} \ln \left( \frac{D}{d} \right), \quad (37)$$

а соотношение (15) следует заменить на

$$s + Dk^2 \ll \frac{1}{t_1 \ln \left( \frac{H}{st_1} \right)} \quad \text{при} \quad s \ll t_2^{-1}. \quad (38)$$

Рассмотрим концентрацию частиц на временах  $t \ll t_2$ . Пренебрегая величиной  $dk^2$  в подынтегральном выражении (35) и выполняя интегрирование по  $k, s$ , получаем

$$n(x, t) = \frac{N_0}{S} \frac{t_1}{4t \sqrt{Dt_1 \ln(t/t_1)}} (1 + \zeta) \exp(-\zeta) \quad , \quad \zeta \ll \frac{t}{t_1}. \quad (39)$$

$$\zeta \equiv \frac{|x|}{\sqrt{Dt_1 \ln(t/t_1)}}$$

Отсюда следует выражение для размера облака частиц

$$R(t) \sim \sqrt{Dt_1 \ln(t/t_1)} \quad \text{при} \quad t_1 \ll t \ll t_2, \quad (40)$$

которое согласуется с выражением для дисперсии частиц, найденны в [5].

Отметим, что формула (40) определяет концентрацию частиц не только в основном облаке, но и в ближней части хвоста концентрации, когда  $1 \ll \zeta \ll 2t/t_1$ . Удаленная часть хвоста, соответствующая  $\zeta \gg 2t/t_1$ , как

и в случае  $l = 1$  (см. выражение (26)), описывается формулой (33). Таким образом, в случае прямого цилиндра дальняя асимптотика профиля концентрации при  $t_1 \ll t \ll t_2$ , так же как и в случае плоскопараллельного слоя, состоит из двух частей.

На больших временах, когда  $t \gg t_2$ , в знаменателе (35) последнее слагаемое преобладает над первыми двумя, и после интегрирования мы приходим к формуле (27), описывающей концентрацию частиц в основном облаке и ближней части хвоста при условии

$$\xi \equiv (x^2 / 4dt) \ll t / t_2. \quad (41)$$

В диапазоне

$$t / t_2 \ll \xi \ll \frac{Dt}{dt_1} \ln \left( \frac{t}{t_1} \right) \quad (42)$$

асимптотическое выражение получается из (39) путем замены

$$\zeta = 2 \sqrt{\xi \frac{dt}{Dt_1 \ln(t/t_1)}}. \quad (43)$$

При условии

$$\xi \gg \frac{Dt}{dt_1} \ln \left( \frac{t}{t_1} \right) \quad (44)$$

мы приходим к самой дальней асимптотике, соответствующей выражению (33). Таким образом, хвост концентрационного профиля на временах  $t \gg t_2$ , как и в случае  $l = 1$ , состоит из трех различных частей.

Видно, что, как и в случае плоскопараллельного слоя, чем дальше от источника расположена рассматриваемая часть хвоста, тем более ранний режим переноса определяет ее форму.

В заключение раздела отметим, что глубина проникновения частиц в среду II для рассматриваемого здесь случая  $l = 2$  определяется оценками (30) и (31), где значение показателя  $\Gamma$  следует брать из формул данного раздела. Например, при  $t \gg t_2$  в интервале (42)  $\Gamma$  определяется формулами (43) и (41), а в интервале (44) — показателем экспоненты в первой формуле (33).

## **Заключение**

Исследование переноса примеси в регулярно неоднородной, сильно контрастной среде показало, что смена режимов переноса с увеличением времени (быстрая классическая диффузия, субдиффузия, медленная классическая диффузия) приводит к сложной структуре асимптотики профиля концентрации на больших расстояниях (в хвостах). Хвост в субдиффузионном режиме состоит из двух, а в режиме медленной классической диффузии из трех различных частей. Установлено, что чем более удален фрагмент хвоста от места, где находилась примесь в начальный момент, тем более ранний режим переноса определяет его форму. Получены асимптотические выражения для концентрации примеси в хвостах для двух геометрических реализации среды с высокой проницаемостью — плоскопараллельного слоя и прямого цилиндра.

Полное число активных частиц (локализованных в среде с высокой проницаемостью) уменьшается во времени со скоростью, зависящей от геометрии среды: обратно пропорционально корню из времени для плоскопараллельного слоя и первой степени времени — для прямого цилиндра.

Глубина проникновения частиц в слабопроницаемую среду имеет обычную классическую диффузионную величину в области основного облака частиц и существенно подавляется в области хвостов.

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. *Sahimi, M.* // *Rev. Mod. Phys.* — 1993. — 65. — P. 1393.
2. *Bonnet, E., O. Bour, N.E. Odling, P. Davy, I. Main, P. Cowie, B. Berkowitz* // *Reviews of Geophysics.* — 2001. — 39. — P. 347.
3. *Bouchaud, J.-P. and A. Georges* // *Phys. Rep.* — 1990. — 195. — P. 127.
4. *Ben-Avraham, D. and S. Havlin.* *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems.* — Cambridge University Press, 2000.
5. *Дыхне, А.М., И.Л. Драников, П.С. Кондратенко, А.В. Попов.* Аномальная диффузия в регулярно неоднородных средах // *Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / ИБРАЭ РАН; под ред. Л.А. Большова.* — М.: Наука, 2008.

## VII. Влияние диффузионного барьера на динамику распространения примеси в среде с трещиной

П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев

### Введение

Адекватное моделирование процесса переноса примесей в геологических средах является важной задачей в рамках проблемы надежности захоронения экологически опасных отходов (химических, радиоактивных). Данные среды, являющиеся барьером на пути распространения примесей от места захоронения до водоносного слоя, имеют сильно неоднородную структуру. Наряду со слабопроницаемыми областями они содержат области с высокой проницаемостью, как, например, одиночные трещины, либо системы трещин. При исследовании проблемы переноса в таких неоднородных сильно контрастных средах основные усилия, как правило, направлены на моделирование усредненного описания процесса, когда вклад среды со слабой проницаемостью (матрицы) и вклад сильно проницаемой среды (трещин) учитываются самосогласованно. Такое описание справедливо, если характерные размеры облака примеси  $R(t)$  существенно превосходят масштабы однородных доменов среды  $l$ . Полученные результаты преимущественно касаются определения режимов переноса, эффективных транспортных коэффициентов, а также пространственно-временного распределения концентрации примеси на расстояниях  $r \sim R(t)$ . В зависимости от характера пространственного распределения неоднородностей (случайное, регулярное либо фрактальное) и механизмов переноса (диффузия либо адвекция) параметр  $\gamma$ , описывающий зависимость размера облака от времени  $R(t) \sim t^\gamma$ , может принимать различные значения как меньше, так и больше  $1/2$  [1].

В то время как перечисленные аспекты проблемы изучены достаточно подробно, в настоящее время внимание исследователей привлекают ряд других вопросов. К ним относится поведение примеси на далеких расстояниях  $r \gg R(t)$  — в хвостах профиля концентрации, а также выяснение роли флуктуаций параметров среды на малых ( $r < l$ ) масштабах [2].

Информация о поведении примеси в хвостах особенно важна в задачах предотвращения радиоактивного заражения окружающей среды, когда перенос малого количества радионуклидов на большие расстояния может привести к тяжелым экологическим последствиям.

Реальные геологические среды в местах захоронения радиоактивных отходов могут содержать крупномасштабные неоднородности (размеры которых, например, сравнимы с характерными размерами самих захоронений). К таким неоднородностям можно отнести и специально создаваемые диффузионные барьеры [4]. В этом случае описывать миграцию примеси в рамках усредненного описания неправомерно, так как учет флуктуаций свойств среды вблизи источника может привести к перенормировке его мощности, которая является граничным условием при усредненном описании процесса переноса. Данная ситуация частично анализировалась в работе [2], где полагалось, что перенос примеси от источника в область больших масштабов имел место только тогда, когда поверхность источника непосредственно соприкасалась с сильно проницаемыми участками среды (т. е. имели место «проколы»).

Размещение места захоронения в среде со слабой проницаемостью кажется нам естественным, поскольку наличие дополнительного барьера уменьшает интенсивность распространения загрязняющих примесей. В настоящей работе нами будет рассмотрен случай, когда перенос примеси от источника в область больших масштабов заведомо происходит в среде со слабой проницаемостью. На больших временах, преодолев такой диффузионный барьер, частицы примеси распространяются далее в соответствии с законами эффективной среды. Но, как будет показано в настоящей работе, формирование хвостов концентрации и на малых временах существенно определяется наличием сильно проницаемой среды.

## **1. Постановка задачи**

В рассматриваемой модели мы полагаем, что вся область, в которой происходит миграция частиц, состоит из двух подобластей: высокопроницаемого плоскопараллельного слоя толщиной  $a$  (область  $I$ ) и слабопроницаемой области  $II$ , занимающей оставшуюся часть пространства. Ниже для удобства мы будем называть область  $I$  трещиной, а область  $II$  — матрицей. В начальный момент примесь сосредоточена в области  $I$  на расстоянии  $h$  от трещины, так что выполняется неравенство

$$a \ll h.$$

В матрице концентрация частиц примеси удовлетворяет классическому уравнению диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d\Delta c. \quad (1)$$

Начальное условие имеет вид

$$c(x, y, z, t = 0) = N_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - h), \quad (2)$$

где координаты  $x, y$  лежат в плоскости трещины, а координата  $z$  ей перпендикулярна. Уравнение для концентрации частиц в трещине  $n$  получается из (1) с помощью замен  $c \rightarrow n, d \rightarrow D$ , причем для коэффициентов диффузии справедливо неравенство:

$$D \gg d.$$

Как обычно, граничные условия заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока частиц. При сшивке концентрации на границе областей  $I$  и  $II$  нужно учесть следующее.

