

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК**  
**Институт проблем безопасного развития атомной энергетики**

## **ТРУДЫ ИБРАЭ**

Под общей редакцией члена-корреспондента РАН  
*Л. А. Большова*

**Выпуск 8**

# **СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ И ТЕПЛОТДАЧА ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА**

Научный редактор  
член-корреспондент РАН *Л. А. Большов*

Москва Наука 2008

УДК 621.039

ББК 31.4

Т78

**Рецензенты:**

доктор технических наук В. Б. Хабенский,  
доктор технических наук Л. И. Зайчик

**Труды ИБРАЭ РАН** / под общ. ред. чл.-кор. РАН Л.А. Большова ; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. — М. : Наука, 2007— .

**Вып. 8** : Свободная конвекция и теплоотдача жидкости с внутренними источниками тепла / науч. ред. Л.А. Большов. — 2008. — 223 с. : ил. — ISBN 978-5-02-036953-5 (в пер.).

В сборнике представлены результаты исследований свободной конвекции тепло-выделяющей жидкости, проводимых в ИБРАЭ РАН в рамках проблемы тяжелых аварий на АЭС. Сборник состоит из 13 статей. В первых семи статьях произведена классификация режимов теплоотдачи, получены интегральные закономерности для распределения теплового потока к границе, исследованы особенности свободной конвекции в зависимости от геометрии полости и распределения источников тепла. Построена также модель и выполнен численный расчет для двухфазного течения в пористой тепловыделяющей среде. В следующих пяти статьях на основе современных CFD-кодов моделировались турбулентная конвекция, теплопередача расслоенного расплава, разогрев и плавление активной зоны, а также взаимодействие кориаума с бетоном. В последней работе построена термодинамическая модель процессов фазового расслоения многокомпонентной жидкости с внутренними источниками тепла.

Для студентов, аспирантов и специалистов в области явлений тепломассопереноса.

**Proceedings of IBRAE RAS** / Ed. by L.A. Bolshov ; Nuclear Safety Institute (IBRAE) RAS. — Moscow : Nauka, 2007— .

**Issue 8** : Free convection and heat transfer in fluids with internal heat sources heterogeneous media / Ed. by L.A. Bolshov. — 2008. — 223 p. : ill. — ISBN 978-5-02-036953-5 (bound)

The results of investigations of free convection in heat-generating fluid are presented. The works were performed at Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences under the program of severe accidents at NPP's. The collection consists of 13 papers. In the first seven papers, classification of heat-transfer regimes, integral regularities for heat flux to the boundary, dependence of free convection on cavity geometry and heat source distribution are obtained. In addition, a model is developed and numerical calculations are conducted for two-phase flow in porous heat-generating media. In the next five papers, turbulent convection, heat transfer from a stratified melt, heating up and melting of core, and corium-concrete interactions are modeled using modern CFD-codes. In the last paper thermodynamic model is developed for phase stratification of multicomponent fluid with internal heat sources.

The assumed target for the issue are students and specialists in heat and mass transfer phenomena.

ISBN 978-5-02-036953-5

© Продолжающееся издание «Труды ИБРАЭ РАН», 2007 (год основания), 2008

© Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2008

© Коллектив авторов, 2008

© Редакционно-издательское оформление. Издательство «Наука», 2008

## Содержание

Предисловие .....	5
I. Полуколичественная теория конвективной теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла <i>Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, В. Ф. Стрижов</i> .....	7
II. Предельные угловые закономерности теплоотдачи и стратификация тепловыделяющей жидкости <i>Л. А. Большов, П. С. Кондратенко</i> .....	20
III. Влияние магнитного поля на свободно-конвективный пограничный слой в проводящей жидкости <i>Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев</i> ....	34
IV. Численное моделирование свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в осесимметричном замкнутом объеме <i>Д. Г. Григорул, П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский</i> .....	40
V. Свободная конвекция в квазидвумерной (slice-) геометрии <i>П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский</i> .....	58
VI. Теплообмен в жидкости с неоднородным объемным энерговыделением <i>П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский, В. Ф. Стрижов</i> .....	95
VII. Двухфазное течение в пористой тепловыделяющей среде <i>Д. Г. Григорул, П. С. Кондратенко</i> .....	111
VIII. Численное моделирование экспериментов по свободной турбулентной конвекции в широком диапазоне условий <i>Д. Г. Григорул, А. С. Филиппов</i> .....	128
IX. Численное исследование конвективной теплоотдачи расслоенного расплава с объемным энерговыделением <i>Д. Г. Григорул, А. С. Филиппов</i> .....	140
X. Численное моделирование высокочастотной магнитной гидродинамики в задачах разогрева и плавления кориума <i>В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Н. Семенов, В. Ф. Стрижов</i> .....	153
XI. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса в стратифицированном расплавленном пуле <i>В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Ф. Стрижов</i> .....	174
XII. CFD-подход для моделирования взаимодействия ЛТСМ с бетоном <i>В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Ф. Стрижов</i> .....	188
XIII. Термодинамическая модель системы U-ZR-FE-O <i>В. Д. Озрин, О. В. Тарасов</i> .....	210



## Предисловие

Свободная конвекция является предметом систематических исследований уже более ста лет. Однако в подавляющем большинстве до конца прошлого века они были посвящены конвекции, обусловленной внешними граничными условиями. Проблемы безопасности атомной энергетики, особенно после аварий на АЭС в Three Mile Island и Чернобыле, выдвинули новый класс задач — о свободной конвекции жидкостей, обладающих внутренними источниками тепла. Фундаментальные исследования таких задач ведутся в Институте проблем безопасного развития атомной энергетики РАН с самого его основания. Работы этого цикла, вошедшие в сборник, в отношении подходов могут быть условно разбиты на три направления.

Одно из них базируется на аналитических оценках, вытекающих из свойств симметрии, законов сохранения, а также соображений подобия и размерности. Преимущества этого метода заключаются в возможности получения общей качественной (а также полуколичественной) структуры решения задачи и в отсутствии ограничений на область изменения ее параметров. Результаты этого направления изложены в статьях I—III, V, VI. В работе I произведена классификация режимов теплоотдачи тепловыделяющей жидкости, находящейся в замкнутом объеме, и получены интегральные закономерности в зависимости от мощности внутренних источников тепла. В исследовании II найдено распределение теплового потока на нижнем участке границы занимаемого жидкостью объема. В статье III установлена структура свободно-конвективного пограничного слоя в присутствии магнитного поля. В работе V исследованы закономерности теплоотдачи жидкости в квазидвумерной геометрии, используемой для экспериментального моделирования. В статье VI изучены характеристики свободной конвекции тепловыделяющей жидкости, охлаждаемой с границы, с неоднородным распределением внутренних источников тепла.

Второе направление состоит в сочетании аналитических и численных подходов. Этот метод, сохраняя достоинства первого направления, дал возможность получить ряд количественных результатов при существенной экономии вычислительных ресурсов. В работе IV предложен упрощенный метод расчета и на его основе численно решена задача о ламинарной конвекции в цилиндрическом и полусферическом объемах. К этому направлению примыкает статья VII, в которой построена модель и выполнен численный расчет двухфазного течения в пористой тепловыделяющей среде.

Наконец, третье направление состоит в прямом численном моделировании путем использования современных CFD-кодов. Ценность таких расчетов в

том, что они по своей сути являются численными экспериментами. Результаты этих подходов представлены в работах VII—XII. В статье VII на основе коммерческого кода Fluent проведено численное моделирование экспериментов по свободной турбулентной конвекции жидкости между плоскопараллельными пластинами и экспериментов по конвекции тепловыделяющей жидкости в полусферическом сосуде. В работах VIII и X на основе современных кодов исследована конвективная теплоотдача расслоенного расплава материалов активной зоны (кориума), находящегося внутри массивного стального корпуса, который может образоваться при гипотетической аварии реактора типа ВВЭР-1000. В статье IX представлены результаты численного моделирования процессов разогрева и плавления материалов активной зоны с учетом влияния высокочастотной магнитной гидродинамики. В работе X для изучения взаимодействия расплавленных кориумных масс с бетоном разработаны новая математическая модель и программное обеспечение, позволяющие моделировать широкий спектр тепло- и массообменных процессов. Прямое численное моделирование проводилось также в статьях V и VI.

Отдельно следует отметить работу XIII. В ней построена термодинамическая модель процессов фазового расслоения многокомпонентной жидкости с внутренними источниками тепла, моделирующей расплав материалов активной зоны на днище корпуса реактора типа ВВЭР при тяжелой аварии.

Мы надеемся, что материалы этого сборника дадут читателю возможность составить достаточно полное представление о работах, ведущихся в ИБРАЭ РАН по свободной конвекции жидкости с внутренними источниками тепла.

*Л. А. Большов,  
П. С. Кондратенко,  
В. Ф. Стрижов*

# I. Полуколичественная теория конвективной теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла

*Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, В. Ф. Стрижов*

## 1. Введение

При анализе сценариев тяжелых аварий на АЭС с разрушением активной зоны возникает проблема удержания радиоактивного расплава в корпусе реактора. Для ее решения требуется знать распределение теплоотдачи расплава по границе корпуса. Отсюда возникает задача о свободной конвекции тепловыделяющей жидкости, заключенной в замкнутом объеме.

Цель настоящей работы — получить полуколичественные соотношения для теплоотдачи энерговыделяющей жидкости, базируясь на современных представлениях о свободной конвекции. В разделе 2 сформулирована общая картина конвекции. В разделе 3 получен ряд соотношений на основе условий баланса энергии. В разделе 4 произведена классификация основных режимов теплоотдачи и получены полуколичественные соотношения для них. В разделе 5 проанализирован асимптотический режим теплоотдачи. В разделе 6 дано сравнение полученных результатов с экспериментом. В заключительном разделе кратко подведены итоги работы.

## 2. Общая картина конвекции

Будем предполагать, что занимаемый жидкостью с внутренними источниками тепла объем  $V$ , схематически изображенный на рис. 1, отвечает фигуре вращения вокруг вертикальной оси и обладает плоским верхним горизонтальным участком границы площади  $S_{\text{сп}}$ . Остальную, обращенную вниз часть границы будем обозначать  $S_{\text{дн}}$ . Вся границу объема  $S$  будем считать твердой и изотермической. Вертикальный размер объема (высоту) обозначим  $H$ .

Общую картину конвективного теплопереноса в объеме  $V$  можно представить следующим образом.

С помощью горизонтальной плоскости, проходящей через точку максимума по объему от среднего по времени значения температуры жидкости, весь объем  $V$  можно мысленно разделить на две части. Для течения в верхней части  $V_+$  с высотой  $H_+$  (см. рис. 1) в силу инверсного распределения температуры складывается ситуация, близкая к условиям для конвекции Рэлея—Бенара (РБ) [1, 2]. Свободно-конвективное течение, возникающее таким способом, обеспечивает передачу тепла к верхней горизонтальной части границы  $S_{up}$ . Передача тепла к обращенному вниз кривому участку границы площади  $S_{dn}$  определяется тонким по сравнению с  $H$  пограничным слоем (ПС), в котором жидкость стекает вниз. Медленное возвратное течение жидкости в условиях положительного градиента температуры по вертикали вверх не препятствует формированию состояния устойчивой температурной стратификации вне пограничного слоя в нижней части объема  $V_-$ .

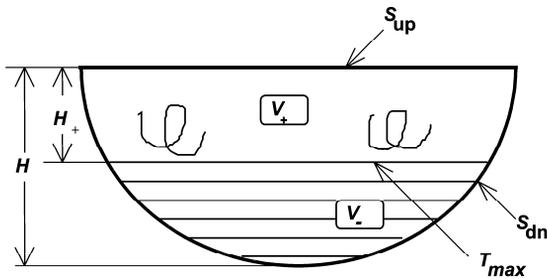


Рис. 1. Центральный вертикальный разрез занимаемого жидкостью объема

В этой работе нас будут интересовать интегральные закономерности теплоотдачи, т. е. усредненные отдельно по участкам границы  $S_{up}$  и  $S_{dn}$ . Их вывод будет базироваться на следствиях, вытекающих из общего условия энергетического баланса и фрагментарного сходства между процессами теплопередачи в жидкостях с внутренними источниками тепла и без них.

Несколько замечаний о способе описания результатов. Основными характеристиками теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла являются распределение плотности потока тепла к границе  $q$  и максимальное превышение температуры жидкости в объеме над температурой границы  $\Delta T$ . Закономерности, связанные с этими характеристиками, удобно представлять в виде зависимостей безразмерных чисел Нуссельта  $Nu$  и Рэлея  $Ra$ , определенных соотношениями

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{H} \text{Nu},$$

$$\text{Ra} = \frac{g \alpha \Delta T H^3}{\nu \chi},$$

от модифицированного числа Рэлея

$$\text{Ra}_I = \frac{g \alpha Q H^5}{\lambda \nu \chi}.$$

В приведенных формулах  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  — теплопроводность, кинематическая вязкость, температуропроводность и термический коэффициент объемного расширения жидкости соответственно;  $H$  — характерный линейный размер по вертикали занимаемого жидкостью объема (высота);  $g$  — ускорение земного тяготения;  $Q$  — плотность мощности внутренних источников тепла, распределение которых предполагается однородным. Естественно, что число Нуссельта, характеризующее распределение потока тепла к границе, является функцией координат на поверхности границы. Число  $\text{Ra}_I$  по существу есть безразмерная мощность внутреннего тепловыделения жидкости.

### **3. Условие энергетического баланса**

Условие стационарного энергетического баланса для жидкости с однородно распределенными источниками тепла, отвечающими объемной плотности мощности  $Q$ , имеет вид

$$\frac{\lambda \cdot \Delta T}{H} \int_S dS \cdot \text{Nu} = QV \quad (1)$$

(обозначения  $\Delta T$  и  $\text{Nu}$  даны в разделе 2). Отсюда, выражая величины  $\Delta T$  и  $Q$  через обычное и модифицированное числа Рэлея (см. раздел 2), приходим к соотношению

$$\text{Ra} \cdot \overline{\text{Nu}} = \text{Ra}_I. \quad (2)$$

В нем величина  $\overline{\text{Nu}}$  имеет смысл усредненного по всей границе числа Нуссельта и определена равенством

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{H}{V} (S_{\text{up}} \text{Nu}_{\text{up}} + S_{\text{dn}} \text{Nu}_{\text{dn}}), \quad (3)$$

в котором

$$Nu_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} dS \cdot Nu \quad (\text{где } i = \text{up, dn}) \quad (4)$$

суть частично усредненные значения числа Нуссельта — по обращенным вверх и вниз участкам границы.

Теоретические зависимости характеристик теплоотдачи, а также соответствующие им результаты экспериментального и численного моделирования обычно выражаются степенными функциями. Определим показатели экспонент  $\gamma_i$ ,  $\beta_i$  (где  $i = \text{up, dn}$ ),  $\beta$  и  $\varepsilon$  соотношениями

$$\begin{aligned} Nu_i &\sim Ra_i^{\gamma_i}, & Nu_i &\sim Ra^{\beta_i}, \\ \overline{Nu} &\sim Ra^{\beta}, & Ra &\sim Ra_i^{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых опущены численные коэффициенты порядка единицы.