Нас будут интересовать времена  $t \gg \frac{a^2}{4D}$ . На этих временах перепадом концентрации по  $z$  в трещине можно пренебречь. Тогда поведение частиц в трещине можно описывать концентрацией, усредненной по толщине трещины (по координате  $z$ ):  $\bar{n}(\vec{r}, t) = \langle n(\vec{r}, z, t) \rangle_z$ . Здесь  $\vec{r} = (x, y)$  есть радиус-вектор в плоскости трещины.

Решение задачи проводилось стандартным образом (см., например, [3]). Переходя к Фурье—Лаплас-представлению, получаем для  $c_{p, \vec{k}, \kappa}$  и  $n_{p, \vec{k}}$  систему уравнений

$$(p + d(k^2 + \kappa^2)) c_{p, \vec{k}, \kappa} = -q_{p, \vec{k}} + N_0 \exp(-i\kappa h), \quad (3)$$

$$(p + Dk^2) n_{p, \vec{k}} = q_{p, \vec{k}} / a. \quad (4)$$

Здесь

$$c_{p, \vec{k}, \kappa} = \int_0^\infty dt \iiint d^2 \vec{r} dz c(\vec{r}, z, t) \exp(-pt - i\vec{k}\vec{r} - i\kappa z),$$

$q_{p, \vec{k}}$  есть Фурье—Лаплас-образ плотности потока частиц через границу, отнесенной к единице ее площади. Величина  $n_{p, \vec{k}}$  в (4) есть Фурье—Лаплас-образ концентрации  $n(\vec{r}, t)$ .

Исключая  $q_{p,\bar{k}}$  из (4) с помощью (3) и условия  $c_{p,\bar{k}}(z=0) = n_{p,\bar{k}}$  и выполняя обратное преобразование Фурье по  $\bar{k}$  и Лапласа по  $p$ , приходим к выражению для  $n(\bar{r}, t)$ , которое после замены  $p \rightarrow s = (p + dk^2)t$  и с учетом  $D - d \approx D$  принимает вид

$$n(\bar{r}, t) \cong \frac{N_0}{aDt} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \iint \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\exp(-2\sqrt{s}\sqrt{t_3}/t + s - dtk^2 + i\bar{k}\bar{r})}{k^2 + k_0^2}, \quad (5)$$

где

$$t_1 = \frac{a^2}{4d}, \quad t_3 = \frac{h^2}{4d}, \quad (6)$$

$$k_0^2 = \frac{1}{Dt} \left( s + \sqrt{\frac{t}{t_1}} \sqrt{s} \right). \quad (7)$$

## 2. Анализ поведения концентрации примеси

Ниже нас будет интересовать временной диапазон

$$t \ll t_3. \quad (8)$$

На временах  $t \gg t_3$  размер облака примеси в области II будет существенно больше  $h$ , и мы фактически переходим к задаче, исследованной в [3], где источник примеси располагался в самой трещине. Дальнейший анализ показал, что важной величиной, определяющей поведение системы, является комбинация параметров  $\frac{aD}{hd}$ .

Рассмотрим сначала случай

$$\frac{aD}{hd} \gg 1. \quad (9)$$

Вычисление асимптотик (5) проведем в два этапа, на первом этапе интегрируя по волновому вектору, а на втором — по переменной Лапласа.

На первом этапе воспользуемся тем фактом, что при интегрировании выражения  $\iint \exp(-dtk^2 + i\bar{k}\bar{r}) d^2k$  основной вклад в интеграл дают значения волнового вектора, определяемые оценкой

$$k_1 \sim \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{dt}}; \frac{r}{2dt} \right\}. \quad (10)$$

Тогда при вычислении интеграла по  $\vec{k}$  можно выделить три случая, соответствующие заданным соотношениям между  $r$ ,  $t$  и  $s$ :

1)  $k_0^2 \gg k_1^2$ . Пренебрегая членом  $k^2$  в знаменателе выражения (5), получаем

$$n(r, t) \cong \frac{N_0 \exp\left(-\frac{r^2}{4dt}\right)}{4\pi a dt} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\exp\left(s - 2\sqrt{\frac{t_3}{t}}\sqrt{s}\right) ds}{s + \sqrt{\frac{t}{t_1}}\sqrt{s}} \frac{1}{2\pi i}. \quad (11)$$

2)  $r < \sqrt{4dt}$ ,  $k_0^2 \ll \frac{1}{dt}$ . В этом случае можно пренебречь слагаемым  $i\vec{k}\vec{r}$  в показателе экспоненты. С учетом этого интегрирование выражения (5) дает

$$n(r, t) \cong \frac{N_0}{4\pi a Dt} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \exp\left(s - 2\sqrt{\frac{t_3}{t}}\sqrt{s}\right) \ln \left[ \frac{D}{d\left(s + \sqrt{\frac{t}{t_1}}\sqrt{s}\right)} \right] \frac{ds}{2\pi i}. \quad (12)$$

3)  $r > \sqrt{4dt}$ ,  $k_0^2 \ll \frac{r^2}{4(dt)^2}$ . Здесь слагаемое  $dtk^2$  в экспоненте можно опустить. В итоге приближенное выражение для  $n$  принимает вид

$$n(r, t) \cong \frac{N_0}{4\pi a Dt} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \exp\left(s - 2\sqrt{\frac{t_3}{t}}\sqrt{s}\right) K_0(rk_0) \frac{ds}{2\pi i}, \quad (13)$$

где  $K_0(u)$  есть функция Макдональда.

На втором этапе интегралы по Лапласовой переменной в силу условия  $\sqrt{t_3/t} \gg 1$  вычисляются методом перевала, причем в случаях 1) и 2) значение перевальной точки есть  $s_* = t_3/t$ . В случае 3) это справедливо только при умеренных  $r$ :  $r < \frac{\sqrt{Dt}}{\sqrt{t_3/t} + \sqrt{t_3/t_1}}$ . При больших  $r$  вклад в

перевальную точку дает также выражение, стоящее в аргументе функции Макдональда.

Окончательно расчеты приводят к следующим выражениям.

На малых временах  $t < t_4 = \frac{h^2}{4D}$  можно выделить два пространственных интервала. При  $r < h\sqrt{\frac{d}{D}}$  имеем

$$n(r, t) \cong \frac{N_0}{\pi^{3/2} ah\sqrt{4dt}} \exp\left(-\frac{t_3}{t} - \frac{r^2}{4dt}\right), \quad (14)$$

или, учитывая выражение для  $t_3$ , получаем  $n \sim \exp\left(-\frac{h^2 + r^2}{4dt}\right)$ . Таким образом, профиль концентрации на этих временах в этой области трещины фактически определяется диффузией в матрице.

На дальних расстояниях  $r > h\sqrt{\frac{d}{D}}$  основную роль в формировании профиля концентрации играет быстрая диффузия частиц вдоль трещины:

$$n(r, t) \sim \exp\left(-\left(\sqrt{\frac{t_3}{t}} - \frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right)^2\right). \quad (15)$$

На следующем временном интервале  $t_4 < t < \sqrt{t_1 t_3}$  также следует выделить несколько пространственных областей, характеризующихся определенным распределением концентрации. На малых расстояниях  $r < \sqrt{4dt}$  концентрация стремится к константе:

$$n(r, t) \cong \frac{N_0}{\pi^{3/2}} \frac{h}{a} \frac{1}{4Dt\sqrt{4dt}} \ln\left(\frac{Dt}{dt_3}\right) \exp\left(-\frac{t_3}{t}\right). \quad (16)$$

В промежуточной области  $\sqrt{4dt} < r < R_1(t)$  концентрация меняется с расстоянием очень медленно — логарифмически:

$$n(r, t) \cong \frac{N_0}{\sqrt{\pi} R_1^2(t) \sqrt{4dt}} \ln\left(\frac{R_1(t)}{r}\right) \exp\left(-\frac{t_3}{t}\right), \quad (17)$$

где

$$R_1(t) = \frac{\sqrt{4Dt}}{h} t. \quad (18)$$

Можно сказать, что область  $R_1(t) \sim t$  описывает размер облака, содержащего основную массу частиц в трещине. Отметим, что данный размер существенно больше размера облака частиц в матрице  $R_1(t) \gg \sqrt{4dt}$ , хотя количество частиц в этом облаке, конечно, мало  $\sim \exp\left(-\frac{t_3}{t}\right)$ .

Концентрация на расстояниях  $r > R_1(t)$  описывается выражением

$$n(r,t) \sim \exp\left(-\left(\sqrt{\frac{t_3}{t}} + \frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right)^2\right). \quad (19)$$

Отметим, что в области  $R_1(t) < r < \sqrt{4Dt}$  убывание концентрации с расстоянием характеризуется зависимостью  $\sim \exp\left(-\frac{r}{R_1(t)}\right)$ , что нетипично для поведения примеси в хвостах (обычно степень  $r$  в показателе экспоненты больше 1).