Подстановка соотношений (5) в (2) ведет к установлению следующих важных связей между показателями степеней:

$$\varepsilon = (1 + \beta)^{-1}, \quad (6)$$

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{1 + \beta}. \quad (7)$$

Наша дальнейшая задача состоит в том, чтобы определить степенные показатели  $\gamma_{\text{up}}$ ,  $\gamma_{\text{dn}}$  и  $\varepsilon$ , отвлекаясь от численных коэффициентов при степенных зависимостях порядка единицы, установление которых находится за пределами возможностей излагаемой здесь полуколичественной теории. Будем предполагать, что число Прандтля принимает значения больше или порядка единицы,  $Pr \geq 1$ .

Заметим, что зависимости (5) с постоянными показателями экспонент справедливы в ограниченных интервалах изменения числа  $Ra_i$ , отвечающих определенным комбинациям режимов теплопередачи к участкам границы  $S_{\text{up}}$  и  $S_{\text{dn}}$ . Изменение этих режимов ведет к изменению (резкому или плавному) показателей степеней.

#### 4. Основные режимы теплоотдачи

В нашем последующем анализе теплоотдачи тепловыделяющей жидкости мы будем исходить из двух аналогий с жидкостью без внутренних источ-

*1. Полуколичественная теория конвективной теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла*

*Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, В. Ф. Стрижов*

ников тепла. Первая состоит в подобии между процессами конвекции в объеме  $V_+$  рассматриваемой здесь задачи и конвекцией Рэлея-Бенара. Вторая аналогия заключается в близком сходстве пограничных слоев, формирующихся в двух типах жидкостей. Правомерность обеих аналогий основана на следующих соображениях. В интересующей нас области больших значений числа Рэлея,  $Ra \gg 1$ , главная часть теплосопротивления при передаче тепла к границе обусловлена тонкими приграничными тепловыми слоями. Их толщина много меньше характерного линейного размера всего объема жидкости, определяемого высотой  $H$ . Поэтому мощность тепловыделения в указанных слоях пренебрежимо мала по сравнению с тепловыми потоками, проходящими через эти слои. Отсюда следует, что выделение тепла в данных слоях практически не оказывает влияния на их структуру и, соответственно, на характеристики теплоотдачи. Перечислим основные характеристики режимов теплопередачи жидкости без внутренних источников тепла, являющихся прототипами для тепловыделяющей жидкости (конвекция РБ и ПС).

Конвекция РБ, происходящая в горизонтальном плоскопараллельном слое жидкости высоты  $H_+$ , подогреваемого снизу, имеет следующие режимы теплопередачи, отличающиеся друг от друга величинами показателя  $\beta_{RB}$  в соотношении для числа Нуссельта

$$Nu_{RB} \sim Ra_+^{\beta_{RB}}, \quad (8)$$

где  $Ra_+ = Ra(H \rightarrow H_+)$ . В интервале значений числа Рэлея  $Ra_{c1} < Ra < Ra_{c2}$  имеет место ламинарный режим конвекции, и  $\beta_{RB} = 1/4$  [3]. В области  $Ra_{c2} < Ra < Ra_{c3}$  осуществляется режим мягкой турбулентности, и  $\beta_{RB} = 1/3$  [4]. Наконец, при числах Рэлея  $Ra > Ra_{c3}$  имеет место режим жесткой турбулентности с  $\beta_{RB} = 2/7$  [4]. Критические значения  $Ra_{c1}$ ,  $Ra_{c2}$  и  $Ra_{c3}$  зависят от аспектного отношения  $A = D/H_+$ , где  $D$  — горизонтальный размер ячейки РБ.  $Ra_{c1} \sim 10^3$  при значениях  $A > 1$ . При значении  $A \approx 1$   $Ra_{c2} = 2 \cdot 10^5$  и  $Ra_{c3} \cong 4 \cdot 10^7$  [4]. В случае  $A = 6,5$   $Ra_{c3} \cong 10^4$  [5]. Исходя из двух последних фактов, можно предположить, что при достаточно больших значениях аспектного отношения ламинарное течение в слое РБ с ростом числа  $Ra_+$  при значениях  $Ra_+ > Ra_{c1}$  испытывает переход к режиму жесткой турбулентности непосредственно, минуя режим мягкой турбулентности, который в этом случае не реализуется.

Пограничный слой на вертикальной стенке в жидкости без внутренних источников тепла, являющийся прототипом для ПС на участке границы  $S_{dn}$  объема с тепловыделяющей жидкостью, может находиться в двух режимах теплопередачи, отличающихся показателем степени в соотношении для числа Нуссельта

$$\text{Nu}_{BL} \sim \text{Ra}^{\beta_{BL}}. \quad (9)$$

Это ламинарный режим с  $\beta_{BL} = 1/4$  [6] и турбулентный — с  $\beta_{BL} = 1/3$  [7]. Переход между двумя режимами происходит при значении числа Рэлея, равном критическому значению  $\text{Ra} = \text{Ra}_*$ , которое зависит от числа Прандтля. Согласно теоретическим оценкам [8] эта зависимость при значениях  $\text{Pr} > 1$  имеет форму  $\text{Ra}_* \sim \text{Pr}^2$ . В то же время имеющий здесь место численный коэффициент, как показывает опыт, способен меняться от эксперимента к эксперименту на два порядка [9, 10], что может нивелировать данную зависимость в случае, когда  $\text{Pr}$  меняется в не слишком широких пределах. Следует отметить, что согласно эксперименту критическое число Рэлея для смены режимов в ПС оказывается выше критического значения этого числа для перехода от мягкой турбулентности к жесткой в конвекции РБ, т. е.  $\text{Ra}_* > \text{Ra}_{c3}$ .

В ходе дальнейшего анализа будем считать, что каждый режим теплоотдачи во всем объеме  $V$  тепловыделяющей жидкости представляет собой комбинацию конвективных режимов, осуществляющихся в области  $V_+$  и в ПС. Поэтому с учетом определения числа  $\text{Nu}$  имеем

$$\text{Nu}_{up} \sim \frac{H}{H_+} \text{Ra}_+^{\beta_{RB}} = \left( \frac{H}{H_+} \right)^{1-3\beta_{RB}} \text{Ra}^{\beta_{RB}}, \quad (10)$$

$$\text{Nu}_{dn} \sim \text{Ra}^{\beta_{BL}}. \quad (11)$$

Вследствие того что граница раздела между областями  $V_+$  и  $V_-$  отвечает максимуму среднего значения температуры, различие между величинами  $H_+$  и  $H_-$  тесно связано с различием между величинами  $\text{Nu}_{up}$  и  $\text{Nu}_{dn}$ . С учетом неравенств

$$|\beta_{RB} - \beta_{BL}| \ll \beta_{BL}, \quad 1 - 3\beta_{RB} \ll 1 \quad (12)$$

и ввиду того, что при значениях модифицированного числа Рэлея  $\text{Ra}_j \leq 10^{13} \div 10^{14}$  поочередно реализуются случаи  $\beta_{RB} > \beta_{BL}$  и наоборот,

можно считать, что в этом диапазоне  $H_+ \approx H/2$ , и, соответственно, положить  $Ra_+ \approx (1/8)Ra$ . В этой же области чисел  $Ra_I$  в силу определений (3), (5) имеет место соотношение

$$\beta = \frac{\beta_{up} + \beta_{dn}}{2} \pm \frac{|\beta_{up} - \beta_{dn}|}{2}. \quad (13)$$

С учетом соотношений (10), (11), (13) и на основе изложенной выше информации о характеристиках теплопередачи в жидкости без внутренних источников тепла, в отношении тепловыделяющей жидкости могут быть выделены четыре основных режима теплоотдачи, которые отличаются типами конвекции в области  $V_+$  и в ПС и, соответственно, показателями степеней  $\beta$ ,  $\varepsilon$  и  $\gamma_i$ , определенными соотношениями (5).

I.  $Ra_I^{(1)} < Ra_I < Ra_I^{(2)}$ : ламинарная конвекция в области  $V_+$  и в ПС

$$\beta = 0,25, \quad \varepsilon = 0,8, \quad \gamma_{up} = \gamma_{dn} = 0,2. \quad (14)$$

II.  $Ra_I^{(2)} < Ra_I < Ra_I^{(3)}$ : мягкая турбулентность в области  $V_+$ , ламинарное течение в ПС

$$\begin{aligned} \beta &= 0,290 \pm 0,040, & \varepsilon &= 0,775 \pm 0,025, \\ \gamma_{up} &= 0,263 \pm 0,008, & \gamma_{dn} &= 0,195 \pm 0,005. \end{aligned} \quad (15)$$

III.  $Ra_I^{(3)} < Ra_I < Ra_I^{(4)}$ : жесткая турбулентность в области  $V_+$ , ламинарное течение в ПС

$$\begin{aligned} \beta &= 0,270 \pm 0,020, & \varepsilon &= 0,790 \pm 0,030, \\ \gamma_{up} &= 0,225 \pm 0,004, & \gamma_{dn} &= 0,197 \pm 0,003. \end{aligned} \quad (16)$$

IV.  $Ra_I^{(4)} < Ra_I < 10^2 \cdot Ra_I^{(4)}$ : жесткая турбулентность в области  $V_+$ , комбинация ламинарного и турбулентного течения в ПС

$$\begin{aligned} \beta &= 0,31 \pm 0,025, & \varepsilon &= 0,765 \pm 0,015, \\ \gamma_{up} &= 0,218 \pm 0,004, & \gamma_{dn} &= 0,255 \pm 0,005. \end{aligned} \quad (17)$$

Значения степенных показателей, указанных для режима IV, соответствуют концу отвечающего этому режиму интервала значений числа Рэлея.

В соответствии с приведенными характеристиками теплопередачи в жидкости без внутренних источников тепла и с учетом соотношений (13), (5) и (6) границы между режимами I—IV (14)—(17) определены следующим образом:

$$\begin{aligned} Ra_I^{(1)} &\cong 10^5, & Ra_I^{(2)} &\cong 15(Ra_{c2})^{1,25}, \\ Ra_I^{(3)} &\cong 15(Ra_{c3})^{1,29}, & Ra_I^{(4)} &\cong 15(Ra_*)^{1,27}. \end{aligned} \quad (18)$$

Значения величин  $Ra_I^{(2)}$  и  $Ra_I^{(3)}$  зависят от аспектного отношения  $A$  области  $V_+$ , а величины  $Ra_I^{(4)}$  — от числа Прандтля. При достаточно больших значениях отношения  $A$  режим II может отсутствовать вовсе, и тогда режим III следует непосредственно за режимом I. Как уже отмечалось, имеет место некоторая неопределенность в зависимости критического значения  $Ra_*$  от числа  $Pr$ . Соответственно эта неопределенность отражается и на значении граничного значения  $Ra_I^{(4)}$ . В качестве примера, для жидкости с теплогидродинамическими характеристиками, отвечающими воде, указанное граничное значение приблизительно равно  $Ra_I^{(4)} \cong 2,5 \cdot 10^{13}$  [11].

Интервал значений числа  $Ra_I$  от  $10^{13}$  до  $10^{17}$  представляет наибольший интерес для проблемы безопасности ядерных реакторов. В этот интервал попадает область реализации режима IV, где происходит смена ламинарного режима течения в пограничном слое на турбулентный. При значениях  $Ra_I > 10^2 Ra_I^{(4)}$  турбулентная часть пограничного слоя становится доминирующей. С учетом численных коэффициентов в зависимостях  $Nu(Ra)$  для ламинарного и турбулентного ПС в жидкости без внутренних источников тепла [6, 7] зависимость  $Nu_{dn}$  от  $Ra$  в режиме IV для тепловыделяющей жидкости может быть приближенно представлена в виде

$$Nu_{dn} \approx 0,68(Ra_*)^{1/4} + 0,15 \left[ Ra^{1/3} - (Ra_*)^{1/3} \right]. \quad (19)$$

Процесс перестройки режима течения в ПС приводит к значительному усилению зависимости  $Nu_{dn}$  от  $Ra$ . Описывая, как и ранее, эту зависимость соотношением типа (5), можно определить степенной показатель  $\gamma_{dn}$  как логарифмическую производную выражения (19). При этом он будет функцией  $Ra_I$ . Определим среднюю величину показателя  $\gamma_{dn}$  соотношением

$$\bar{\gamma}_{dn} = \frac{\Delta \ln \text{Nu}_{dn}}{\Delta \ln \text{Ra}_l}, \quad (20)$$

в котором  $\Delta \ln \text{Nu}_{dn}$  является изменением величины  $\ln \text{Nu}_{dn}$  на интервале усреднения от  $\text{Ra}_l^{(4)}$  до  $\text{Ra}_l^{(4)} \exp[\Delta \ln \text{Ra}_l]$ . Принимая  $\text{Ra}_l^{(4)} = 2,5 \cdot 10^{13}$ , что соответствует жидкости с теплогидродинамическими характеристиками воды, и  $\Delta \ln \text{Ra}_l = \ln 10^2$ , а также используя формулу (19), с помощью (20) получаем оценку для  $\bar{\gamma}_{dn}$  на интервале смены режима течения в ПС:

$$\bar{\gamma}_{dn} \approx 0,36. \quad (21)$$

## **5. Асимптотический режим**

Поскольку граница раздела между областями  $V_+$  и  $V_-$  определяется положением максимума среднего значения температуры жидкости в объеме  $V$ , то с ростом  $\text{Ra}_l$  при условии  $\beta_{up} \neq \beta_{dn}$  эта граница испытывает смещение, обеспечивающее минимум роста разности температур  $\Delta T$ . Вплоть до значения  $\text{Ra}_l$ , равного  $\text{Ra}_l^{(4)}$ , имеет место  $\beta_{up} \geq \beta_{dn}$ , и потому с ростом  $\text{Ra}_l$  происходит медленный сдвиг границы раздела вниз. По окончании перехода пограничного слоя в турбулентный режим показатель  $\beta_{dn}$  становится больше показателя  $\beta_{up}$ , и с дальнейшим ростом  $\text{Ra}_l$  изменения соотношения между этими показателями уже не ожидается. Отсюда следует, что на данной стадии роста числа  $\text{Ra}_l$  граница раздела между областями  $V_+$  и  $V_-$  монотонно сдвигается вверх. Это в конце концов приводит к наступлению асимптотической ситуации, когда  $V_+ \ll V$ ,  $H_+ \ll H$ , и тогда практически все тепло, выделяемое в объеме  $V_+$ , уходит через участок границы  $S_{up}$ . В этих условиях на основе соотношений (5)—(7) и (10), (11) и соотношения, вытекающего из условия энергетического баланса для области  $V_+$ , имеем

$$\beta = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = \frac{3}{4}, \quad \gamma_{dn} = \frac{1}{4}, \quad \gamma_{up} = \frac{7}{32} \approx 0,219. \quad (22)$$

Эти степенные показатели устанавливают характеристики асимптотического режима теплоотдачи тепловыделяющей жидкости. Условия реализации данного режима отвечают неравенству

$$\text{Ra}_l^{-1/32} \ll 1. \quad (23)$$

Отметим, что асимптотика теплоотдачи для горизонтального плоскопараллельного слоя жидкости с внутренними источниками тепла рассматривалась в работе Чанга [12]. В этой работе предполагалось, что при асимптотически больших значениях числа Рэлея осуществляется режим конвекции типа мягкой турбулентности (жесткая турбулентность была открыта позже), и было получено значение для теплоотдачи вверх  $\beta_{\text{вр}} = 1/4$ .

## **6. Сравнение с экспериментом**

Начнем с важного замечания, которое касается аспектного отношения области  $V_+$  объема, содержащего тепловыделяющую жидкость. Как уже упоминалось, при умеренно высоких значениях числа Рэлея и при условии, что вся граница является охлаждаемой, имеет место оценка  $H_+ \sim H/2$ . С другой стороны, во всех известных экспериментах отношение горизонтального размера моделирующего объема к его высоте было около двух или больше. Поэтому аспектное отношение для области  $V_+$  составляет  $A \geq 4$ . В то же время нижняя граница интервала чисел Рэлея в экспериментах была не меньше  $10^4$ . Сопоставление этих фактов приводит к следующему заключению. Во всем исследованном диапазоне чисел Рэлея, отвечающем известным экспериментам по теплоотдаче жидкости с внутренними источниками тепла, в соответствии с результатами [5] осуществлялся режим жесткой турбулентности для области  $V_+$ . В свою очередь, это означает, что режимы теплоотдачи I и II по классификации раздела 4 в указанных экспериментах не реализовались.

Приступая к сравнению теории с экспериментом непосредственно, начнем с эксперимента Кулаки и Эмара [13], наиболее подходящего с точки зрения апробации теории. Напомним, что в этом эксперименте исследовалась теплоотдача вверх для горизонтального плоскопараллельного слоя жидкости с внутренними источниками тепла с теплоизолированной нижней границей. Аспектное отношение моделирующего объема

( $A = \frac{D}{H}$ ) изменялось в пределах от 2 до 40, а модифицированное число

Рэлея было заключено в интервале от  $2 \cdot 10^4$  до  $4 \cdot 10^{12}$  (см. формулу (3)).

Так как малым значениям  $Ra$ , отвечали большие значения отношения

$A$ , то в соответствии со сделанным выше замечанием можно считать, что весь исследованный в работе [17] диапазон чисел Рэлея соответствовал режиму жесткой турбулентности для конвекции Рэлея — Бенара. Поэтому в вытекающую из (7) формулу для показателя степени, определяющего в рассматриваемом эксперименте теплоотдачу вверх,

$$\gamma_{\text{up}} = \frac{\beta_{RB}}{1 + \beta_{RB}} \quad (24)$$

следует подставить  $\beta_{RB} = \frac{2}{7}$ , и мы получим  $\beta_{\text{up}}^{\text{theor}} \cong 0,222$ . Эта величина находится в хорошем согласии с экспериментальным значением данного степенного показателя [9]  $\beta_{\text{up}}^{\text{exp}} = 0,227$ . Такое близкое совпадение безусловно следует рассматривать и как экспериментальное доказательство аналогии между механизмами теплопередачи в области  $V_+$ , относящейся к объему, содержащему тепловыделяющую жидкость, и конвекцией Рэлея — Бенара. Два других эксперимента — [14, 15] и [16] — соответствуют постановке с моделированием полностью изотермическими граничными условиями в интервале значений модифицированного числа Рэлея до  $\sim 10^{13}$  и, следовательно, по классификации раздела 4 отвечают режиму III. В табл. 1 дано сравнение экспериментальных и теоретических значений степенных показателей, относящихся к данным экспериментам.

**Таблица 1. Сравнение теории с экспериментом, моделирующим теплоотдачу с полностью изотермическими граничными условиями при умеренно высоких значениях модифицированного числа Рэлея**

$\gamma_{\text{up}}$		$\gamma_{\text{dn}}$	
<i>эсп.</i>	<i>теор.</i>	<i>эсп.</i>	<i>теор.</i>
0,23 [16, 19]	0,225±0,004	0,18 [16, 19]	0,197±0,003
0,233 [21]		0,19 [21]	

На установке АСОРО в работе Теофануса и Ли [17] на интервале  $3 \cdot 10^{13} < Ra_7 < 7 \cdot 10^{14}$  было зафиксировано значительное ускорение роста с числом Рэлея теплоотдачи вниз, которое было описано степенной зависимостью с показателем  $\gamma_{\text{dn}} = 0,35$ . Заметим, что данный диапазон числа  $Ra_7$  может соответствовать режиму теплоотдачи IV со сменой ламинарного режима течения на турбулентный в пограничном слое на участке границы  $S_{\text{dn}}$ . Если так, то теоретическая оценка (3.21) —  $\gamma_{\text{dn}}^{\text{theor}} \approx 0,36$  — вполне согласуется с экспериментом [17]. Отметим, что смена режима течения в пограничном слое на вертикальном участке границы в том же диапазоне

чисел  $Ra_I$  была зафиксирована также в эксперименте на установке BAFOND в работе Альвареса и др. [20].

Особого внимания заслуживает эксперимент Бернаца и др. [18] на установке BALI, относящийся к области предельно высоких значений модифицированного числа Рэлея —  $10^{15} < Ra_I < 10^{17}$ . Полученные там величины степенных показателей соответствуют  $\gamma_{up} = 0,216$ ,  $\gamma_{dn} = 0,25$ . Имеет место практически полное совпадение этих величин с теоретическими показателями для асимптотического режима теплоотдачи (формула (22)):  $\gamma_{up}^{theor} \cong 0,219$ ,  $\gamma_{dn}^{theor} = 0,25$ .

В эксперименте Теофануса и др. на установке АСОРО [19] получены эмпирические соотношения для теплоотдачи вверх и вниз с отличающимися от [18] показателями степеней, однако в обоих случаях имеет место свойственное предельно высоким уровням тепловыделения соотношение между показателями

$$\gamma_{dn} > \gamma_{up}, Ra_I > 10^{14}, \quad (25)$$

которое можно рассматривать как подтверждение тенденции выхода на асимптотический режим с преобладанием теплоотдачи вниз.

Подводя итог разделу, можно охарактеризовать согласие теории с экспериментом в отношении интегральных характеристик теплоотдачи как вполне удовлетворительное.

## **7. Заключение**

Основные результаты работы состоят в следующем.

Установлены полуколичественные соотношения для теплоотдачи и выделены четыре основных и один асимптотический режимы свободной конвекции энерговыделяющей жидкости. В режиме IV, наиболее актуальном для проблемы безопасности атомных реакторов, происходит турбулизация течения в пограничном слое. Это приводит к значительному повышению роста теплоотдачи в обращенный вниз кривой участок границы. В асимптотическом режиме, когда  $Ra_I^{-1/32} \gg 1$ , теплоотдача в обращенный вниз участок границы преобладает. Установленные в работе теоретические соотношения находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

## **Литература**

1. *Benard H.* // Rev. général des sciences pures et appliquees. 1900. 11. P. 1261, 1309.
2. *Rayleigh J. W. S.* // Phil. Mag. 1916. 32. P. 529.
3. *Catton I., Edwards D. K. J.* // Heat Transfer. 1967. 89. P. 295.
4. *Castaing B., Gunaratne G., Heslot F., Kadanoff L., Libchaber A., Thomal S., Wu X.-Z., Zaleski S., Zanetti G. J.* // Fluid Mech. 1989. 204. P. 1.
5. *Wu X.-Z., Libchaber A.* // Phys. Rev. 1992. A45. P. 842.
6. *Гёбхарт Б., Джалаурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.* Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен: В 2 т. М.: Мир, 1991.
7. *Kutateladze S. S., Berdnikov V. S.* // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. 27. P. 1595.
8. *Bejan A., Gunnington G. R.* // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1983. 24. P. 131.
9. *Mahajan R. L., Gebhart B.* // J. of Fluid Mechanics. 1979. 91. P. 131.
10. *Bejan A.* // Natural Convection: Fundamentals and Applications / Ed. S. Kacač, W. Aung, R. Viskanta. Washington etc.: Hemisphere, 1985. P. 75.
11. *Vliet G. C., Liu C. K. J.* // Heat Transfer. 1969. 91. P. 517.
12. *Cheung F. B.* // J. Fluid Mech. 1980. 97. P. 743.
13. *Kulacki F. A., Emara A. A.* // J. Fluid Mech. 1977. 83. Pt. 2. P. 275.
14. *Mayinger F. X., Jahn M., Reineke H. H., Stainbrenner U.* // BMFT. 1976. RS 48/1 / Inst. für Verfahrenstechnik der T.U., Hannover.
15. *Jahn M.* // Holografische Untersuchung der freien Konvektion in volumetrisch behaltene Fluiden: Doktor-Ingenieur Dissertation. Hannover, 1975.
16. *Stainbrenner U., Reineke H. H.* // Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf. 1978. 2. P. 305 (Paper NC-21, Toronto, Canada).
17. *Theofanous T. G., Liu C.* // Proc. ANS National Heat Transfer Conf., Portland, Oregon. 1995. P. 349.
18. *Bernaz L., Bonnet J.-M., Spindler B., Villermaux C.* // OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability. Garching/Munich, Germany, March 3—6, 1998: Workshop Proceedings. Paris, 1999. P. 185.
19. *Theofanous T. G., Maguire M., Angelini S., Salmassi T.* // Proc. PSA '96-Int. Topical Meeting on Probabilistic Safety Assessment. Park City, Utah, III, 1996. P. 1343.
20. *Alvarez D., Malterre P., Seiler J.* BNFS. London, 1986. P. 331.

## **II. Предельные угловые закономерности теплоотдачи и стратификация тепловыделяющей жидкости**

*Л. А. Большов, П. С. Кондратенко*

### **1. Введение**

В работе [1] были проведены аналитические оценки интегральных характеристик теплоотдачи жидкости с внутренними источниками. Между тем для решения проблемы безопасности ядерных реакторов требуется более детально знать распределение теплового потока к границе занимаемого жидкостью объема. Это, в частности, касается самой низкой части границы, где для внешнего охлаждения кипящей водой имеют место особые условия [2].

Цель настоящей работы состоит в выявлении закономерностей распределения потока тепла к границе и характеристик конвекции в нижней части объема. Как будет показано ниже, зависимости характеристик жидкости от пространственных переменных являются степенными. Наша задача состоит в том, чтобы на основе условий баланса массы, импульса и энергии найти показатели соответствующих степеней, абстрагируясь от стоящих перед степенями численных коэффициентов порядка единицы.

В следующем разделе дана общая формулировка задачи. Распределение потока тепла к границе тесно связано с распределениями температуры и скорости течения в основном объеме, являющимися предметом анализа раздела 3. В разделе 4 исследованы характеристики сходящегося пограничного слоя в нижней точке части границы и получены основные результаты. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом даны в заключительном разделе.

### **2. Формулировка задачи**

Будем считать, что объем, занимаемый жидкостью, является фигурой вращения вокруг вертикальной оси. Радиус кривизны границы  $R$  вблизи самой нижней точки (полюса) является конечным. Будем полагать, что высота объема с жидкостью  $H$  имеет порядок  $R$ . Положение текущей точки на границе будем характеризовать углом  $\theta$  между нормалью к границе и вертикальной осью (так что в полюсе имеет место  $\theta = 0$ ). Коор-

динату, отсчитанную от уровня полюса по вертикали вверх, обозначим  $z$ . Будем интересоваться характеристиками конвекции в области, определяемой неравенствами  $\theta \ll 1$  и  $z \ll H$ . Геометрия нижней части объема схематически представлена на рис. 1.

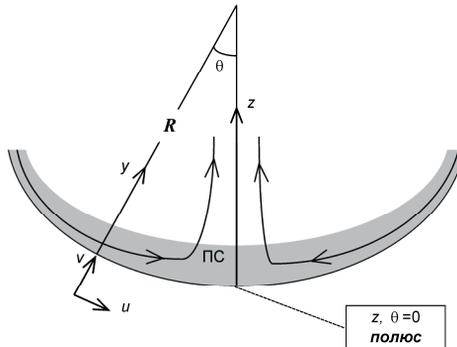


Рис. 1. Геометрия задачи

Теплоотдача в криволинейный участок границы, обращенный вниз, определяется характеристиками формирующегося там пограничного слоя (ПС). При углах  $\theta \sim 1$  этот слой подобен хорошо изученному свободно-конвективному пограничному слою на вертикальной стенке в жидкости без внутренних источников тепла [3]. Свойства ПС приобретают принципиально иной характер с приближением к полюсу, когда  $\theta \ll 1$ . Здесь он в силу очевидных геометрических условий становится сходящимся. Благодаря этому обстоятельству возникает существенное требование, состоящее в необходимости обращения в нуль продольной компоненты скорости пограничного слоя в полюсе:

$$u(\theta = 0) = 0. \quad (1)$$

Это условие означает, что при углах  $\theta \ll 1$  ПС оказывается не ускоряющимся, как при значениях  $\theta \sim 1$ , а замедляющимся. Кроме того, в отличие от области  $\theta \sim 1$ , где пограничный слой подсасывает жидкость из основного объема, при углах  $\theta \ll 1$  он ее туда возвращает. Еще одно важное качество ПС, приобретаемое им при углах  $\theta \ll 1$ , заключается в ослаблении действия силы плавучести в его продольном направлении.

Скорость течения и температура жидкости во внутреннем объеме (вне ПС) при значениях координаты  $z \ll H$  благодаря условию (1) сильно зависят от этой координаты. Это обстоятельство, в свою очередь, оказывает значительное обратное влияние на характеристики самого ПС. Поэтому задачи о ПС и о распределении течения и температуры жидкости вне ПС должны

решаться совместно с учетом условий согласования на свободной (обращенной вглубь жидкости) стороне ПС. Эти условия состоят в непрерывности температуры и нормальной составляющей скорости течения жидкости:

$$T \approx T_b, \quad y \approx \delta, \quad (2)$$

$$v \approx V, \quad y \approx \delta, \quad (3)$$

где  $T$  и  $T_b$  — температура в пограничном слое и в основном объеме соответственно;  $v$  и  $V$  — нормальные к границе компоненты скорости течения жидкости в пограничном слое и в основном объеме;  $y$  — отсчитанная от границы нормальная к ней координата (см. рис. 1),  $\delta$  — толщина пограничного слоя. Отметим, что поскольку  $\theta \ll 1$ , компонента  $V$  является одновременно и вертикальной составляющей скорости в основном объеме.

В следующем разделе рассмотрим соотношения, связывающие характеристики ПС с распределением температуры и скорости течения в основном объеме. Отдельно рассмотрим случаи ламинарного и турбулентного ПС.

### **3. Соотношения для сходящегося пограничного слоя**

#### **Ламинарный ПС**

В области значений полярного угла  $\theta$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\delta}{R} \ll \theta^2 \ll 1, \quad (4)$$

система уравнений, выражающих свойства сохранения массы, продольной компоненты импульса и энергии жидкости в ламинарном ПС, принимает вид:

$$-\frac{1}{R\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta u) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{1}{R\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\alpha (T_b - T)\theta, \quad (6)$$

$$-\frac{1}{R\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta uT) + \frac{\partial}{\partial y} (vT) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (7)$$

*II. Предельные угловые закономерности теплоотдачи  
и стратификация тепловыделяющей жидкости*

*Л. А. Большов, П. С. Кондратенко*

Давление при выводе системы (5)—(7) было исключено путем использования уравнения баланса поперечной составляющей импульса пограничного слоя. Выполнение левой части неравенства (4) дало, в частности, возможность пренебречь вкладом объемного тепловыделения в уравнении (7) и не учитывать силы инерции, вызванные переходом в криволинейную систему координат в уравнении (6).