В следующем временном диапазоне  $\sqrt{t_1 t_3} < t < t_3$  режим роста облака частиц в трещине замедляется:

$$R_2(t) = \sqrt{D \frac{a}{h}} t, \quad (20)$$

профиль концентрации в области  $\sqrt{4dt} < r < R_2(t)$  описывается выражением

$$n(r,t) \cong \frac{N_0}{2\sqrt{\pi} R_2^2(t) \sqrt{4dt}} \ln\left(\frac{R_2(t)}{r}\right), \quad (21)$$

а на малых расстояниях  $r < \sqrt{4dt}$  концентрация ведет себя как

$$n(r,t) \cong \frac{N_0}{\pi^{3/2}} \frac{h}{a} \frac{1}{4Dt \sqrt{4dt}} \ln\left(\frac{Da}{dh}\right) \exp\left(-\frac{t_3}{t}\right). \quad (22)$$

В области хвостов теперь можно выделить три различных подобласти.

Вблизи основного облака  $R_2(t) < r < R_2(t) \frac{t_3}{t}$  реализуется простая экспонента:

$$n(r, t) \sim \exp\left(-\frac{t_3}{t} - \frac{r}{R_2(t)}\right). \quad (23)$$

Далее, при  $R_2(t) \frac{t_3}{t} < r < \sqrt{Dt \frac{t}{t_1}}$ , следует участок хвоста

$$n(r, t) \sim \exp\left(-\frac{3}{4} \left(\frac{r^2}{2D\sqrt{tt_1}}\right)^{2/3} - \left(\frac{r^2}{2D\sqrt{tt_1}}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{t_3}{t}}\right). \quad (24)$$

Этот фрагмент хвоста условно можно назвать «субдиффузионным» в силу того, что концентрация, наряду с  $\sqrt{t_3/t}$ , зависит также от автомодельной

переменной  $r/t^{1/4}$  (см. [3]). На самых дальних расстояниях  $r > \sqrt{Dt \frac{t}{t_1}}$

концентрация опять описывается формулой (19).

Зависимости (18) и (20) определяют эффективные режимы распространения частиц примеси в трещине («активной части» полного количества примеси). Следует выделить «баллистический» режим переноса (18), при котором рост размера облака частиц в трещине происходит пропорционально времени. Обычно существование такого режима сигнализирует о наличии средней скорости адвекции частиц. В нашей модели данный режим является следствием того, что скорость поступления примеси в трещину существенным образом меняется во времени и пространстве.

Из полученных выражений видно, что профиль концентрации примеси в хвосте имеет сложную, многоступенчатую форму. В задаче, рассмотренной в [3], где источник примеси находился внутри трещины, хвосты концентрации также состояли из нескольких частей, но там каждый участок хвоста соответствовал определенному режиму переноса, имевшему место в предшествующие интервалы времени. В настоящей постановке только ближайшие к облаку частиц фрагменты хвоста определяются текущим режимом переноса, а более удаленные фрагменты с какими-либо режимами переноса вообще не связаны.

Отметим также, что при  $t > t_4$  в интервале  $\sqrt{4dt} < r < R_\alpha(t)$  поведение концентрации имеет логарифмический характер. Если рассматривать в

качестве основного облака примеси область размером  $\sim \sqrt{4dt}$  (в этой области, действительно, содержится основная масса примеси, если учитывать также и примесь, сосредоточенную в матрице), то зависимости (17) и (21) можно интерпретировать как наличие «логарифмических» хвостов концентрации.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$\frac{aD}{hd} \ll 1. \quad (25)$$

Условие  $k_0^2 \gg \frac{1}{dt}$  с помощью выражения (6) можно представить в виде

$$\frac{t_3}{t} \gg \frac{Da - dh}{da}, \text{ что при учете соотношения (25) выполняется при любых } t.$$

Отсюда следует, что в области  $r < \sqrt{4dt}$  выражение для концентрации

$$n(r, t) \cong \frac{N_0}{4\pi^{3/2}adt} \frac{\exp(-t_3/t)}{\sqrt{t_3/t} + \sqrt{t/t_1}} \quad (26)$$

справедливо во всем диапазоне времен  $t < t_3$ .

В области  $r > \sqrt{4dt}$  условие  $k_0^2 \gg \frac{r^2}{4(dt)^2}$  определяет диапазон расстояний

$$r < \sqrt{4dt \frac{dh}{Da} \left( 1 + \frac{\sqrt{t_1 t_3}}{t} \right)}, \quad (27)$$

в котором реализуется «ближний» хвост (14).

На более далеких расстояниях структура хвостов определяется переносом как по трещине, так и по матрице и зависит от интервала времени.

На временах  $t < \sqrt{t_1 t_3}$  и расстояниях  $r \gg \sqrt{4dt \frac{dh}{Da} \left( 1 + \frac{\sqrt{t_1 t_3}}{t} \right)}$  концен-

трация описывается зависимостью (15).

В интервале  $\sqrt{t_1 t_3} < t < t_3 \frac{Da}{dh}$ , «дальний» хвост состоит из трех частей.

Сначала при  $\sqrt{4dt \frac{dh}{Da}} < r < \sqrt{D \sqrt{t t_1} \left( \frac{t_3}{t} \right)^{3/4}}$  реализуется фрагмент, опре-

деляемый зависимостью (23). За ним в соответствующих пространственных интервалах следуют фрагменты (24) и (19).

На временах  $t_3 \frac{Da}{dh} < t < t_3$  фрагмент (15) исчезает, и сразу за «ближним»

хвостом (14) в пространственном диапазоне  $\sqrt{4dt \frac{dh}{Da}} < r < \sqrt{Dt \frac{t}{t_1}}$

реализуется зависимость (24), а за ней — зависимость (19).

## Заключение

В работе исследованы закономерности переноса примеси в сильно проницаемом плоско-параллельном слое (трещине), окруженном слабо проницаемой средой (матрицей), для случая, когда источник находится в матрице на некотором расстоянии от слоя. Анализ проводился на временах, когда размер основного облака примеси в матрице был меньше расстояния от источника до слоя.

Показано, что характер поведения примеси в трещине зависит от величины

$\frac{aD}{hd}$ . В случае, когда  $\frac{aD}{hd} < 1$ , концентрация примеси в основной массе описывается тем же (гауссовым) распределением, что и концентрация в матрице, так что зависимость размера основного облака частиц от времени в трещине  $\sim \sqrt{dt}$ .

В обратном случае  $\frac{aD}{hd} > 1$ , закон роста облака частиц в трещине  $R(t)$  различен для различных временных интервалов. Если на малых временах имеет место медленный диффузионный рост  $R(t) \sim \sqrt{dt}$ , то на более поздних стадиях рост облака происходит сначала в «баллистическом» режиме  $R(t) \sim t$ , а затем в режиме классической диффузии, но с новым коэффициентом  $Da/h$ , превышающим коэффициент диффузии в матрице  $d$  в силу условия  $\frac{aD}{hd} > 1$ . Убывание концентрации на расстояниях  $r < R(t)$  описывается медленной (логарифмической) зависимостью.

Для обоих случаев —  $\frac{aD}{hd} > 1$  и  $\frac{aD}{hd} < 1$  хвосты концентрации в трещине имеют многоступенчатую структуру. По сравнению с результатами работы [3] следует отметить появление пространственных интервалов, на которых убывание концентрации при  $\frac{aD}{hd} > 1$  пропорционально

$\exp\left(-\frac{r}{R_\alpha(t)}\right)$ , где  $R_\alpha(t)$  описывает режимы «быстрого» роста облака

примеси в трещине. Интересно отметить, что хотя в случае  $\frac{aD}{hd} < 1$  «быстрые» режимы роста облака примеси в трещине отсутствуют, тем не менее и в этом случае, распределение концентрации примеси на больших расстояниях имеет экспоненциальные (не гауссовы) хвосты, определяемые параметрами трещины.

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. *Isichenko, M.B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media // *Reviews of modern physics.* — 1992. — Vol. 64, № 4.
2. *Большов, Л.А., А.М. Дыхне, П.С. Кондратенко.* Флуктуационные эффекты и перенормировка источника в фрактальных, сильно контрастных средах // *Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / ИБРАЭ РАН; под ред. Л.А. Большова.* — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 114.
3. *Кондратенко, П.С., Л.В. Матвеев.* Режимы переноса и хвосты концентрации в регулярно-неоднородных сильно контрастных средах // *Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / ИБРАЭ РАН; под ред. Л.А. Большова.* — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 79.
4. *Сергеев, В.И., Н.Н. Данченко, Н.Ю. Степанова, Т.Г. Шимко, З.П. Малащенко.* Способы защиты водных ресурсов от загрязнения в районах захоронения отходов атомной промышленности // *Научно-технологическая технология.* — 2005. — Т. 6, № 1. — С. 57–64.

## VIII. Асимптотические профили концентрации примеси при диффузии в гребешковых структурах

*О. А. Дворецкая, П. С. Кондратенко*

### **Введение**

Одним из факторов, способных привести к аномальным режимам переноса примеси является сильный контраст в распределении характеристик среды. В работах [1, 2] и [3] были исследованы процессы переноса в контрастных средах, обладающих упорядоченной и неупорядоченной структурами, соответственно. Было установлено, что в таких средах может происходить смена режимов переноса во времени, одним из которых является субдиффузия. Показано также, что неизменным следствием смены режимов является сложная структура асимптотик концентрации на больших расстояниях.

Еще одна модель контрастной среды, отвечающая гребешковой структуре, исследовалась в работе [4]. Однако, проведенное там рассмотрение, на наш взгляд, является неполным. В настоящей работе исследуются характеристики переноса примеси в гребешковых структурах во всем диапазоне изменения параметров модели. Особое внимание уделено асимптотическим распределениям концентрации на больших расстояниях.

В следующем разделе сформулирована постановка задачи. В разделе 3 дан вывод основных соотношений. Раздел 4 посвящен анализу режимов переноса и асимптотических характеристик концентрации примеси. Краткие выводы перечислены в заключительном разделе.

### **1. Постановка задачи**

Рассматриваемая нами гребешковая структура изображена на рис. 1. Она состоит из остова и периодической системы зубцов. Остов представляет собой прямой параллелепипед — бесконечный по направлению  $x$  и с размерами  $a$  и  $b$  по направлениям  $z$  и  $y$ , соответственно. Каждый зубец также является прямым параллелепипедом с размерами ребер:  $g$  по направлению  $x$ ,  $h$  — по  $z$  и  $b$  — по  $y$ . Период системы зубцов по

направлению  $x$  обозначим  $u$ . Будем считать, что размеры элементов структуры удовлетворяют неравенствам

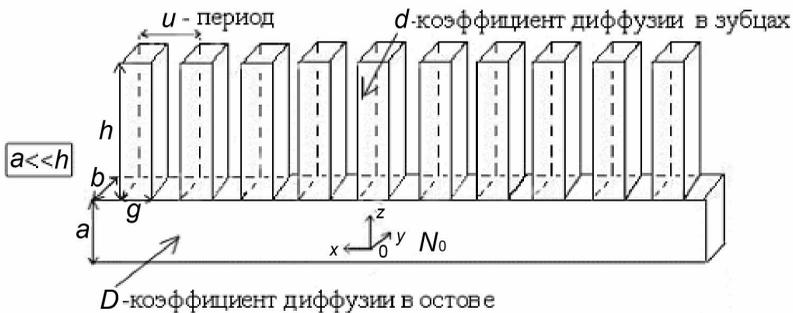
$$a \gg b, u. \quad (1)$$

Начало координат выберем в центре поперечного сечения остова (по нормали к  $x$ ).

Перенос примеси в остове и зубцах отвечает классической диффузии с коэффициентами  $D$  и  $d$  соответственно. Концентрацию примеси в остове обозначим  $n$ , а в зубцах —  $c$ . Частицы, локализованные в остове, будем называть активными. Граничное условие на внешней поверхности гребешковой структуры отвечает равной нулю нормальной компоненте плотности потока. Условия на границе между остовом и зубцами соответствуют непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока. Мы будем решать задачу с заданным начальным распределением концентрации (в момент времени  $t = 0$ ), которое, по нашему предположению, сосредоточено в остове, в окрестности начала координат.

Нас будет интересовать распределение концентрации на временах, удовлетворяющих неравенствам:

$$t \gg \frac{a^2}{4D}, \frac{b^2}{4d}, \frac{g^2}{4d}. \quad (2)$$



#### Геометрия задачи

В этом случае концентрация частиц примеси в остове будет практически однородной по его сечению и в основном зависеть только от координаты

$x$  и времени  $t$ :  $n = n(x, t)$ . В свою очередь, концентрация внутри отдельного зубца будет функцией  $z$  и  $t$ . При этом она также будет в качестве параметра содержать координату  $x$ ,  $c(z, t; x)$ .

Усредняя трехмерное уравнение диффузии по сечению остова в плоскости  $yz$  и в направлении  $x$  — по периоду системы зубцов, приходим к уравнению для концентрации активных частиц:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{q(x, t)}{a}. \quad (3)$$

Здесь

$$q = -\frac{g}{u} d \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=\frac{a}{2}+0}. \quad (4)$$

Уравнение и граничные условия для концентрации частиц в зубце  $c(z, t; x)$  имеют вид:

$$\frac{\partial c(x, z; t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 c(x, z; t)}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Соответствующие ему граничные условия даются равенствами:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=\frac{a}{2}+h} = 0, \quad c \Big|_{z=\frac{a}{2}+0} = n \Big|_{z=\frac{a}{2}-0}. \quad (6)$$

## **2. Вывод основных соотношений**

Для решения задачи удобно перейти в представление Лапласа:

$$n_p(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-pt} n(x, t), \quad c_p(z, x) = \int_0^{\infty} dt e^{-pt} c(z, t; x). \quad (7)$$

В этом представлении уравнения (3) и (5) приобретают вид

$$pn_p(x) = D \frac{\partial^2 n_p(x)}{\partial x^2} + \frac{q_p(x)}{a} + \bar{n}^{(0)}(x), \quad (8)$$

$$\frac{d^2 c_p}{dz^2} - \frac{p}{d} c_p = 0. \quad (9)$$

$\bar{n}^{(0)}(x)$  — усредненное по поперечному сечению остова начальное распределение активных частиц. Решение уравнения (8), отвечающее граничным условиям (6), имеет форму

$$c_p(z, x) = n_p(x) \frac{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{p}{d}} \left( \frac{a}{2} + h - z \right) \right]}{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{p}{d}} h \right]}. \quad (10)$$

Отсюда с учетом равенства (4) имеем

$$q_p(x) = a n_p(x) \sqrt{\frac{p}{t_1}} \operatorname{th}(\sqrt{p t_2}), \quad (11)$$

где введены обозначения

$$t_1 = \frac{a^2}{d} \left( \frac{u}{g} \right)^2, \quad t_2 = \frac{h^2}{d}. \quad (12)$$

Далее мы будем полагать выполненными неравенства

$$t_0 \ll t_1 \ll t_2, \quad t_0 = \frac{a^2}{D}. \quad (13)$$

Подстановка выражения (11) в (8) замыкает уравнение относительно концентрации активных частиц:

$$D \left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \pi(p) \right\} n_p(x) = -n^{(0)}(x). \quad (14)$$

Здесь обозначено

$$\pi(p) = \frac{1}{D} \left[ p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} \operatorname{th}(\sqrt{p t_2}) \right]. \quad (15)$$

Решение уравнения (14) имеет форму:

$$n_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G_p(x-x') \bar{n}^{(0)}(x'), \quad (16)$$

где функция  $G_p(x)$  определена равенством

$$G_p(x) = \frac{1}{2D\sqrt{\pi(p)}} \exp\left(-|x|\sqrt{\pi(p)}\right). \quad (17)$$

После выполнения обратного преобразования Лапласа из соотношения (16) находим выражение для концентрации активных частиц в координатно-временном представлении:

$$n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G(x-x',t) \bar{n}^{(0)}(x'), \quad (18)$$

Входящая сюда функция Грина определяется соотношением:

$$G(x,t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{1}{2D\sqrt{\pi(p)}} \exp\left(pt - |x|\sqrt{\pi(p)}\right), \quad \text{Re } \sigma > 0. \quad (19)$$

Интегрируя выражение (18) по всему объему остова с учетом соотношения (19), находим полное число активных частиц:

$$N(t) = N_0 \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{1}{D\pi(p)}, \quad (20)$$

Здесь  $N_0$  — полное число всех частиц примеси:

$$N_0 = ab \int_{-\infty}^{+\infty} dx \bar{n}^{(0)}(x). \quad (21)$$

### 3. Профили концентрации

Далее будем рассматривать времена, когда размер области локализации примеси  $R(t)$  велик по сравнению с его первоначальным значением,  $R(t) \gg R_0$ . Тогда будем иметь

$$n(x,t) = \frac{N_0}{ab} G(x,t). \quad (22)$$

Переходим к анализу предельных случаев, в которых выражение для функции  $G(x,t)$ , определяемое равенством (19), поддается упрощению. Мы учтем, что существенные значения переменной  $p$  в интеграле (19) отвечают неравенству:

$$p \gtrsim t^{-1}. \quad (23)$$

В соответствии с неравенствами (1) и (2) существует три характерных интервала времени, определяемые временами  $t_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$ . Проанализируем поведение концентрации активных частиц и их полного числа в каждом из интервалов по отдельности.

$$1) \quad t_0 \ll t \ll t_1.$$

Здесь в соответствии с оценкой (23) величину  $\pi(p)$  из (15) можно аппроксимировать как  $\pi(p) \cong \frac{p}{D}$ . После этого из равенств (19) и (20) получим:

$$n(x,t) \cong \frac{N_0}{ab\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad N(t) \cong N_0. \quad (24)$$

Таким образом, в данном интервале перенос примеси происходит в режиме одномерной классической диффузии и активные частицы вообще «не чувствуют» зубцов.

$$2) \quad t_1 \ll t \ll t_2$$

В этом интервале в соответствии с оценкой (23) из равенства (15) имеем приближение:

$$\pi(p) \cong \frac{1}{D} \left( p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} \right). \quad (25)$$

Подставляя его в (19) а затем в (22), находим:

$$n(x,t) = \frac{N_0}{ab} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{1}{2\sqrt{D(p + \sqrt{pt_1^{-1}})}} \times \exp\left( pt - |x| \sqrt{\frac{p + \sqrt{pt_1^{-1}}}{D}} \right), \quad \text{Re } \sigma > 0. \quad (26)$$