Для дальнейшего вывода существует вопрос о форме поперечного профиля температуры в ПС. В обычном свободно-конвективном пограничном слое вблизи вертикальной стенки с не зависящей от координат температурой жидкости в основном объеме профиль температуры является монотонным [3]. Иное положение возникает при наличии неоднородности температуры, вызванной устойчивой стратификацией в основном объеме. Поскольку температура на внешней стороне пограничного слоя должна совпадать с окружающей средой (см. (2)), то с продвижением вниз по течению температура внутри пограничного слоя за счет конвективного сноса из его более нагретых верхних участков становится выше, чем на внешней стороне. В результате сила плавучести оказывается направленной противоположно скорости продольного движения пограничного слоя, чем обеспечивается его торможение и в конечном итоге выполнение граничного условия (1). Ввиду того, что распределение температуры в основном объеме формируется на базе возврата жидкости из пограничного слоя, максимальное превышение температуры внутри пограничного слоя над окружающей средой должно иметь тот же порядок, что и температура последней:

$$\max(T - T_b) \sim T_b. \quad (8)$$

Схематический вид температурного профиля в сходящемся пограничном слое изображен на рис. 2. Отметим, что о немонотонном профиле температуры в пограничном слое вблизи вертикальной стенки со стратифицированной окружающей средой по результатам численных расчетов и эксперимента сообщалось в [4].

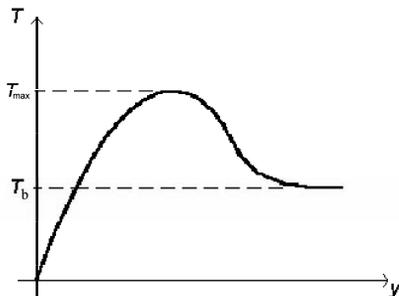


Рис. 2. Температурный профиль в сходящемся пограничном слое

Приступим теперь к выводу соотношений между характеристиками пограничного слоя и основного объема. Из уравнений (5)—(7), оценки (8) и условий сшивки (2), (3) вытекают следующие соотношения:

$$\frac{u}{R\theta} \sim \frac{V}{\delta}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{u}{R\theta}\right)^2 \sim \frac{g\alpha T_b}{R}, \quad (10)$$

$$V \sim \frac{\chi}{\delta}. \quad (11)$$

Еще одно соотношение получается из самого определения теплового потока на границе:

$$q \sim \lambda T_b / \delta. \quad (12)$$

Путем исключения скорости  $u$  из соотношений (9)—(11) и использования (12) получаются важные связи для вертикальной составляющей скорости и плотности теплового потока с температурой в основном объеме:

$$V \sim \left(\frac{\chi^2 g\alpha T_b}{R}\right)^{1/4}, \quad (13)$$

$$q \sim \lambda \left(\frac{g\alpha T_b^5}{\chi^2 R}\right)^{1/4}. \quad (14)$$

Остановимся теперь на случае сверхмалых полярных углов, когда

$$\theta^2 \ll \frac{\delta}{R}. \quad (15)$$

В этой области из условия баланса массы (5) имеем оценку

$$u \sim u_* \frac{\theta}{\theta_*}, \quad (16)$$

в которой  $u_*$  — значение скорости  $u$  при угле  $\theta = \theta_*$ , а сам граничный угол  $\theta_*$  определяется соотношением

$$\theta_*^2 \sim \frac{\delta(\theta_*)}{R}. \quad (17)$$

С учетом (16) из условия баланса продольной компоненты импульса следует, что в области углов, определяемой неравенством (15), температура жидкости в ПС не зависит от полярного угла. В связи с этим и в соответствии с оценкой (16) первым членом в уравнении баланса энергии в этой области можно пренебречь. Вместе с тем теперь в этом уравнении следует восстановить член, описывающий объемное тепловыделение. В результате это уравнение принимает вид

$$v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{\rho c}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что в области сверхмалых углов  $\theta \ll \theta_*$  толщина пограничного слоя, как и температура, от полярного угла не зависит, и оценки для этих величин имеют вид

$$\delta \sim \delta_* \sim \frac{\chi}{v_*}, \quad T \sim T(\theta_*) \sim \frac{Q\delta_*^2}{\lambda}, \quad (19)$$

где  $v_*$  — значение скорости  $v$  при угле  $\theta \sim \theta_*$ . Наконец, из соотношений (19) и (12) следует, что при углах  $\theta \ll \theta_*$  плотность теплового потока к границе также является практически постоянной. В полюсе (при значении угла  $\theta = 0$ ) она соответствует минимуму, величина которого дается оценкой

$$q_m \sim q_* \equiv q, \quad (\theta_*) \sim \langle q \rangle > \theta_*^2, \quad (20)$$

где  $\langle q \rangle \sim QR$  — средняя величина теплового потока по всей границе.

## Турбулентный ПС

Для того чтобы получить соотношения для турбулентного ПС, подобные полученным для ламинарного, заметим, что главная часть перепада температуры от значения вне турбулентного ПС к стенке происходит в вязкокондуктивном подслое. В нем условия баланса массы, импульса и энергии носят локальный характер. Поэтому оценка, связывающая плотность потока тепла к стенке с температурой окружающей среды в сходящемся турбулентном ПС, совпадает с соответствующей оценкой для турбулентного ПС на вертикальной стенке при изотермической окружающей среде [5]:

$$q \sim \lambda \left( \frac{g\alpha T_b^4}{\chi^2} \right)^{1/3}. \quad (21)$$

Чтобы установить связь между вертикальной компонентой течения жидкости  $V$  и температурой  $T_b$  в основном объеме, обратимся к турбулентному ядру ПС, где вязкость и теплопроводность несущественны. В этой области

соотношение, связывающее усредненную по турбулентным пульсациям продольную компоненту скорости (для нее сохраним обозначение  $u$ ) с вертикальной компонентой скорости течения в основном объеме, согласно условию баланса массы и условию сшивки (3) совпадает с оценкой (9). Условия баланса импульса и энергии в турбулентном ядре приводят к следующим оценкам:

$$\left(\frac{u}{R\theta}\right)^2 \sim \frac{g\alpha\Delta T}{R}, \quad (22)$$

$$v'^2 \sim g\alpha T' \delta, \quad (23)$$

$$q \sim \rho c_p v' T', \quad (24)$$

где  $\Delta T$  — характерное значение средней величины превышения температуры в турбулентном ядре над температурой прилегающих участков основного объема,  $v'$  и  $T'$  — характерные значения турбулентных пульсаций скорости и температуры соответственно. Принимая во внимание, что  $v' \sim V$  и  $T' \sim \Delta T$ , получаем следующие оценки из (9), (22)—(24):

$$\left(\frac{u\delta}{R\theta}\right)^3 \sim g\alpha \frac{q}{\rho c_p} \delta, \quad (25)$$

$$u^3 \sim g\alpha \frac{q}{\rho c_p} \frac{R^2\theta^3}{\delta}, \quad (26)$$

$$V \sim \left(\chi R^3 (g\alpha T_b)^4\right)^{1/9}, \quad (27)$$

$$q \sim \frac{\lambda}{g\alpha\chi R} V^3. \quad (28)$$

#### **4. Температура и скорость течения в основном объеме**

Поскольку во внутреннем объеме (вне ПС) вязкость и теплопроводность несутельственны, условия баланса импульса и энергии здесь приобретают вид:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g\alpha T_b \vec{n}, \quad (29)$$

$$(\vec{v}\nabla)T_b = \frac{Q}{\rho c_p}. \quad (30)$$

В этих уравнениях  $\vec{V} = \vec{V}_h + V\vec{n}$  — вектор скорости течения в основном объеме,  $\vec{n}$  — единичный вектор по вертикали, направленный вверх.

По сравнению с ПС течение в основном объеме является значительно более медленным. В связи с этим здесь подъемная сила, возникающая как следствие неоднородного распределения температуры, практически полностью уравновешивается силой, вызванной градиентом давления. Это означает, что в данной области складывается ситуация, близкая к гидростатике, где, как известно [6], температура оказывается функцией только вертикальной координаты, и при ориентированном вверх температурном градиенте имеет место устойчивая стратификация. Оценим поправки к стратифицированному распределению температуры, возникающие за счет наличия медленного течения.

Обозначим  $(\Delta p)_h$  и  $V_h$  соответственно характерные величины изменения давления и горизонтальной компоненты скорости по площади горизонтального сечения основного объема при заданном значении вертикальной координаты  $z$ . В соответствии с горизонтальной составляющей уравнения (29) указанные величины связаны соотношением

$$(\Delta p)_h \sim \rho V_h^2.$$

Отсюда с помощью вертикальной составляющей уравнения (29) для характерной величины изменения температуры в том же сечении  $(\Delta T)_h$  приходим к оценке

$$(\Delta T_b)_h \sim \frac{V_h^2}{g\alpha z}. \quad (31)$$

С учетом того, что линейный размер горизонтального сечения при заданном значении  $z$  в рассматриваемом нами случае  $z \ll R$  имеет порядок  $\sqrt{Rz}$ , из уравнения баланса массы для основного объема вытекает связь между горизонтальной  $V_h$  и вертикальной  $V$  составляющими скорости течения:

$$V_h^2 \sim \frac{R}{z} V^2. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31) и воспользовавшись соотношениями (13), (11), приходим к оценке

$$(\Delta T_b)_h \sim \left(\frac{\delta}{z}\right)^2 T_b. \quad (33)$$

Отсюда следует, что при значениях высоты много больше толщины ПС ( $z \gg \delta$ ) поправки, обусловленные зависимостью температуры от горизонтальных координат, малы и, следовательно,

$$T_b \cong T_b(z). \quad (34)$$

Из этого факта в силу уравнения (30) вытекает, что аналогичное утверждение при том же условии  $z \gg \delta$  справедливо и для вертикальной составляющей скорости течения:

$$V \cong V(z). \quad (35)$$

Вследствие соотношений (34), (35) уравнение (30) приобретает вид

$$V \frac{dT_b}{dz} = \frac{Q}{\rho c_p}. \quad (36)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что в области внутреннего объема, примыкающей к ПС, где при значениях угла  $\theta \ll 1$  имеет место приближение  $z \cong R\theta^2 / 2$ , справедлива оценка

$$T_b = \frac{Q}{\rho c_p} \frac{R\theta^2}{2V}. \quad (37)$$

## **5. Предельные зависимости**

В области полярных углов, определяемой неравенством (4), отсутствует какой-либо масштаб для полярного угла  $\theta$ . Поэтому зависимости характеристик жидкости от угла  $\theta$  и высоты  $z$  здесь должны быть степенными. Определим показатели степеней  $a, b, f, d$  следующими соотношениями:

$$q \propto \theta^a, \quad T_b \propto \left(\frac{z}{R}\right)^b, \quad u \propto \theta^f, \quad \delta \propto \theta^d. \quad (38)$$

Как и ранее, рассмотрим отдельно случаи ламинарного и турбулентного режимов течения в ПС.

### **Ламинарный ПС**

Подстановкой определений (38) в соотношения (9)—(12), (37) с предварительным исключением величины  $V$  приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений для степенных показателей:

$$\begin{aligned}f &= b + 1, \\f &= 1 - 2d, \\2b + f + d &= 3, \\a &= 2b - d.\end{aligned}\tag{39}$$

Решение ее приводит к следующему результату:

$$a = 2, \quad b = 4/5, \quad c = 9/5, \quad d = -2/5.\tag{40}$$

### Турбулентный ПС

Аналогично предыдущему случаю подстановкой определений (38) в соотношения (21), (25), (26) и (37) получаем систему уравнений для степенных показателей:

$$\begin{aligned}3f + 2d - a &= 3, \\3f + d - a &= 3, \\2b + f + d &= 3, \\a &= \frac{8}{3}b.\end{aligned}\tag{41}$$

Решение ее дает

$$a = 24/13, \quad b = 9/13, \quad c = 21/13, \quad d = 0.\tag{42}$$

Соотношения (38), (40) и (42) описывают поведение теплового потока к границе и распределение теплогидравлических характеристик в нижней части объема, содержащего жидкость с внутренними источниками тепла. Отметим, что показатель  $b$ , определяющий распределение температуры в основном объеме, меньше единицы. Поэтому согласно (38) имеет место неравенство

$$\frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2} < 0.\tag{43}$$

## 6. Обсуждение и сравнение с экспериментом

Основные выводы, вытекающие из анализа, проделанного в данном разделе, состоят в следующем. При малых значениях полярного угла,  $\theta \ll 1$ , плотность теплового потока к границе резко падает с углом в силу утолщения ПС и температурной стратификации в основном объеме. В качестве следствия соотношения (43) имеет место сгущение горизонтальных изотерм по направлению вниз в основном объеме. Асимптотическое поведение теплового потока к границе и распределение температуры в

основном объеме зависит от режима течения в ПС. Для ламинарного ПС асимптотические зависимости при  $\theta_* \ll \theta \ll 1$  и  $\delta \ll z \ll R$  согласно соотношениям (38), (40) определяются соотношениями

$$q \propto \theta^2, \quad T_b \propto \left(\frac{z}{H}\right)^{4/5}. \quad (44)$$

При  $\theta \sim \theta_*$ , где угол  $\theta_* \ll 1$  определен соотношением (17), убывание плотности теплового потока с углом замедляется, и при углах  $\theta \ll \theta_*$  она становится почти постоянной, принимая максимальное значение в полюсе (при  $\theta = 0$ ).

Асимптотические зависимости для случая турбулентного режима течения в ПС согласно соотношениям (38), (42) имеют форму

$$q \propto \theta^{24/13}, \quad T_b \propto \left(\frac{z}{H}\right)^{9/13}. \quad (45)$$

Турбулентный режим в сходящемся пограничном слое может иметь место при условии, что этот режим развивается на более ранней вверх по течению стадии при углах  $\theta \sim 1$ . В таком случае согласно (38), (42) число Рейнольдса при углах  $\theta \ll 1$  изменяется по закону

$$\text{Re} \equiv (u\delta/\nu) \propto \theta^{21/13}, \quad (46)$$

в соответствии с которым для случая не слишком сильного превышения порога для перехода от ламинарного режима в ПС к турбулентному, существенного с точки зрения проблемы безопасности ядерных реакторов ( $\text{Ra}_l \leq 10^{17}$ ), число Рейнольдса с уменьшением полярного угла быстро падает ниже критического значения, и тогда мы возвращаемся к асимптотическим зависимостям (44).