Далее мы увидим, что при вычислении,  $N(t)$  а также  $n(x,t)$ , при не слишком больших значениях координаты  $x$ , существенные значения переменной  $p$  удовлетворяют неравенству:

$$pt_1 \ll 1$$

Тогда правомерно приближение:

$$p + \sqrt{pt_1^{-1}} \cong \sqrt{pt_1^{-1}} \quad (27)$$

и из (20), (25) и (26) получим

$$n(x,t) = \frac{N(t)}{abR(t)} \Phi(\xi) \quad (28)$$

$$N(t) = N_0 \sqrt{\frac{t_1}{\pi t}}, \quad (29)$$

Функция  $\Phi(\xi)$  определена формулой:

$$\Phi(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} s^{-\frac{1}{4}} \exp(-\Gamma(s, \xi)), \quad \text{Re } \kappa > 0. \quad (30)$$

$$\Gamma(s, \xi) = \xi s^{\frac{1}{4}} - s$$

Здесь введена новая переменная интегрирования  $s = pt$ . Переменная  $\xi$  задана равенствами:

$$\xi = \frac{|x|}{R(t)}, \quad R(t) = \sqrt{D\sqrt{t_1 t}}. \quad (31)$$

В соответствии с определением (30) функция  $\Phi(\xi)$  обладает свойствами:  $\Phi(0) \sim 1$  и  $\Phi(\xi) \ll 1$  при  $\xi \gg 1$ . Отсюда следует, что величина  $R(t)$ , которая определена в (31), устанавливает размер облака активной примеси в момент времени  $t$ . Поскольку  $R(t) \propto t^{1/4}$  режим переноса, реализуемый в данном интервале времени, отвечает субдиффузии.

Асимптотика функции  $\Phi(\xi)$  при  $\xi \gg 1$  получается из (30) интегрированием по методу перевала:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8|\Gamma''|}} s_0^{-1/4} \exp[-\Gamma(\xi)]. \quad (32)$$

Входящие в эту формулу величины определены равенствами:

$$\Gamma(\xi) = \Gamma(s_0, \xi), \quad \Gamma'' = \left. \frac{\partial^2 \Gamma(s, \xi)}{\partial s^2} \right|_{s=s_0}. \quad (33)$$

Точка перевала  $s_0$  определяется из уравнения:

$$\left. \frac{\partial \Gamma(s, \xi)}{\partial s} \right|_{s=s_0} = 0. \quad (34)$$

Его решение, а также величины из (33) равны

$$s_0 = \left(\frac{\xi}{4}\right)^{3/4}, \quad \Gamma(\xi) = 3\left(\frac{\xi}{4}\right)^{4/3}, \quad \Gamma'' = -\frac{3}{4}\left(\frac{4}{\xi}\right)^{4/3}. \quad (35)$$

Подстановка (35) в (32), а затем в (28) приводит к асимптотическому выражению для концентрации активных частиц примеси:

$$n(x, t) \cong \frac{N(t)}{abR(t)} \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{\xi}{4}\right)^{1/3} \exp\{-\Gamma(\xi)\}, \quad \Gamma(\xi) = 3\left(\frac{\xi}{4}\right)^{4/3}. \quad (36)$$

Как видно из (35), с ростом  $\xi$  значение точки перевала  $s_0$  растет. Поскольку  $s = pt$ , выражение (36), при получении которого была исполь-

зована аппроксимация (27), справедливо при выполнении неравенства

$\Gamma(\xi) < \frac{t}{t_1}$ , эквивалентного условию

$$\xi < 4 \left( \frac{t}{3t_1} \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (37)$$

В противоположном случае, когда  $\xi > 4 \left( t / 3t_1 \right)^{3/4}$ , вместо (27) следует использовать аппроксимацию  $p + \sqrt{pt_1^{-1}} \cong p$ , и тогда для концентрации мы снова приходим к классическому выражению (24).

Таким образом, в интервале времен  $t_1 \ll t \ll t_2$  перенос примеси в основной области ее распределения идет в режиме субдиффузии. Вместе с тем хвост распределения концентрации (асимптотика на далеких расстояниях) имеет двухступенчатую структуру, так что ближняя ступень является субдиффузионной, а далекая — классической.

### 3) $t \gg t_2$

Замечая, что, как видно из (15), при  $pt_2 \ll 1$  справедлива аппроксимация:

$$\pi(p) \cong \frac{p}{D}, \quad \tilde{D} = AD, \quad A = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}, \quad (38)$$

из (19), (20) и (22) находим

$$n(x,t) \cong \frac{\tilde{N}}{ab\sqrt{4\pi\tilde{D}t}} \exp\{-\tilde{\Gamma}\}, \quad \tilde{\Gamma} = \frac{x^2}{4\tilde{D}t}, \quad (39)$$

$$N(t) = \tilde{N} \equiv AN_0. \quad (40)$$

Выражение для концентрации (39) соответствует одномерной классической диффузии, но отличается от (24) числом активных частиц и коэффициентом диффузии. Обратим внимание на то, что перенормировочный множитель  $A$  одинаков в формулах для модифицированного коэффициента диффузии  $\tilde{D}$  и числа активных частиц  $\tilde{N}$ . Обе эти величины малы по сравнению с соответствующими им первоначальными значениями  $D$  и  $N_0$ , поскольку  $t_2 \gg t_1$ .

Выражение (39) справедливо, пока  $\tilde{\Gamma} < \frac{t}{t_2}$ . При  $\tilde{\Gamma} > \frac{t}{t_2}$  асимптотика концентрации  $n(x, t)$  дается формулой (36). В свою очередь, формула (36) верна при  $\Gamma < \frac{t}{t_1}$ , а на еще больших расстояниях, когда  $\Gamma > \frac{t}{t_1}$ , асимптотика концентрации сменяется выражением (24).

Таким образом, в данном интервале времени асимптотика концентрации активных частиц состоит из трех ступеней. Первая ступень имеет гауссову форму, отвечающую одномерной классической диффузии с перенормированными коэффициентом диффузии и полным числом активных частиц. Вторая ступень определяется субдиффузионным режимом, который свойствен интервалу времени  $t_1 \ll t \ll t_2$ . Наконец, третья ступень отвечает исходному классическому диффузионному режиму, свойственному интервалу  $t_0 \ll t \ll t_1$ .

Отметим, что модифицированный классический режим переноса может иметь место только в структурах с конечной длиной зубцов.

## **Заключение**

Основные выводы работы состоят в следующем.

Три режима переноса примеси имеют место в гребешковых структурах с конечной длиной зубцов. На самых ранних временах  $t_0 \ll t \ll t_1$ , когда основная часть примеси находится в остове структуры, реализуется режим классической диффузии. На промежуточном интервале времени  $t_1 \ll t \ll t_2$ , когда основная часть примеси сосредоточена в зубцах, перенос происходит в режиме субдиффузии. На больших временах  $t \gg t_2$ , когда распределение примеси между остовом и зубцами приходит в равновесие (основная масса частиц находится в зубцах), перенос снова идет в режиме классической диффузии, но теперь с перенормированными коэффициентом диффузии и полным числом активных частиц. Вследствие смены режимов во времени асимптотики концентрации на далеких расстояниях имеют многоступенчатую структуру. В интервале времени, отвечающему субдиффузии, ступеней — две, а на самых поздних временах их три. Перенос примеси в гребешковой структуре, отвечающей бесконечно тонкой оси с прикрепленными к ней бесконечно длинными зубцами, исследовался в работе [4]. В такой структуре в наших обозначениях имеет

место  $t_1 \rightarrow 0$  и  $t_2 \rightarrow \infty$ , и поэтому там реализуется только субдиффузионный режим переноса. Авторы [4] нашли асимптотическое выражение для функции Грина, аналогичное (36). В работе [4] было также отмечено, что при конечной длине зубцов или при погружении структуры в плохо проводящую среду на больших временах происходит переход к классическому режиму диффузии. Однако никаких указаний на возможность сложной структуры хвостов концентрации в [4] получено не было.

Отличие рассматриваемой нами гребешковой модели от модели [3] состоит в том, что в структурах с зубцами конечной длины полное число активных частиц на очень больших временах перестает уменьшаться и становится постоянным. В структурах же с бесконечными зубцами модифицированный классический режим переноса не реализуется.

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. Дыхне, А.М., И.Л. Драников, П.С. Кондратенко, А.В. Попов. Аномальная диффузия в регулярно-неоднородных средах // Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / ИБРАЭ РАН; под ред. Л.А. Большова. — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 51.
2. Кондратенко, П.С., Л.В. Матвеев. Режимы переноса и хвосты концентрации в регулярно неоднородных, сильно контрастных средах // Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / ИБРАЭ РАН; под ред. Л.А. Большова. — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 79.
3. Дыхне, А.М., П.С. Кондратенко, Л.В. Матвеев. Диффузия примеси по перколяционному кластеру // Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах: сб. науч. трудов / ИБРАЭ РАН; под ред. Л.А. Большова. — М.: Наука, 2008. — Вып. 7. — С. 71.
4. Архинчеев, В.Е., Э.М. Баскин // ЖЭТФ. — 1991. — 100. — Вып. 1(7).