Оценим теперь величину минимума плотности теплового потока, реализуемого при угле  $\theta = 0$ , и значение граничного угла  $\theta_*$ , ниже которого угловая зависимость плотности теплового потока значительно ослабевает. Согласно (38), (40) поведение толщины ПС в зависимости от угла определяется формулой

$$\delta(\theta) = \delta_0 \theta^{-2/5}, \quad (47)$$

где  $\delta_0$  — величина порядка толщины ПС при углах  $\theta \sim 1$ . Подстановка соотношения (47) в (17) дает искомую оценку для граничного угла

$$\theta_* \sim (\delta_0/R)^{5/12}. \quad (48)$$

*II. Предельные угловые закономерности теплоотдачи  
и стратификация тепловыделяющей жидкости*

*Л. А. Большов, П. С. Кондратенко*

В соответствии с соотношением (12) и результатами предыдущего раздела зависимость величины  $\delta_0$  от модифицированного числа Рэлея дается

оценкой  $\delta_0 / R \sim Ra_I^{-\gamma_{dn}}$ , где  $\gamma_{dn} \cong 0,2$ . Воспользовавшись этим результатом с учетом соотношений (48), (17) и (20), получаем оценку для отношения минимальной плотности теплового потока к ее среднему значению и для граничного угла:

$$(q_m / \langle q \rangle) \sim Ra_I^{-1/6}, \theta_* \sim Ra_I^{-1/12}. \quad (49)$$

В заключение раздела остановимся на сравнении полученных здесь результатов с экспериментом. Отметим, прежде всего, что все известные экспериментальные данные демонстрируют быстрый спад плотности теплового потока с уменьшением полярного угла при  $\theta \ll 1$ . Они также устанавливают наличие температурной стратификации в основном объеме при  $z \ll H$ . Сравнение результатов теории, описываемых соотношениями (44), (49), с экспериментальными данными, полученными в [7, 8, 9], представлены в табл. 1. Из данных таблицы следует, что имеется качественное согласие теории с экспериментом относительно угловой зависимости плотности теплового потока и отношения ее минимальной величины к среднему значению. Вместе с тем для проведения более подробного сравнения требуются более высокая точность и пространственное разрешение в измерениях плотности теплового потока.

**Таблица 1. Сравнение результатов теории с экспериментом по распределению теплового потока**

Эксперимент	Данные	Теория
UCLA [24], $Ra_I = (3 \div 8) \cdot 10^{13}$	$(q_{\min} / \langle q \rangle) \approx 0,1$ $(q(\theta) / \langle q \rangle) = a + b\theta^2$	$(q_{\min} / \langle q \rangle) \sim 10^{-2}$ $(q(\theta) / \langle q \rangle) \approx a + b\theta^2$
COPO [25], $Ra_I \sim 10^{14} \div 10^{15}$	$(q_{\min} / \langle q \rangle) \approx 0$	$(q_{\min} / \langle q \rangle) \approx \sim 10^{-3}$
BALI [28], $Ra_I \sim 10^{15} \div 10^{17}$	$(q_{\min} / \langle q \rangle) < 10^{-2}$	$(q_{\min} / \langle q \rangle) \sim$ $\sim (5 \div 1) \cdot 10^{-3}$

В [10] оптическими методами было зарегистрировано распределение температуры в объеме, содержащем жидкость с внутренними источниками тепла. На рис. 3 представлена типичная голограмма, описывающая распределение изотерм.

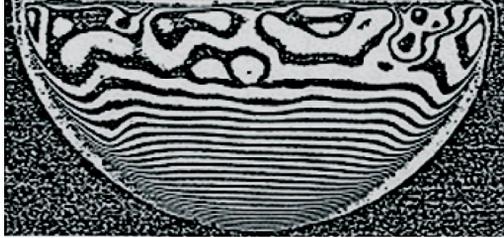


Рис. 3. Типичная голограмма для распределения изотерм [10]

На ней отчетливо видны температурная стратификация и сгущение горизонтальных изотерм по направлению вниз. Такое поведение находится в соответствии с теоретическим соотношением (43). На рис. 4 показано количественное сравнение теории с экспериментом [10] по распределению температуры в основном объеме при мощности выделения тепла в жидкости, отвечающей  $Ra_1 = 1,04 \cdot 10^8$ . Теоретическая зависимость приведенной температуры от безразмерной приведенной высоты в соответствии с формулой (44) была задана соотношением  $T_b \sim Z^{4/5}$ . Экспериментальные точки получены путем численной обработки голограммы (см. рис. 3). Теоретическая кривая совпала с экспериментом с погрешностью, не превышающей 2,7%.

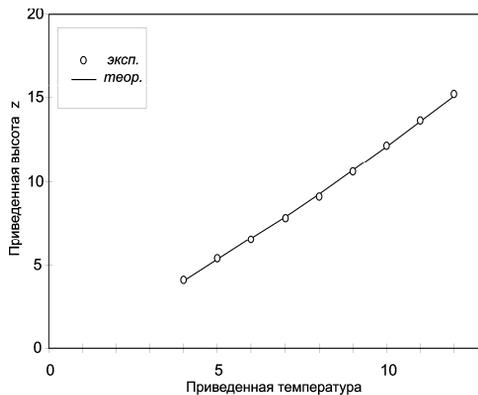


Рис. 4. Количественное сравнение теории с экспериментом для распределения температуры жидкости по высоте

Таким образом, можно говорить о вполне удовлетворительном согласии теории с экспериментом в отношении предельных зависимостей характеристик конвекции для нижней части объема, содержащего жидкость с внутренними источниками тепла.

## Литература

1. *Большов Л. А., Кондратенко П. С., Стрижов В. Ф.* Полуколичественная теория конвективной теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла. Опубликовано в настоящем выпуске “Трудов ИБРАЭ”, с. 7—19.
2. *Chu T. Y., Bentz J. H., Simpson R. B.* // AICHE Symposium Series. 1995. 91. P. 154.
3. *Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.* Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен: В 2 т. М.: Мир, 1991.
4. *Himasekhar K.* // An analytical and experimental study of laminar free boundary layer flows in a stratified medium: Thesis / I.I.T. Kanpur, India, 1980.
5. *Kutateladze S. S., Berdnikov V. S.* // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. 27. P. 1595.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
7. *Frantz B., Dhir V. K.* ASME // Proc. National Heat Transfer Conference, San Diego, Ca, August 9—12 1992. [S. I.], 1992. P. 69.
8. *Kymäläinen O., Hongisto O., Antman J., Tuomisto H., Theofanous T. G.* 20th Water Reactor Safety Meeting. Bethesda, Maryland, USA, 1992.
9. *Bernaz L., Bonnet J.-M., Spindler B., Villermaux C.* // OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability. Garching/Munich, Germany, March 3—6, 1998: Workshop Proceedings. Paris, 1999. P. 185.
10. *Jahn M.* Holografische Untersuchung der freien Konvektion in volumetrisch beheizten Fluiden: Doktor-Ingenieur Dissertation. Hannover, 1975.

### III. Влияние магнитного поля на свободно-конвективный пограничный слой в проводящей жидкости

*Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

В то время как свободно-конвективные пограничные слои в непроводящих жидкостях изучены довольно хорошо (см., например, [1]), эти слои для проводящих жидкостей в присутствии магнитного поля исследованы еще мало. Например, в монографии [2], где представлен обзор по данной проблеме, приведена задача, допускающая автономное решение при условии, что напряженность магнитного поля имеет специфическую зависимость от координаты вдоль нагретой поверхности  $\propto x^{1/4}$ . Без такой зависимости (в частности, в однородном поле) задача значительно усложняется. В любом случае приведенные в [2] решения имеют вид бесконечных степенных рядов, использование которых весьма затруднительно. Вместе с тем знание закономерностей теплоотдачи проводящей жидкости в присутствии магнитного поля существенно для многих практических задач, например о течении проводящих жидкостей в трубах [3] или о процессах, относящихся к электролитической металлургии.

В настоящей работе рассматривается стационарный ламинарный свободно-конвективный пограничный слой проводящей жидкости вблизи нагретой вертикальной стенки в однородном магнитном поле, направленном по нормали к стенке. Состояние жидкости вдали от стенки предполагаем изотермическим. Перепад температуры между стенкой и жидкостью вдали от нее обозначим  $\Delta T$ . Направим ось  $x$  вверх, а ось  $y$  — перпендикулярно стенке так, что на самой стенке  $y = 0$ . Вдоль направления оси  $z$  система предполагается однородной, и  $z$ -компонента скорости отсутствует.

Будем считать, что выполнено условие применимости приближения пограничного слоя, состоящее в том, что число Рэлея велико в сравнении с единицей:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T H^3}{\nu\chi} \gg 1.$$

Здесь  $g$  — ускорение земного тяготения;  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения;  $H$  — характерный размер по вертикали;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\chi$  — температуропроводность. Кроме того, будем полагать

*III. Влияние магнитного поля на свободно-конвективный пограничный слой в проводящей жидкости*

*Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

малой величину магнитного числа Рейнольдса  $Re_m = \frac{4\pi\sigma}{c^2}VN \ll 1$  ( $\pi$  —

проводимость жидкости;  $c$  — скорость света;  $V$  — характерная скорость течения), что позволяет не учитывать обратное влияние течения жидкости на магнитное поле.

Ток в жидкости в присутствии магнитного поля определяется соотношением

$$\vec{j} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{B}] \right).$$

Так как магнитное поле направлено по оси  $y$ , а вектор скорости лежит в плоскости  $x - z$ , вектор  $[\vec{V}, \vec{B}]$  направлен вдоль  $z$ . Из уравнения

$\text{div } \vec{j} = 0$  при постоянной проводимости следует уравнение  $\text{div } \vec{E} = 0$ .

Кроме того, справедливо уравнение  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . Исходя из этих двух уравнений, приходим к выводу, что в режиме короткого замыкания, который будем предполагать выполненным, напряженность электрического поля тождественно обращается в нуль,  $\vec{E} \equiv 0$ .

Перейдем к выводу уравнений движения для пограничного слоя. По сравнению с уравнениями гидродинамики для непроводящей жидкости уравнения в присутствии магнитного поля для проводящей жидкости содержат дополнительно силу Лоренца, которая в рассматриваемой геометрии войдет только в продольную компоненту уравнения Навье — Стокса (вдоль  $x$ ). Как обычно воспользовавшись поперечной компонентой данного уравнения для исключения давления, приходим к системе уравнений движения для свободно-конвективного пограничного слоя проводящей жидкости в поперечном магнитном поле:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta T + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{\delta_M^2} u, \tag{2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Здесь  $u$  и  $v$  — продольная и поперечная компоненты скорости (вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно). Температура  $T$  отсчитана от ее значения для жидкости вдали от стенки. Фигурирующая в уравнении (2) "магнитная

толщина" определяется выражением  $\delta_M^2 = \frac{\eta c^2}{\sigma B^2}$  ( $\eta$  — динамическая вязкость жидкости). Граничные условия к системе (1)—(3) состоят, как обычно, в равенстве нулю величин  $u$ ,  $T$  в пределе  $y \rightarrow \infty$  и  $u$ ,  $v$  при  $y = 0$ , а также  $T = \Delta T$  при  $y = 0$ .

Из уравнения (2) видно, что наличие магнитного поля приводит к дополнительному торможению. Покажем, что на начальном участке "разгона" жидкости (при малых значениях  $x$ ) вкладом магнитного члена можно пренебречь. Оценим суммарный вклад вязкого и инерционного слагаемых в уравнении (2), положив  $\delta_M^{-2} \propto B^2 = 0$ . Тогда, согласно известным результатам для обычного пограничного слоя (см. [1]), справедливым в от-

сутствии магнитного поля, для величины  $A \equiv u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  имеем

$$A \sim \frac{\nu u}{x^2} (\text{Ra}_x S)^{1/2}, \quad (4)$$

где  $\text{Ra}_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu\chi}$ ,  $S = 1$ , если число Прандтля  $\text{Pr} \equiv \nu/\chi \gtrsim 1$  и

$S = \text{Pr}^{-1}$  в случае  $\text{Pr} \gtrsim 1$ . Сравнивая оценки (4) с магнитным слагаемым в уравнении (2), приходим к выводу, что на начальном участке пограничного слоя в области  $x \ll x_*$ , где

$$x_* = \delta_M \left( \frac{\delta_M}{H} \right)^3 \text{Ra} S, \quad (5)$$

влиянием магнитного поля на пограничный слой можно пренебречь. В этом случае толщина теплового пограничного слоя  $\delta_T \propto x^{1/4}$ , а число Нуссельта

$$\text{Nu}_x \equiv -\frac{x}{\Delta T} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (6)$$

представляющее собой безразмерный коэффициент теплопередачи, дается оценками

$$\text{Nu}_x \equiv -\frac{x}{\Delta T} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \sim \left( \frac{\text{Ra}_x}{S} \right)^{1/4}.$$

Рассмотрим теперь свойства пограничного слоя при значениях  $x \gg x_*$ . В этой области  $x$  в уравнении баланса импульса (2) теперь уже можно пренебречь инерционными и вязким слагаемыми в пользу магнитного. Система уравнений (1)—(3) тогда приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \chi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

$$u = \frac{g\beta\delta_M^2}{\nu} T. \quad (9)$$

Соответствующие этой системе граничные условия имеют вид

$$u|_{y=0} = U \equiv \frac{g\beta\Delta T\delta_M^2}{\nu}, \quad v|_{y=0} = u|_{y \rightarrow \infty} = 0. \quad (10)$$

Формально система уравнений (7)—(8) совпадает с соответствующей системой для сдвигового пограничного слоя [4], если во втором случае произвести замену  $\nu \rightarrow \chi$ . Однако граничные условия для этих двух случаев принципиально различаются.

Подобно случаю сдвигового пограничного слоя система (7)—(8) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции  $f(\xi)$ :

$$ff'' + 2f''' = 0, \quad (11)$$

$$f(0) = f'(\infty) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (12)$$

Автомодельная переменная  $\xi$  определена равенством

$$\xi = y \sqrt{\frac{U}{\chi x}}. \quad (13)$$

Компоненты скорости течения связаны с функцией  $f$  соотношениями

$$u = Uf'(\xi), \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\chi U}{x}} (\xi f' - f). \quad (14)$$

Отметим, что уравнение (11) совпало с соответствующим уравнением для сдвигового пограничного слоя, однако в случае последнего граничные условия для функции  $f(\xi)$  вместо (12) имеют вид  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $f'(\infty) = 1$ .

Согласно (13) толщина пограничного слоя (в области  $x \gg x_*$  он является одновременно и температурным, и скоростным) имеет порядок

$$\delta_T \sim \sqrt{\frac{\chi^v x}{g\beta\Delta T\delta_M^2}} \propto B\sqrt{x}. \quad (15)$$

При этом с учетом (5) оказывается, что  $\delta_T \gg \delta_M$ . Именно это обстоятельство позволило нам прийти к уравнению (8), игнорируя тот факт, что на расстояниях от стенки  $y \lesssim \delta_M$ , где существенна вязкость, соотношение (9) теряет смысл. В этой области согласно уравнению (2) имеет место другое соотношение между скоростью и температурой:

$$u = \frac{g\beta\delta_M^2}{\nu} T(1 - e^{-y/\delta_M}). \quad (16)$$

Но благодаря неравенству  $\delta_T \gg \delta_M$  отличие (15) от (9) приводит лишь к малым поправкам к величине температуры, вычисляемой на основе системы уравнений (7)–(9).

Число Нуссельта (6) в режиме магнитного торможения (в области  $x \gg x_*$ ) с учетом соотношений (9), (13) и (14) дается выражением

$$\text{Nu}_x = -f''(0)\frac{\delta_M}{x}\text{Ra}_x^{1/2} \propto \frac{\sqrt{x}}{B}. \quad (17)$$

В этом режиме плотность теплового потока обратно пропорциональна напряженности магнитного поля и корню квадратному от продольной координаты. В области  $x \ll x_*$  плотность теплового потока теплового потока обратно пропорциональна корню четвертой степени от продольной координаты и не зависит от магнитного поля.

Условие реализации теплоотдачи в режиме магнитного торможения состоит в требованиях, чтобы высота стенки  $H$  была одновременно велика как по сравнению с толщиной пограничного слоя, так и с нижней границей режима по продольной координате  $x_*$ . С учетом выражений (15) и (5) эти требования сводятся к неравенствам

$$(\text{Ra} S)^{1/4} < \frac{H}{\delta_M} \ll \text{Ra}^{1/2}. \quad (18)$$

При характерных значениях параметров  $\beta \approx 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,  $\sigma \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$ ,  $\chi \approx 0,1 \text{ cm}^2 \text{ c}^{-1}$  и  $\Delta T \approx 10 \text{ K}$ ,  $H = 40 \text{ cm}$  неравенство (18) принимает вид условия на величину напряженности магнитного поля:  $100 \text{ Гс} < B \ll 6 \cdot 10^3 \text{ Гс}$ . Таким образом, в присутствии поперечного магнитного поля область свободно-конвективного пограничного слоя разбивается на две подобласти, пространственная доля которых определяется величиной напряженности поля. На начальной стадии течения влияние поля незначительно, а во второй области (области магнитного торможения) оно является определяющим.

## Литература

1. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991. Т. 1.
2. Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинанте, 1980.
3. Генин Л. Г., Свиридов В. Г. Гидродинамика и теплообмен МГД-течений в каналах. М.: Изд-во МЭИ, 2001.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

## **IV. Численное моделирование свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в осесимметричном замкнутом объеме**

*Д. Г. Григоруц, П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский*

### **1. Введение**

Проблема обеспечения безопасности объектов атомной энергетики выявила необходимость исследования класса свободно-конвективных течений, которые обусловлены не внешними условиями, а внутренними источниками тепла. При тяжелой аварии на АЭС для водо-водяных реакторов средней и малой мощности возникает задача сохранения целостности корпуса. В случае потери теплоносителя активная зона под действием тепловых нагрузок начинает разрушаться и плавиться. Чтобы не допустить разрушения корпуса и выхода радиоактивных материалов, его внешнюю границу охлаждают водой. Эффективность такого охлаждения определяется механизмом кипения на поверхности объема. Этот механизм, в свою очередь, зависит от локального распределения теплового потока к границе, который обусловлен свободной конвекцией тепловыделяющего расплава. При достижении критического значения плотности потока тепла происходит так называемый кризис кипения. Он соответствует переходу от пузырькового кипения к пленочному. При этом эффективность охлаждения существенно снижается, что приводит к расплавлению корпуса. Характер свободной конвекции определяется мощностью остаточного тепловыделения, теплофизическими свойствами расплава, а также формой поверхности объема.

Решение полной системы уравнений, описывающих конвективное течение жидкости с внутренними источниками тепла, требует немалых временных и вычислительных затрат. В то же время для оценки последствий тяжелой аварии на АЭС с расплавлением активной зоны необходимо оценить распределение теплоотдачи расплава к корпусу реактора в минимальные сроки. Для этого в реакторных кодах используют различные упрощенные модели [1, 2]. В настоящей работе построена физическая модель и разработан алгоритм решения задачи о свободно-конвективной теплоотдаче однокомпонентной энерговывеляющей жидкости в замкнутом объеме. Среда считалась однородной, несжимаемой, изотропной с постоянными

теплофизическими свойствами, с положительным температурным коэффициентом расширения, а режим течения — ламинарным. Численно решена задача о конвекции в цилиндрическом и полусферическом объеме в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^6 \leq Ra_f \leq 10^{12}$ .

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим стационарную свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости в осесимметричном объеме с изотермической боковой (нижней в случае полусферы) границей. Как показывают эксперименты, теоретический анализ и численные расчеты [3—7], объем можно разделить на три области течения (рис. 1).

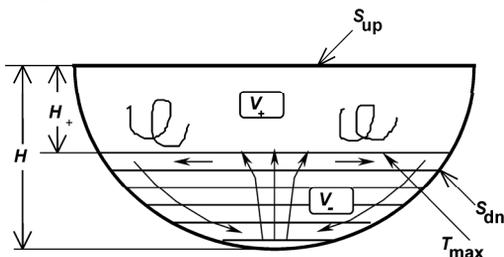


Рис. 1. Общая структура течения

1. *Неоднородное по структуре течение возле верхней горизонтальной границы.* Горизонтальная плоскость, проходящая через точку максимума среднего по времени значения температуры жидкости, делит объем на две части. При условии охлаждения поверхности жидкости  $S_{up}$  в области  $V_+$  высотой  $H_+$  в силу инверсного распределения температуры складывается ситуация, близкая к условиям для конвекции Рэлея — Бенара. Данное течение характеризуется понижением температуры с приближением к плоской верхней границе и возникающим в связи с этим положительным градиентом плотности по направлению, противоположному направлению гравитационной силы.
2. *Область пограничных слоев.* Передача тепла через боковую границу осуществляется через тонкий пограничный слой (ПС), в котором жидкость под действием силы тяжести движется ко дну, ускоряясь за счет поступления жидкости из основного объема (области вне пограничных слоев). Однако с приближением ко дну происходит торможение ПС, сопровождаемое возвратом жидкости в основной объем. Вблизи дна жидкость, изменив свое направление, движется к оси объема, где окон-

чительно замедляется. В случае полусферической геометрии, когда нижняя и боковая поверхности являются единым целым, ПС является сходящимся, благодаря чему разворот течения происходит непрерывно.

3. *Область устойчивой стратификации.* Медленное восходящее течение вне пограничного слоя в нижней части объема  $V_-$  происходит в условиях устойчивой температурной стратификации.

Благодаря существованию трех различных ярко выраженных областей течения задачу о распределении потока тепла к границе замкнутого объема можно упростить. Ограничимся рассмотрением случая, когда верхняя горизонтальная граница объема теплоизолирована. Тогда из-за стратификации температуры в основном объеме максимум температуры  $T_{\max}$  достигается на верхней границе, и режим конвекции Рэлея — Бенара не реализуется. Таким образом, будем считать, что весь занимаемый жидкостью объем состоит из тонких пограничных слоев (с толщиной  $\delta \ll H, R$ ) и области температурной стратификации (рис. 2).

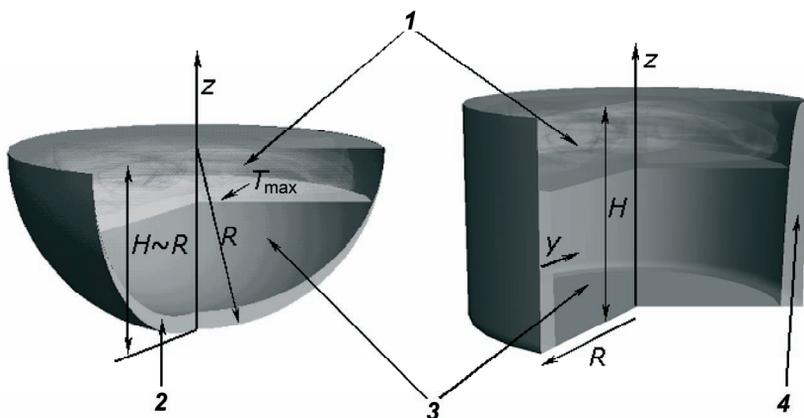


Рис. 2. Геометрия задачи: 1 — слой Рэлея — Бенара (случай охлаждаемой верхней границы); 2 — пограничный слой на дне; 3 — область устойчивой температурной стратификации; 4 — пограничный слой на боковой стенке

Для описания стационарного течения жидкости в пограничном слое на вертикальной границе воспользуемся приближением Прандтля [8]. Поскольку толщина ПС  $\delta$  много меньше характерного поперечного размера объема  $R$ , энерговыведением в правой части уравнения энергии можно пренебречь [9], и система принимает следующий вид:

цилиндр:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\beta(T - T_b(z)), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (3)$$

полусфера:

$$\frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta)u) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\beta(T - T_b(z)) \sin(\theta), \quad (5)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial \theta} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Граничные условия к системе (1)—(6) имеют форму:

цилиндр:

$$y = 0: u, v, T - T_0 = 0; \quad y \gg \delta: u \rightarrow U(z), T(z, y) - T_b(z) \rightarrow 0; \quad (7)$$

полусфера:

$$y = 0: u, v, T - T_0 = 0; \quad y \gg \delta: u \rightarrow U(z), T(y, \theta) - T_b(z) \rightarrow 0; \quad z = R(1 - \cos(\theta)). \quad (8)$$

Температура изотермической части границы  $T_0$  принята за начало отсчета температур.

Благодаря устойчивой температурной стратификации (температура не зависит от горизонтальных координат и  $dT_b/dz > 0$ ) уравнение баланса энергии в основном объеме имеет вид [9]

$$U(z) \frac{dT_b(z)}{dz} = \frac{Q}{\rho c_p}. \quad (9)$$

Из условия баланса массы следует, что поток массы через любое сечение объема с жидкостью равен нулю. Отсюда находим соотношение для вертикальной компоненты скорости, связывающее ее с соответствующей компонентой скорости в пограничном слое:

цилиндр:

$$U(z) \cong -\frac{2}{R} \int_0^{\Delta} dy u(z, y); \quad (10)$$

полусфера:

$$U(z) \cong -\frac{2}{R \sin(\theta)} \int_0^{\Delta} dy u(\theta, y), \quad z = R(1 - \cos(\theta)). \quad (11)$$

Величина верхнего предела в интеграле здесь выбирается в соответствии с неравенством  $\delta \ll \Delta \ll R$ .

Поскольку температура в основном объеме является возрастающей функцией высоты, то в относительной близости ко дну величина температуры мала в сравнении со средним значением по всему объему. Кроме того, как показывают эксперименты и теоретические оценки [9], толщина ПС на дне объема гораздо больше, чем на боковой границе. На этом основании можно пренебречь теплоотдачей в дно. В результате при  $z \rightarrow 0$  подобно (10), (11) из условия энергетического баланса вытекает соотношение, связывающее температуру в пограничном слое и в основном объеме:

цилиндр:

$$U(0)T_b(0) \cong -\frac{2}{R} \int_0^{\Delta} dy u(0, y)T(0, y); \quad (12)$$

полусфера:

$$U(0)T_b(0) \cong -\frac{2}{R \sin(\theta_0)} \int_0^{\Delta} dy u(0, y)T(0, y), \quad (13)$$

где  $\theta_0$  выбирается меньшим или порядка  $\arccos(1 - \frac{\Delta}{R})$  в предположении однородности распределения теплового потока вблизи полюса [9].

### 3. Численная модель

В терминах безразмерных переменных  $\tilde{z}, \tilde{y}, \tilde{u}, \dots$ , определенных равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= z / H, \quad \tilde{y} = y / \Delta, \quad \tilde{u} = u / A_u, \quad \tilde{v} = v / (A_u \frac{\Delta}{H}), \\ \tilde{T} &= (T - T_0) / A_T, \quad \tilde{T}_b = (T_b - T_0) / A_T, \quad \tilde{U} = A_u \frac{\Delta}{R} U, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $A_u = \frac{\nu H}{\Delta^2} \left( \frac{\Delta}{R} \right)^{-1}$ ;  $A_T = A_u^2 / g\beta H$ , система уравнений (1)–(7),

описывающих течение энерговывделяющей жидкости в замкнутом цилиндрическом объеме, принимает вид:

пограничный слой:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (15)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\Delta}{R} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = \tilde{T} - \tilde{T}_b, \quad (16)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \text{Pr}^{-1} \frac{\Delta}{R} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}; \quad (17)$$

основной объем (включая пограничные слои на горизонтальных поверхностях):

$$\tilde{U} \frac{d\tilde{T}_b}{d\tilde{z}} - \text{Pr}^{-1} \left( \frac{\Delta}{R} \right)^2 \left( \frac{R}{H} \right)^2 \frac{d^2 \tilde{T}_b}{d\tilde{z}^2} = \text{Ra}_1 \text{Pr}^{-2} \left( \frac{\Delta}{R} \right)^8 \left( \frac{R}{H} \right)^6; \quad (18)$$

баланс массы:

$$\tilde{U}(\tilde{z}) = -2 \int_0^1 \tilde{u} d\tilde{y}; \quad (19)$$

баланс энергии (теплоотдача в дно не учитывается):

$$\tilde{U}(0) \tilde{T}_b(0) = -2 \int_0^1 \tilde{u}(0, \tilde{y}) \tilde{T}(0, \tilde{y}) d\tilde{y}; \quad (20)$$

граничные условия:

$$\tilde{u}|_{\tilde{z}=1} = \tilde{v}|_{\tilde{z}=1} = \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} = \tilde{v}|_{\tilde{y}=0} = \tilde{T}|_{\tilde{y}=0} = \tilde{u}|_{\tilde{y}=1} = 0, \quad \tilde{T}|_{\tilde{y}=1} = \tilde{T}_b. \quad (21)$$

Расчет уравнений (15)—(20) проводился на равномерной прямоугольной сетке. Поперечный размер области  $\Delta$  выбирался так, чтобы пограничный слой полностью содержался внутри расчетной области ( $\delta < \Delta$ ) и выполнялось неравенство  $\Delta \ll R$ . В настоящей работе все результаты получены для  $\Delta = 4\delta$ , где  $\delta$  определено согласно аналитической оценке

$$\delta = H Ra_I^{-1/5}. \quad (22)$$

Расчеты на сетках с поперечными масштабами  $\Delta = 2\delta$ ,  $\Delta = 3\delta$  дают погрешность в распределении потока тепла к границе менее 5%. Помимо поперечного размера расчетной области независимыми параметрами задачи являются модифицированное число Рэлея  $Ra_I$ , число Прандтля  $Pr$  и аспектное отношение  $R/H$ . Влияние последних двух в работе не исследовалось, и во всех численных экспериментах они предполагались равными единице ( $Pr = 1, R/H = 1$ ). Таким образом, с учетом соотношения (22), единственным независимым параметром задачи является модифицированное число Рэлея  $Ra_I$ .