## IX. Флуктуационные эффекты и перенормировка источника во фрактальных, сильно контрастных средах

*Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко*

Хорошо известно [1], что во многих случаях закономерности миграции частиц в сильно неупорядоченных средах с фрактальными свойствами имеют характер аномальной диффузии. Исследование этих закономерностей обычно проводится на основе обобщенных уравнений переноса. Фактически такое описание носит усредненный характер (и концентрация и сами уравнения являются объектами, усредненными по ансамблю реализаций среды). В то же время ясно, что локальные характеристики фрактальных сред сильно флуктуируют. Возникает вопрос, каким образом эти флуктуации влияют на процесс переноса и каким образом могут быть учтены соответствующие эффекты. Важным параметром, определяющим интенсивность распространения примеси, является мощность ее источника. В настоящей работе исследуется влияние флуктуаций на определение мощности источника примеси.

Общая схема описания усредненного по ансамблю реализаций переноса примесей в трехмерной среде может быть сформулирована в терминах уравнения непрерывности

$$\partial c / \partial t + \operatorname{div} \vec{q} = \Phi, \quad (1)$$

где вектор плотности потока  $\vec{q}$ , плотность стоков  $\Phi$  и усредненная по ансамблю реализаций концентрация частиц  $c$  являются плавными функциями координат и времени и связаны друг с другом соотношением

$$q_i(\vec{r}, t) = - \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' f_{ij}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \frac{\partial c(\vec{r}', t')}{\partial r'_j}, \quad (2)$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \phi(t - t') c(\vec{r}, t') dt'. \quad (3)$$

Отличительной чертой фрактальных сред является существование пространственного диапазона  $a < r < \xi$ , в котором различные характеристики этих сред обладают свойствами масштабной инвариантности. Именно соотношения (1–3) должны быть инвариантными по отношению к изменению масштаба  $r \rightarrow sr$  при одновременном преобразовании всех величин в (1–3) согласно  $M \rightarrow s^{-\Delta_M} M$ , где показатель  $\Delta_M$  называется масштабной размерностью величины  $M$ . Значения показателей  $\Delta_M$  в конечном итоге и определяют режим переноса примеси в диапазоне фрактальности. На масштабах  $r > \xi$  система становится статистически однородной, и дисперсия примеси происходит по закону классической диффузии. Границы пространственного диапазона фрактальности  $a$  и  $\xi$  называются, соответственно, нижней границей фрактальности и корреляционным радиусом.

В случае, когда характерный размер источника примеси превосходит  $a$ , флуктуации свойств системы не влияют на ее поведение, поскольку на этих масштабах мы можем непосредственно пользоваться системой (1–3). Если же размер источника примеси порядка или меньше нижнего размера фрактальности  $a$ , система (1–3) неприменима, и для описания переноса в ближней области  $r < a$  необходимо учитывать сильные флуктуации свойств проницаемости среды.

Предположим, что нас интересуют достаточно большие интервалы времени, когда размер облака примеси существенно превосходит нижнюю границу фрактальности  $a$ . Построим воображаемую поверхность  $S_1$  с характерным радиусом  $R_1 \gg a$  и поместим источник внутри нее. Форму поверхности выберем такой, что концентрация примеси на поверхности постоянна, если рассматривается точечный источник, помещенный в начало, совпадающее с центром реального источника. Полный поток  $Q$  из источника к поверхности можно представить в виде

$$Q = A(c_0 - c_1). \quad (4)$$

Здесь  $c_0$  и  $c_1$  — концентрации на фактической поверхности источника  $S$  и поверхности  $S_1$  соответственно. Величина  $A$  определяется свойствами среды между этими поверхностями (ближняя зона). Поток  $Q$  непрерывен на поверхности  $S_1$  и, следовательно, может быть выражен через характеристики среды вне поверхности  $S_1$  (в дальней зоне), где справедливо обобщенное уравнение переноса:

$$Q = Bc_1 \quad (5)$$

Исключая концентрацию  $c_1$  из уравнений (4) и (5), приходим к соотношениям

$$Q = KQ_0, \quad Q_0 = Bc_0, \quad K = A(A + B)^{-1}. \quad (6)$$

Для заданной концентрации на поверхности источника величина  $Q_0$  соответствует мощности источника в отсутствие флуктуаций свойств среды;  $Q$  есть эффективная мощность источника, уменьшенная вследствие флуктуаций, и  $K$  есть коэффициент перенормировки мощности источника.

На расстояниях  $|\vec{r}| \gg a$  средняя концентрация может быть выражена в терминах эффективной мощности  $Q$  независимо от размера источника.

Коэффициент  $A$  не может быть выведен из обобщенных уравнений переноса, так как для него требуется знание распределения характеристик среды в ближней зоне, где они сильно флуктуируют. Ситуация во многом напоминает задачу о проводимости вследствие подбарьерного туннелирования, исследованную Райхом и Рузиным в [2]. Поэтому воспользуемся их подходом. Как и проводимость в [2], коэффициент передачи в нашей задаче определяется редкими комбинациями благоприятных условий (например, трещин для переноса примеси в скальных породах), или так называемыми проколами. Вклад  $F$  в коэффициент передачи от индивидуальных проколов статистически распределен в широком диапазоне их значений. Этот вклад можно представить как  $F = F_0 \exp(-u)$ , где  $u$  есть вспомогательная переменная, принимающая значения в диапазоне от 0 до  $\infty$ . Как и в [1], концентрация проколов на единицу площади источника поверхности  $S$  можно определить выражением

$$\rho(u) = (S_0)^{-1} \exp[-\Omega(u)]. \quad (7)$$

Здесь  $S_0^{1/2}$  характерный размер сечения прокола, малый по сравнению со средним расстоянием между проколами, а  $\Omega(u)$  есть функция со свойствами  $\Omega(u) \gg 1$ ,  $\partial\Omega/\partial u < 0$ ,  $\partial^2\Omega/\partial u^2 > 0$ . Усредненный по ансамблю коэффициент передачи есть

$$\langle A \rangle = S \frac{F_0}{S_0} \int_0^\infty du \exp(-u - \Omega(u)). \quad (8)$$

Подынтегральная функция в этом выражении имеет резкий пик. Поэтому с точностью до предэкспоненциального фактора из (8) следует

$$\langle A \rangle = Sb, \quad b \approx \frac{F_0}{S_0} \exp[-u_{opt} - \Omega_{opt}]. \quad (9)$$

Здесь  $b$  есть удельный коэффициент передачи (не зависящий от площади поверхности источника),  $\Omega_{opt} = \Omega(u_{opt})$ , а величина  $u = u_{opt}$ , соответствующая оптимальным проколам, определяется из условия  $(\partial\Omega(u)/\partial u)_{u=u_{opt}} + 1 = 0$ . Условие применимости результата (9) равнозначно требованию, что среднее число оптимальных проколов велико на поверхности источника  $S\rho(u_{opt}) \gg 1$ , или, другими словами,

$$S > S_*, \quad S_* = S_0 \exp(\Omega_{opt}). \quad (10)$$

Если площадь поверхности  $S$  мала,  $S < S_*$ , и среднее число оптимальных проколов меньше единицы, усредненный по ансамблю коэффициент передачи определяется интегралом в (8), в котором нижний предел должен быть заменен на величину  $u = u_f$ , соответствующую проколам, чье среднее число для этой площади порядка единицы,  $S\rho(u_f) \sim 1$ . Тогда, с точностью до предэкспоненциального фактора, имеем

$$\langle A \rangle = S_* b \exp[-(u_f - u_{opt})], \quad S < S_*. \quad (11)$$

По определению и согласно (7) и (10), величина  $u_f$  удовлетворяет соотношению

$$\frac{S}{S_*} \exp[\Omega_{opt} - \Omega(u_f)] = 1. \quad (12)$$

Отметим, что в то время как для больших размеров источника  $S > S_*$  величина  $\langle A \rangle$  уменьшается пропорционально площади, то, согласно (11) и (12), для малых размеров источника  $S < S_*$ , она уменьшается гораздо быстрее.

Еще один эффект, вызванный флуктуациями свойств неупорядоченной среды, состоит в увеличении статистического разброса коэффициента передачи  $\langle A \rangle$  с уменьшением размера источника. Расчеты, аналогичные выполненным для проводимости туннельных барьеров в [2], показывают, что относительный разброс  $\Delta(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle A \rangle$  мал, если

$S > S_*$ , сравним с единицей при  $S < S_*$ , и может быть много больше единицы, если  $S \ll S_*$ .

Принимая во внимание результаты, полученные для коэффициента передачи, можно заключить, что коэффициент перенормировки мощности источника стремится к единице для источников больших размеров ( $K \cong 1$  при  $S \gg S_*$ ), и его средняя величина для малых размеров определяется выражением

$$\langle K \rangle \cong \langle A \rangle / B \ll 1 \text{ при } S \ll S_*. \quad (13)$$

Как и для величины  $A$ , статистический разброс  $\Delta(K)$  коэффициента перенормировки возрастает с уменьшением площади. Естественно, характерная площадь  $S_*$ , разделяющая области с двумя различными режимами переноса примесей (флуктуации несут существенны при  $S > S_*$  и должны учитываться при  $S < S_*$ ), порядка  $a^2$ .

Таким образом, пространственные флуктуации характеристик среды существенно подавляют усредненную по ансамблю мощность для источников малых размеров. В то же время значения эффективной мощности имеют большой статистический разброс.

В данной работе рассмотрены эффекты, к которым приводят флуктуации свойств фрактальной среды на масштабах, меньших нижней границы фрактальности. Показано, что в случае, когда размеры источника примесей оказываются меньше предельных масштабов, пространственные флуктуации проводимости приводят к значительной перенормировке мощности источника. Причем с уменьшением размера источника коэффициент перенормировки катастрофически уменьшается, а статистический разброс его возможных значений растет.

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. *Isichenko, M.B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media // Reviews of modern physics. — 1992. — Vol. 64, №. 4.
2. *Raikh, E.M. and I.M. Ruzin* // Mesoscopic Phenomena in Solids / Ed. by B.L. Altshuler, P.A. Lee and R.A. Webb. — North-Holland, Amsterdam, 1991.

## **Х. Флуктуационный подход к оценке безопасности захоронения радиоактивных отходов**

*Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко*

### **Введение**

Один из вариантов решения проблемы долгоживущих ( $10^5$  лет и более) радиоактивных отходов (РАО) состоит в захоронении их в ненасыщенных скальных породах. В связи с этим возникают задачи о миграции радионуклидов в слабопроницаемых геологических средах и об оценке надежности захоронения РАО. Обычная (классическая) диффузия в упорядоченных твердых телах представляет собой процесс чрезвычайно медленный и потому к данным задачам прямого отношения не имеет. В реальных скальных породах присутствуют трещины, которые время от времени способны частично насыщаться влагой и за счет адвекции обеспечивать транспорт примесей. Система трещин характеризуется распределением как по геометрическим и иным характеристикам отдельных трещин, так и по их взаимному расположению. Соответственно трещины распределены и по своей роли в осуществлении переноса радионуклидов. Существенно, что данная система является в высшей степени нерегулярной.

Вся задача о количественных характеристиках проницаемости для радионуклидов естественного барьера, реализуемого ненасыщенной скальной породой, является исключительно сложной. Она требует разработки новых теоретических подходов, проведения экспериментов по диагностике геологической среды и выполнения трудоемких математических расчетов. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы обратить внимание на некоторые следствия в отношении надежности захоронения РАО, вытекающие из самого свойства нерегулярности геологической среды. Эти следствия касаются выбора оптимальных геометрических характеристик захоронения и предельно возможной точности оценок надежности захоронения РАО в ненасыщенных скальных породах. В ходе анализа мы воспользуемся представлениями, которые были развиты в теории нерегулярных твердотельных систем [1, 2].

## **Усредненный по распределению характеристик среды критерий надежности захоронения**

Надежность захоронения РАО в скальной породе определяется величиной потока активных радионуклидов в водный горизонт, который находится на глубине нескольких сот метров относительно самого захоронения. Мы отвлекаемся от учета роли искусственного (инженерного) барьера, препятствующего распространению РАО, принимая во внимание лишь естественный барьер, осуществляемый скальной породой. Тем самым обсуждаемые ниже оценки носят консервативный характер. С учетом этой оговорки критерий надежности захоронения можно сформулировать в следующем виде:

$$q(t)f(t) < q_c. \quad (1)$$

Здесь функция  $q(t)$  определяет полный поток радионуклидов в водный горизонт в момент времени  $t$ , отсчитываемый от начала захоронения;  $f(t)$  — убывающая со временем функция, представляющая собой фактор ослабления активности радионуклидов, характерный временной масштаб которого имеет порядок периода полураспада нуклидов, составляющих основную долю РАО;  $q_c$  — предельно допустимый (с точки зрения нанесения ущерба окружающей среде) поток активных радионуклидов в водный горизонт.

Величину потока  $q(t)$  можно представить в форме

$$q(t) = \frac{N}{V} S \sigma(t). \quad (2)$$

Здесь  $N$ ,  $V$  и  $S$  — суммарное число радионуклидов в захоронении при  $t=0$ , объем и площадь поверхности захоронения;  $\sigma(t)$  — зависящая от времени удельная проницаемость горного массива (относенная к единицам концентрации радионуклидов в захоронении и к его площади), обеспечивающая поток  $q(t)$  в водный горизонт.

Зависимость от времени левой части в неравенстве (1) с учетом соотношения (2) определяется произведением двух сомножителей  $\sigma(t)f(t)$ , первый из которых сначала возрастает и лишь на очень больших временах убывает, а второй — только убывает. В виду этого обстоятельства произведение  $\sigma(t)f(t)$  обладает максимумом, благодаря чему критерий надежности (1) можно переформулировать в виде:

$$R \equiv \frac{N}{V} S \tilde{\sigma} < 1. \quad (3)$$

Введенную здесь безразмерную величину  $R$  будем в дальнейшем называть фактором риска. Вошедшая в него эффективная проницаемость

$$\tilde{\sigma} = \max_t \{ \sigma(t) f(t) \}, \quad (4)$$

как и сама функция  $\sigma(t)$ , определяется редкими и случайно распределенными в пространстве конфигурациями, обусловленными трещинами в скальной породе. Это делает нашу задачу похожей на задачу о проводимости туннельных диодов, флуктуационная теория которых была разработана Райхом и Рузиным [2,3]. По аналогии с [3] будем называть указанные ситуации проколами, представляя проницаемость, обеспечиваемую отдельным выходящим на поверхность захоронения проколом, в форме:

$$A = A_0 e^{-u}. \quad (5)$$

Здесь  $e^{-u}$  — эффективная удельная проницаемость по сечению прокола;  $A_0$  — эффективная площадь его поперечного сечения. Введем далее усредненную по ансамблю реализаций плотность проколов

$$\rho(u) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_i \delta(u - u_i). \quad (6)$$

Суммирование здесь происходит по всем возможным проколам. Величина  $\rho(u) du$  отвечает концентрации проколов, соответствующих значению функции  $\ln \tilde{\sigma}$ , лежащему в интервале от  $-u$  до  $-u + du$ . Интерес представляют крайне редкие проколы, которые обеспечивают заметный вклад в величину эффективной проницаемости  $\tilde{\sigma}$ . Поэтому зависимость плотности проколов  $\rho(u)$  от переменной  $u$  можно представить в экспоненциальном виде:

$$\rho(u) = \frac{1}{S_0} \exp[-\Omega(u)]. \quad (7)$$

Здесь  $\Omega(u)$  — функция, обладающая свойствами:

$$\Omega(u) \gg 1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} > 0. \quad (8)$$

Величина  $S_0$  имеет размерность площади и без ограничения общности может быть положена равной  $A_0$ ,

$$S_0 = A_0. \quad (9)$$

Среднее значение удельной проницаемости, справедливое для достаточно больших значений площади контакта,  $S$ , с учетом равенств (5), (7), (9) может быть представлено в виде интеграла

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle = \int_0^{\infty} du A_0 e^{-u} \rho(u) = \int_0^{\infty} du e^{-u - \Omega(u)}. \quad (10)$$

В силу свойств (8), подынтегральное выражение в (10) обладает резким пиком при значении переменной  $u = u_{opt}$ , отвечающей оптимальным проколам и определяемой из соотношения

$$\left( \frac{\partial \Omega(u)}{\partial u} \right)_{u=u_{opt}} + 1 = 0. \quad (11)$$

Поэтому с точностью до предэкспоненциального множителя будем иметь:

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle \approx \exp[-u_{opt} - \Omega_{opt}]. \quad (12)$$

Здесь  $\Omega_{opt} = \Omega(u_{opt})$ . Условие применимости результата (12) соответствует требованию того, чтобы среднее количество оптимальных проколов, приходящихся на поверхность площади контакта, было велико,  $S\rho(u_{opt}) \gg 1$ . С учетом выражения (7) это требование приобретает вид:

$$v > 1, \quad (13)$$

где

$$v = \frac{\ln(S/S_0)}{\Omega_{opt}} \quad (14)$$

есть безразмерная характеристика площади.

При меньших значениях площади, когда  $v < 1$ , среднее значение количества оптимальных проколов, приходящихся на нее, оказывается много меньше единицы, усредненная по ансамблю реализаций удельная прозрачность определится интегралом (6), в котором теперь в качестве нижнего предела вместо нуля будет значение переменной интегрирования  $u = u_f$ , отвечающее количеству проколов на данной площади порядка единицы:

$$\tilde{\sigma}(v) = \int_{u_f}^{\infty} du \exp[-u - \Omega(u)], \quad v < 1. \quad (15)$$

Величина  $u_f$  есть решение уравнения

$$\frac{S}{S_0} \exp[-\Omega(u_f)] = 1, \quad (16)$$

которое с учетом определения (14) приобретает форму:

$$\Omega(u_f) = v\Omega_{opt}. \quad (17)$$

Выражение (15) для удельной прозрачности с точностью до предэкспоненциального множителя принимает вид:

$$\tilde{\sigma}(v) \approx \exp(-u_f - v\Omega_{opt}), \quad v < 1. \quad (18)$$

Естественно, что  $\tilde{\sigma}(v) < \langle \tilde{\sigma} \rangle$  при значениях  $v < 1$ , причем с уменьшением величины  $v$  и, соответственно, площади контакта со средой,  $S$ , удельная величина прозрачности довольно быстро уменьшается.