Численное решение уравнений движения для ПС (15)—(17) проводилось с использованием неявной разностной схемы, требующей выбора начального профиля температуры в основном объеме  $\tilde{T}_b$ :

$$\tilde{u}_j^s \frac{\tilde{u}_j^n - \tilde{u}_j^{n-1}}{\Delta \tilde{z}} + \tilde{v}_j^s \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n-1} - \tilde{u}_{j-1}^{n-1}}{2\Delta \tilde{y}} - \frac{\Delta}{R} \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n-1} - 2\tilde{u}_j^{n-1} + \tilde{u}_{j-1}^{n-1}}{(\Delta \tilde{y})^2} = \tilde{T}_j^s - \tilde{T}_b^s, \quad (23)$$

$$\tilde{u}_j^s \frac{\tilde{T}_j^n - \tilde{T}_j^{n-1}}{\Delta \tilde{z}} + \tilde{v}_j^s \frac{\tilde{T}_{j+1}^{n-1} - \tilde{T}_{j-1}^{n-1}}{2\Delta \tilde{y}} - \frac{\Delta}{R} Pr^{-1} \frac{\tilde{T}_{j+1}^{n-1} - 2\tilde{T}_j^{n-1} + \tilde{T}_{j-1}^{n-1}}{(\Delta \tilde{y})^2} = 0, \quad (24)$$

$$\tilde{v}_j^{n-1} = \tilde{v}_{j-1}^{n-1} - \frac{\Delta \tilde{y}}{\Delta \tilde{z}} (\tilde{u}_j^n - \tilde{u}_j^{n-1}). \quad (25)$$

Здесь нижний индекс  $j$  отвечает поперечной координате  $\tilde{y}$ , а верхние  $n, s$  — продольной координате  $\tilde{z}$ ;  $\Delta \tilde{z}$  и  $\Delta \tilde{y}$  — шаги сетки по продольной и поперечной координате соответственно. Поскольку уравнения (23), (24)

IV. Численное моделирование свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в осесимметричном замкнутом объеме

Д. Г. Григорук, П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский

нелинейные, для их линеаризации был введен промежуточный слой  $s$  по координате  $\tilde{z}$ , аналогично [10]. В начальный момент  $s = n$ . Далее система (23)—(25) решалась с использованием итерационного процесса методом прогонки [11], при этом каждый раз вычислялся новый  $s$ -слой до тех пор, пока квадратный корень из суммы квадратов невязок не становился меньше заданного порогового числа:

$$\sqrt{\sum_j \left( (\tilde{u}_j^{n-1} - \tilde{u}_j^s)^2 + (\tilde{v}_j^{n-1} - \tilde{v}_j^s)^2 + (\tilde{T}_j^{n-1} - \tilde{T}_j^s)^2 \right)} < \varepsilon. \quad (26)$$

Только после этого можно считать, что  $(n - 1)$ -й слой посчитан. Весь процесс продолжался до “дна”, которое соответствует значению  $n = 1$  или  $\tilde{z} = 0$ .

После того как ПС был посчитан, вычислялась скорость в основном объеме при помощи интегрирования уравнения (19) методом трапеций. Аналогичным образом из уравнения (20) находилось новое значение температуры на “дне”. Далее методом прогонки из уравнения (18) определялись

температура в основном объеме и ошибка  $\sqrt{\sum_n \left( \tilde{T}_b^{n,i+1} - \tilde{T}_b^{n,i} \right)^2}$ , где  $i$  — номер итерации. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока не выполнилось условие

$$\sqrt{\sum_n \left( \tilde{T}_b^{n,i+1} - \tilde{T}_b^{n,i} \right)^2} < \varepsilon. \quad (27)$$

Решениями системы (15)—(20) являются пять массивов  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{T}, \tilde{U}, \tilde{T}_b$ . Безразмерная плотность теплового потока к границе вычислялась по формуле

$$\tilde{q}(\tilde{z}) = \frac{\tilde{T}(\tilde{z}, \Delta\tilde{y})}{\Delta\tilde{y}}. \quad (28)$$

Средний тепловой поток к границе определяется интегралом

$$\bar{Q} = \int_0^1 \tilde{q}(\tilde{z}) d\tilde{z}. \quad (29)$$

Из уравнения (29) и условий обезразмеривания для среднего числа Нуссельта имеем

$$\text{Nu} = \frac{H}{\Delta} \frac{\tilde{q}}{\tilde{T}_{\max}}, \quad (30)$$

где  $\tilde{T}_{\max}$  — максимальная температура в объеме. Расчет производился в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^6 \leq \text{Ra}_l \leq 10^{12}$ . При этом каждый раз по формуле (30) вычислялось значение среднего теплового потока. Аналогичным образом проводилось обезразмеривание и построение конечно-разностных уравнений для полусферической геометрии. При этом результаты получены для  $\theta_0 = \arccos(1 - \frac{\Delta}{R})$ .

#### 4. Обсуждение результатов

Система уравнений с граничными условиями (1)—(13) решалась численно в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^6 \leq \text{Ra}_l \leq 10^{12}$ . Как уже отмечалось, зависимость характеристик теплоотдачи от аспектного отношения и числа Прандтля не исследовалась. Во всех расчетах предполагалось, что число Прандтля равно единице, а радиус объема равен его высоте. Безразмерные характеристики свободной конвекции в цилиндре и в полусфере представлены на рис. 3—7. Расчетные кривые подтверждают немонокотный профиль температуры в пограничном слое в нижней части объема [6, 9], что способствует торможению потока жидкости (рис. 3). На рис. 4 видно, что на внешней границе ПС ( $y = 1$ ) производная продольной скорости не обращается в нуль, что означает существование возвратного течения, которое не учитывается в настоящей работе. Однако сравнение с результатом прямого численного моделирования показывает, что подобное пренебрежение приводит к ошибке в распределении потока тепла к границе не более чем в 1%. Профиль температуры в основном объеме (рис. 5), а также распределение теплоотдачи к боковой границе удовлетворяют результатам прямого численного моделирования, выполненного с помощью программного пакета FLUENT. Плотность потока тепла достигает максимума у верхней горизонтальной границы (рис. 6), что также удовлетворяет результатам экспериментов и численных расчетов [6, 7]. Интерполяция численных результатов для среднего числа Нуссельта через боковую (в случае полусферы — нижнюю) границу привела к следующим корреляциям:

цилиндр:

$$\text{Nu}_{\text{sd}} = 0,45 \text{Ra}_l^{0,19}, \quad 10^6 \leq \text{Ra}_l \leq 10^{12}; \quad (31)$$

полусфера:

$$\text{Nu}_{\text{dn}} = 0,44 \text{Ra}_l^{0,18}, \quad 10^7 \leq \text{Ra}_l \leq 10^{12}. \quad (32)$$

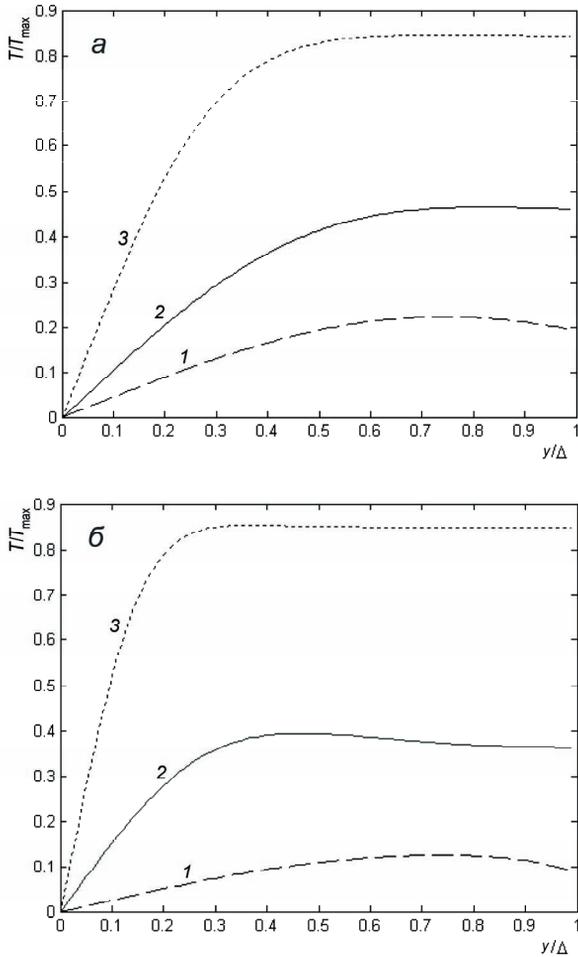


Рис. 3. Температура в пограничном слое:  
а — цилиндр, б — полусфера.  $Ra_I = 10^{10}$ .  
1 —  $z/H = 0,1$ ; 2 —  $z/H = 0,5$ ; 3 —  $z/H = 0,9$

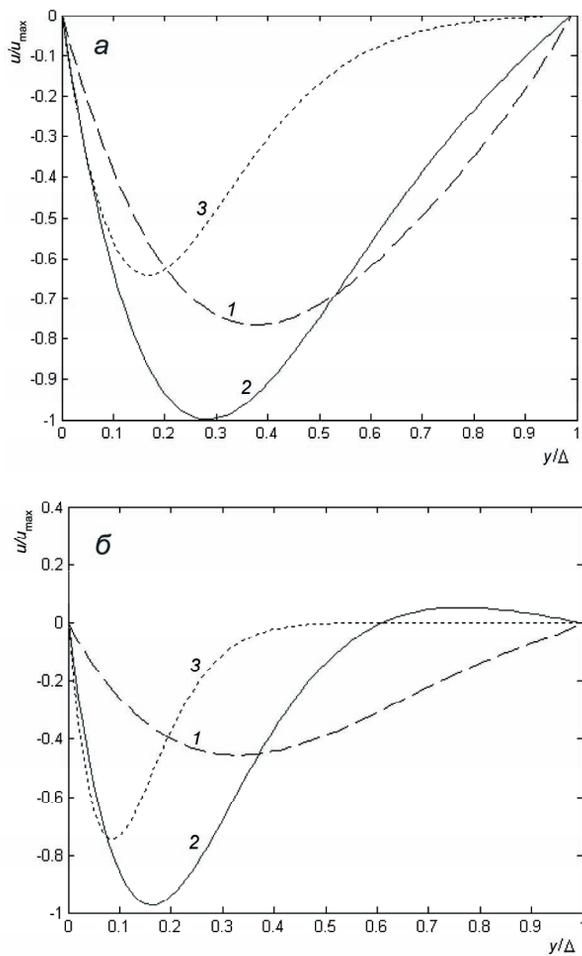


Рис. 4. Продольная компонента скорости в пограничном слое:  
а — цилиндр, б — полусфера.  $Ra_f = 10^{10}$ .  
1 —  $z/H = 0,1$ ; 2 —  $z/H = 0,5$ ; 3 —  $z/H = 0,9$

IV. Численное моделирование свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в осесимметричном замкнутом объеме  
Д. Г. Григорук, П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский

---

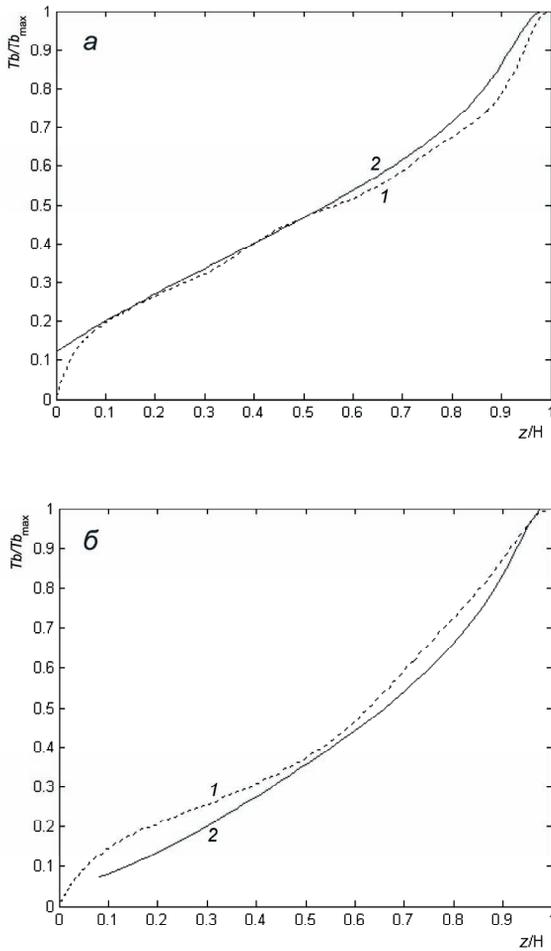


Рис. 5. Температура в основном объеме:  
а — цилиндр, б — полусфера.  $Ra_I = 10^{10}$ .  
1 — FLUENT; 2 — упрощенная схема

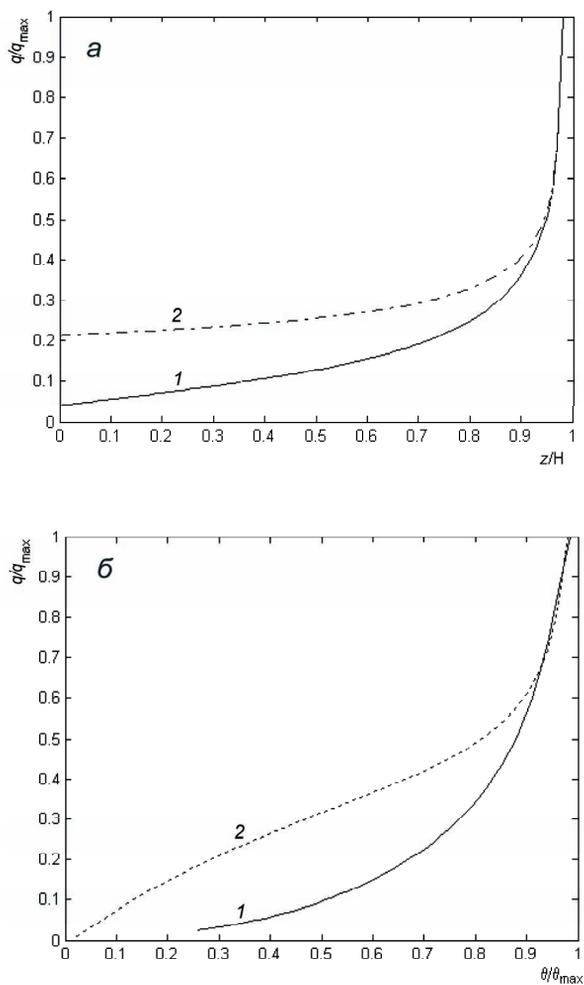


Рис. 6. Плотность теплового потока к границе:  
а — цилиндр, б — полусфера.  $Ra_1 = 10^{10}$ .

1 — расчет для энерговывделяющей жидкости; 2 — расчет для модели с постоянной температурой в объеме

IV. Численное моделирование свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в осесимметричном замкнутом объеме  
Д. Г. Григорук, П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский

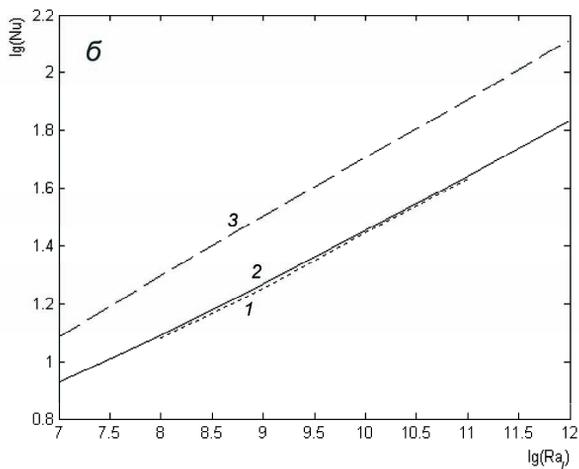
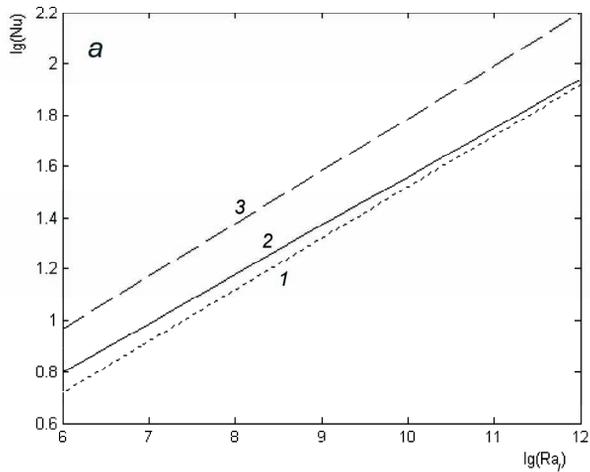


Рис. 7. Интегральный поток тепла:  
а — цилиндр, б — полусфера.  
1 — прямое численное моделирование (FLUENT); 2 — упрощенная схема;  
3 — постоянная температура в объеме

Результаты расчета качественно удовлетворяют результатам экспериментов [4, 6]. Существующее расхождение в среднем числе Нуссельта (табл. 1, 2) объясняется различием в числе Прандтля, в мощности энерговыделения и аспектном отношении ( $R/H = 1/3$  в [6]). Сравнение с результатом прямого численного моделирования, проведенного с использованием программного пакета FLUENT, не обнаружило существенных расхождений, особенно при высоких числах Рэлея. Имеющееся отличие объясняется пренебрежением отводом тепла в дно в предложенной модели (см. (12), (13)).