Установленные свойства среднего значения эффективной прозрачности среды позволяют проследить поведение средней величины фактора риска,  $\langle R \rangle$ , в зависимости от безразмерной характеристики площади контакта,  $v$ , при фиксированных прочих характеристиках захоронения, включая начальное число радионуклидов,  $N$ . При больших значениях площади контакта со средой, когда  $v > 1$ , удельная прозрачность  $\tilde{\sigma}(v)$  сводится к величине  $\langle \tilde{\sigma} \rangle$ , не зависящей от площади контакта. Поэтому с учетом равенства (14) из (3) получаем:

$$P(v) \equiv \frac{\langle R(v) \rangle}{\langle R(1) \rangle} = \exp\left[-\frac{1}{2}(v-1)\Omega_{opt}\right], \quad v > 1. \quad (19)$$

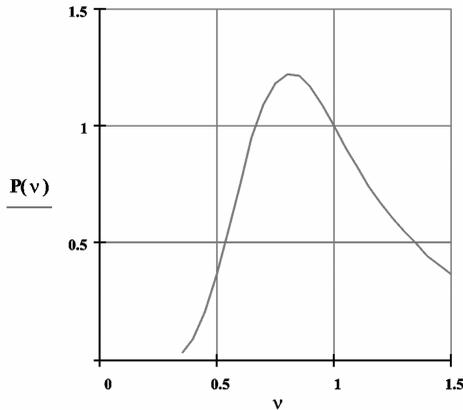
Подставляя соотношения (14) и (16) в определение величины  $R$  из (3), находим зависимость нормированной величины среднего значения фактора риска  $P(v)$  от параметра  $v$  в области  $v < 1$ :

$$P(v) = \exp\left[-(u_f - u_{opt}) + \frac{3}{2}(1-v)\Omega_{opt}\right], \quad v < 1. \quad (20)$$

Из соотношения (19) следует, что при  $v > 1$  среднее значение фактора риска  $\langle R(v) \rangle$  с ростом площади контакта убывает. При значениях площади контакта, отвечающих  $v < 1$ , величина  $\langle R(v) \rangle$ , согласно (20), ведет себя немонотонно, имея максимум при значениях  $(1-v) \ll 1$ :

$$v_{max} \cong 1 - (\Omega_{opt} \Omega''_{opt})^{-1}. \quad (21)$$

Поведение функции  $P(v)$  в зависимости от параметра  $v$  схематически изображено на рисунке.



Схематический вид зависимости нормированного среднего фактора риска  $P(v)$  в зависимости от безразмерной характеристики площади контакта захоронения со средой  $v$

Рассмотрим простой пример. Пусть  $\Omega(u)$  имеет форму:

$$\Omega(u) = \frac{B^2}{u}. \quad (22)$$

Тогда с помощью (11) и (16) имеем:

$$u_{opt} = B, \quad \Omega_{opt} = B, \quad u_f = \frac{B}{v}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (20), получим:

$$P(v) = \exp \left[ \frac{3}{2} \Omega_{opt} \frac{1}{v} (1-v) \left( v - \frac{2}{3} \right) \right], \quad v < 1. \quad (24)$$

Отсюда находим:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (25)$$

## **Дисперсия фактора надежности захоронения**

В связи с тем, что прозрачность скальной породы определяется случайно распределенными характеристиками среды, фактор риска захоронения  $R$ , определенный соотношением (3), испытывает статистический разброс, относительная величина которого совпадает с дисперсией удельной прозрачности:

$$\Delta \equiv \frac{\langle (\delta R)^2 \rangle^{1/2}}{\langle R \rangle} = \frac{\langle (\delta \sigma)^2 \rangle^{1/2}}{\langle \sigma \rangle}. \quad (26)$$

В предположении, что проколы распределены случайно и независимо друг от друга, дисперсия фактора риска для достаточно больших площадей контакта захоронения со средой принимает вид:

$$\Delta \approx \frac{1}{\sigma(v)} \left( \frac{A_0}{S} \int_0^\infty du \rho(u) e^{-2u} \right)^{1/2}. \quad (27)$$

Отсюда, поступая с интегралом так же, как при выводе формулы (12), с точностью до предэкспоненциального множителя находим:

$$\Delta \approx \exp \left[ u_{opt} + \left( 1 - \frac{1}{2}v \right) \Omega_{opt} - u_d - \frac{1}{2} \Omega_d \right]. \quad (28)$$

Здесь  $\Omega_d = \Omega(u_d)$ , величина  $u_d$  определена уравнением:

$$\left( \frac{\partial \Omega(u)}{\partial u} \right)_{u=u_d} + 2 = 0. \quad (29)$$

Отметим, что в силу свойств (8) имеют место неравенства:

$$u_d < u_{opt}, \quad \Omega_d > \Omega_{opt}. \quad (30)$$

Выражение (28) справедливо до тех пор пока количество проколов, отвечающих равенству  $u = u_d$ , ( $d$ -проколов) является большим, т.е. при выполнении неравенства  $v > v_d$ , где

$$v_d = \frac{\Omega_d}{\Omega_{opt}} > 1. \quad (31)$$

Отметим, что в этих условиях и  $v > 1$ , т.е. количество оптимальных проколов также велико.

В том случае, когда среднее количество оптимальных проколов, приходящихся на данную площадь контакта, по-прежнему велико, но количество  $d$ -проколов уже мало, в интеграле (27) нижний предел следует заменить величиной  $u_f$ , определенной уравнением (16), а для удельной прозрачности  $\sigma(v)$  сохранить формулу (12). В результате, будем иметь следующее выражение для дисперсии фактора риска:

$$\Delta \approx \exp\left[-u_f(v) + u_{opt} + (1-v)\Omega_{opt}\right], \quad 1 < v < v_d. \quad (32)$$

Если количество приходящихся на данную площадь контакта и оптимальных, и —  $d$ -проколов мало, то аналогично [2, 3] получим:

$$\Delta \approx 1, \quad v < 1 \quad (33)$$

и

$$\Delta \gg 1, \quad v \ll 1. \quad (34)$$

## **Заключение**

Основные результаты работы состоят в следующем.

Критерий надежности захоронения радиоактивных отходов состоит в требовании, чтобы характерная безразмерная величина  $R$  (фактор риска), определяемая свойствами скальной породы и самого захоронения, была меньше единицы.

Фактор  $R$  подвержен флуктуациям, обусловленным неупорядоченностью геологической среды. Его поведение в зависимости от площади контакта захоронения со средой  $S$  различно в двух случаях: при  $S > S_c$  и  $S < S_c$ . Значение площади  $S = S_c$  соответствует равенству единице используемого в тексте безразмерного параметра  $v$ , и согласно равенству (14),

$$S_c = S_0 \exp(\Omega_{opt}). \quad (35)$$

При  $S > S_c$  среднее значение фактора риска,  $\langle R \rangle$ , слабо убывает с ростом площади контакта  $S$ . Статистический разброс величины  $R$  при этом оказывается малым.

При  $S < S_c$  величина  $\langle R \rangle$  в зависимости от  $S$  ведет себя немонотонно, испытывая максимум при значениях  $S = S_{\max}$ , близких к  $S_c$ . Относительная величина флуктуаций фактора  $R$  (его статистический разброс) в области  $S < S_c$  имеет порядок единицы.

При значениях площади контакта  $S < S_{\max}$  происходит сравнительно быстрое убывание среднего значения фактора риска  $\langle R \rangle$  с уменьшением площади  $S$ . Возможные рекомендации, вытекающие из полученных результатов, в отношении геометрических характеристик захоронения могут состоять в следующем. Линейный размер захоронения  $L$  должен быть заметно меньше характерной длины корреляции, определенной равенством:  $L_c = \sqrt{S_c}$ . С точки зрения надежности захоронения, не исключена целесообразность разбиения большого захоронения, имеющего размер  $L > L_c$ , на ряд малых захоронений с характерными размерами  $L > L_c$ , находящихся на расстояниях друг от друга, значительно больше  $L_c$ .

Оценки надежности захоронения при площадях контакта со средой  $S < S_c$  не могут быть более точными, чем по порядку величины.

Конкретная реализация полученных выводов требует знания экспериментальной информации о свойствах среды, заключенной в статистическом распределении проколов, обеспечивающих свойства ее прозрачности для радионуклидов.

Работа выполнена при поддержке U.S. DOE в рамках программы U.S. CRDF (проект RG0-20101-RW40 с ИБРАЭ РАН), а также РФФИ (грант № 06-08-00176-а).

## **Литература**

1. *Lifshitz, I.M., S.A. Gredeskul, L.A. Pastur* // Sov. Phys. JETP. — 1982. — 56. — P. 1370.
2. *Raikh, M.E., I.M. Ruzin* / Ibid. — 1987. — 65. — P. 1273.
3. *Raikh, M.E., I.M. Ruzin*. Transmittancy Fluctuations in Randomly Non-Uniform Barriers and Incoherent Mesoscopics // Mesoscopic Phenomena in Solids / Ed. by B.L. Altshuler, P.A. Lee, R.A. Webb. — Elsevier, 1991.

Научное издание

## **Труды ИБРАЭ РАН**

*Под общей редакцией чл.- кор. РАН Л. А.Большова*

Выпуск 7

# **ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

*Утверждено к печати Ученым советом  
Института проблем безопасного развития атомной энергетики  
Российской академии наук*

Редактор *А. И. Иоффе*

Издательство «Наука»  
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

Зав. редакцией *М. В. Грачева*

Оригинал-макет подготовлен издательством ООО «Комтехпринт»  
Список литературы приведен в авторской редакции

Сдано в набор 15 октября 2008 г. Подписано в печать 15 ноября 2008 г.

Формат 60 x 90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная 80 г/м<sup>2</sup>

Печать офсетная. Гарнитура «Оффицина»

Уч.-изд. л. 7. Тираж 500. Заказ 18047

Заказное

Отпечатано с готовых диапозитивов типографией ООО «Инфолио-Принт»