**Таблица 1. Среднее число Нуссельта на боковой границе  
(результаты расчетов, цилиндр)**

Источник (эксперимент, расчет, модель)	Корреляции
Упрощенный расчет	$Nu_{sd} = 0,45 Ra_I^{0,19} \quad 10^6 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$
Задача Польгаузена	$Nu_{sd} = 0,45 Ra_I^{0,21} \quad 10^6 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$
Расчет Хольцбехера	$Nu_{sd} = 0,66 Ra_I^{0,2} \quad 3 \times 10^{10} \leq Ra_I \leq 10^{13} \quad Pr \approx 7$
Прямое численное моделирование (FLUENT)	$Nu_{sd} = 0,33 Ra_I^{0,2} \quad 10^6 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$

**Таблица 2. Среднее число Нуссельта на нижней границе  
(результаты расчетов, полусфера)**

Источник (эксперимент, расчет, модель)	Корреляции
Упрощенный расчет	$Nu_{dn} = 0,44 Ra_I^{0,18} \quad 10^7 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$
Постоянная температура в объеме	$Nu_{dn} = 0,46 Ra_I^{0,2} \quad 10^7 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$
Эксперимент Маингера	$Nu_{dn} = 0,54 Ra_I^{0,18} \quad 10^7 \leq Ra_I \leq 5 \times 10^{10} \quad Pr \approx 7$
Прямое численное моделирование (FLUENT)	$Nu_{dn} = 0,39 Ra_I^{0,9} \quad 10^8 \leq Ra_I \leq 10^{11} \quad Pr = 1$

В ряде инженерных приложений [13] при расчете конвективных течений в замкнутых полостях пренебрегают стратификацией температуры в основном объеме. Корреляция (31) отличается от формулы для конвекции нетепловы-

*IV. Численное моделирование свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в осесимметричном замкнутом объеме*

*Д. Г. Григорук, П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский*

деляющей жидкости у вертикальной полубесконечной пластины с постоянной температурой вдали от твердых границ [12] (задача Польшаузена)

$$\text{Nu}_{\text{sd}} = 0,54 \text{Ra}^{1/4} \quad (33)$$

или, для модифицированного числа Рэлея,

$$\text{Nu}_{\text{sd}} = 0,55 \text{Ra}_f^{0,21}. \quad (34)$$

Представленные на рис. 6 и 7 графики распределения теплового потока вдоль боковой поверхности и среднего числа Нуссельта показывают существенное различие между конвекцией тепловыделяющей жидкости и жидкости без внутренних источников тепла с постоянной температурой вдали от твердых границ. Особенно это касается нижней части объема, где возрастает влияние стратификации температуры в основном объеме на структуру пограничного слоя. В этой области значения плотностей теплового потока в случае энерговывделяющей жидкости и жидкости без внутренних источников тепла с постоянной температурой в основном объеме отличаются в семь раз.

Как следует из данных табл. 1 и 2, важным фактором, влияющим на распределение теплоотдачи, является геометрия объема. Для полусферической геометрии в [9] на основе анализа размерностей и условий баланса массы, импульса и энергии были получены простые аналитические оценки для характеристик теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла в нижней части объема. Аналогичные рассуждения для случая цилиндрической геометрии также позволили получить качественные оценки для характеристик теплоотдачи:

цилиндр:

$$\bar{u}(z) \propto \text{const}, q(z) \propto c + dz, T_b(z) \propto a + bz; \quad (35)$$

полусфера:

$$\bar{u}(\theta) \propto \theta^{9/5}, q(\theta) \propto \theta^2, T_b(z) \propto z^{4/5}, \quad (36)$$

где  $\bar{u}$  — среднее значение модуля продольной скорости в пограничном слое;  $a, b, c, d$  — константы. Из сравнения (35) и (36) следует, что распределение потока тепла вдоль границы объема в случае полусферического и цилиндрического объемов различно. Это подтверждают и результаты численного расчета (см. рис. 6).

## **5. Заключение**

Построена физическая модель и разработан численный алгоритм решения свободно-конвективной теплоотдачи энерговывделяющей жидкости в замкнутом объеме. Численно решена задача о ламинарном течении в цилиндрическом и полусферическом объемах с изотермическим условием на боковой (в случае полусферы — нижней) границе в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^6 \leq Ra_l \leq 10^{12}$ . По результатам расчета получена зависимость среднего безразмерного потока тепла (числа Нуссельта) к боковой (в случае полусферы нижней) границе от модифицированного числа Рэлея. Найденные распределения скоростей и температуры в пограничном слое на боковой границе по своей структуре соответствуют результатам экспериментов и численных расчетов. Изучено влияние стратификации температуры в основном объеме на характеристики теплоотдачи. Оказалось, что пренебрежение стратификацией при вычислении интегрального распределения плотности теплового потока к границе может приводить к завышению более чем в два раза, а в случае локального распределения плотности потока тепла — к завышению в семь раз.

Авторы благодарны профессору В. М. Головизнину и доктору Е. Ф. Ноготову за консультации по численным методам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-17964-а).

## **Литература**

1. *Игнатъев А. С., Киселев А. Е., Семенов В. Н.* и др. ГЕФЕСТ: Численное моделирование процессов в нижней части реактора ВВЭР при тяжелой аварии. М., 2003. (Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2003-13).
2. *Киселев А. Е., Семенов В. Н., Стрижов В. Ф.* и др. ГЕФЕСТ: Модели теплообмена с паром и перемещения материалов в НКС реактора ВВЭР при тяжелой аварии. М., 2003. (Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2003-14).
3. *Jahn M.* Holografische untersuchung der freien Konvektion in volumetrisch beheizten Fluiden: Doktor-Ingenieur Dissertation. Hannover, 1975.
4. *Mayinger F., Jahn M., Reineke H., Steinberner U.* Untersuchung thermohydraulischer Vorgänge sowie Wärmeaustausch in der kernschmelze — optische Geschwindigkeitsmessung bei freier Konvektion mit inneren Wärmequellen // BMFT. Juli 1975. RS 48/1. Abschlußbericht T. I.

5. *Alvarez D., Malterre P., Seiler J.* Natural convection in volume heated liquid pools — the BAFOND experiments: proposal for new correlations // *Science and Technology of Fast Reactor Safety / BNES.* London, 1986. P. 331—336.
6. *Holzbecher M., Steiff A.* Laminar and turbulent free convection in vertical cylinders with internal heat generation // *Intern. J. of Heat and Mass Transfer.* 1995. Vol. 38, № 15. P. 2893—2903.
7. *Bolshov L. A., Arutyunyan R. V., Chudanov V. V.* et al. Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problem // *Nuclear Science J.* 1995. Vol. 32, № 2. P. 134—139.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
9. *Большов Л. А., Кондратенко П. С., Стрижов В. Ф.* Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости // *УФН.* 2001. Т. 171, № 10. С. 1051—1070.
10. *Ноготов Е. Ф., Синицын А. К.* О численном исследовании нестационарных задач конвекции // *ИФЖ.* 1976. Т. 31, № 6. С. 1113—1119.
11. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
12. *Гебхарт Б., Джалаурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.* Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991.
13. *Poletaev G. N.* Heat transfer from curvilinear boundaries of heat-generating pools // *Proc. of the NURETH-11.* 2005.

## **V. Свободная конвекция в квазидвумерной (slice-) геометрии**

*П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский*

### **1. Введение**

В исследованиях по проблеме безопасности АЭС особое место занимают тяжелые аварии. При потере теплоносителя и разрушении активной зоны возможно накопление тепловыделяющего расплава на дне корпуса реактора. В такой ситуации возникает задача сохранения целостности корпуса с целью предотвращения выхода радиоактивных материалов. На сегодня основными стратегиями по решению этой проблемы для водо-водяных реакторов корпусного типа средней и малой мощности являются внешнее охлаждение и затопление активной зоны водой. При этом эффективность охлаждения определяется механизмом кипения на внешней поверхности корпуса реактора. Во избежание возникновения кризиса кипения требуется знать локальное распределение потока тепла к поверхности, которое определяется свободной конвекцией тепловыделяющего расплава.

При экспериментальном исследовании тяжелоаварийных процессов возникает ряд трудностей. Например, многие параметры задачи, такие как теплофизические свойства расплава, условия теплоотвода на границе, оказываются неопределенными. Ввиду невозможности проведения эксперимента с тепловыделяющим расплавом в объемах, сопоставимых с размерами реакторных установок, используются модельные жидкости: вода, фреон, расплавы солей, в которых объемное тепловыделение создается индукционными токами или джоулевым нагревом. При сохранении исходной геометрии добиться однородного распределения тепловыделения по объему крайне проблематично, поэтому в экспериментах часто использовалась полость в виде относительно тонкого плоскопараллельного слоя, рассматриваемого как осевой срез прототипного трехмерного объема (так называемая slice-геометрия). В любом случае остается открытым вопрос о степени соответствия полученных результатов прототипной ситуации. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

## **2. Критерии качественного соответствия конвекции в квазидвумерной (slice-) геометрии трехмерному аналогу**

### **2.1. Математическое описание и основные характеристики свободной конвекции в замкнутом объеме**

Свободную конвекцию жидкости обычно описывают в приближении Буссинеска, которое соответствует системе уравнений (см. [1])

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} \alpha T + \nu \Delta \vec{v}, \quad (2.2)$$

$$(\vec{v} \nabla) T = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c_p}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\vec{v}$  — скорость течения;  $T$  — температура;  $Q = Q(\vec{r})$  — объемная плотность источников тепла;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\chi$  — температуропроводность;  $\vec{g}$  — ускорение свободного падения;  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения.

Система (2.1)—(2.3) представляет собой запись законов сохранения массы, импульса и энергии. Уравнения выводились в предположении, что отклонения плотности от среднего значения, вызванные неоднородностью температуры, настолько малы, что ими можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения баланса импульса (2.2) (уравнения Навье — Стокса), где это отклонение учитывается в члене с подъемной силой [2].

В области пограничного слоя (ПС) будем обозначать продольную и поперечную компоненты скорости как  $u$  и  $v$  с индексами, соответствующими тому или иному участку границы. В области основного объема (вне пограничных слоев) будем пользоваться декартовой системой координат и обозначать компоненты скорости как  $U_x$ ,  $U_y$  и  $U_z$ .

Представляющая интерес для практических приложений форма объема, в котором рассматривается свободно-конвективная теплоотдача, предполагается аксиально-симметричной, с вертикальной осью, с полусферическим или полуэллиптическим нижним участком границы, в некоторых случаях с цилиндрическим боковым участком, и с плоским горизонтальным верхним участком границы (в литературе такая форма часто обозначается терми-

ном “торисфера”), что соответствует геометрии водо-водяных реакторных установок в их нижней части. Граничные условия предполагаются или полностью изотермическими, или с изотермическим нижним и теплоизолированным верхним участками.

Основными характеристиками теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла являются распределение плотности потока тепла к границе  $q$  и максимальное превышение температуры жидкости в объеме над температурой границы  $\Delta T$ . Закономерности, связанные с этими характеристиками, удобно представлять в виде зависимостей безразмерных чисел Нуссельта и Рэлея, определенных соотношениями

$$\text{Nu} = \frac{qH}{\lambda \Delta T}, \quad (2.4)$$

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha \Delta T H^3}{\nu\chi}, \quad (2.5)$$

от модифицированного числа Рэлея  $\text{Ra}_I$

$$\text{Ra}_I = \frac{g\alpha QH^5}{\lambda\nu\chi}. \quad (2.6)$$

В формулах (2.4)—(2.6)  $\lambda$  — теплопроводность;  $H$  — характерный линейный размер по вертикали занимаемого жидкостью объема (высота). Локальное число Нуссельта, характеризующее распределение потока тепла к границе, является функцией координат вдоль поверхности границы. Число  $\text{Ra}_I$  по существу есть безразмерная мощность тепловыделения жидкости.

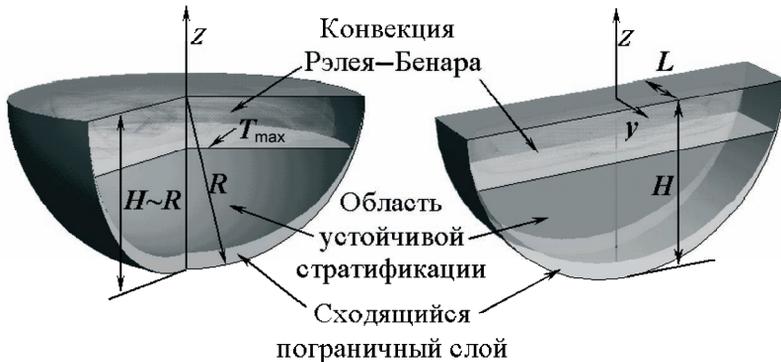
Отметим, что для жидкости без внутренних источников тепла независимой переменной является число  $\text{Ra}$  (при этом в качестве  $\Delta T$  в (2.4) следует понимать характерную разность температур, связанную с граничными условиями). Соответственно теплопередача в этой жидкости определяется в виде  $\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Ra})$ . Напротив, в тепловыделяющей жидкости в качестве независимой переменной выступает модифицированное число Рэлея  $\text{Ra}_I$ , а  $\text{Ra}$  наряду с  $\text{Nu}$  должно рассматриваться как функция  $\text{Ra}_I$ . Следует отметить, что нижняя граница диапазона модифицированных чисел Рэлея, представляющего практический интерес, — порядка  $10^7$ , т. е. существенно выше единицы. Наиболее высокие уровни тепловыделения, рассматри-

ваемые в задачах, посвященных гипотетическим тяжелым авариям с плавлением активной зоны, соответствуют  $Ra_I \sim 10^{17}$ .

Как показывают теоретические оценки и эксперименты, диапазон значений модифицированного числа Рэлея  $Ra_I < 10^{13}$  соответствует ламинарному режиму течения во всем объеме за исключением области Рэлея—Бенара, где течение при  $Ra_I > 10^7$  заведомо турбулентно. Дальнейший анализ проведен именно для этого диапазона чисел Рэлея.

## 2.2. Постановка задачи

Множество экспериментов, моделирующих свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости, как уже упоминалось, проводилось в так называемой slice-геометрии, т. е. в тонком плоскопараллельном вертикальном срезе моделируемого объема с поперечным размером  $L$ , много меньшим высоты  $H$  и радиуса кривизны нижней поверхности  $R$  (рис. 1). В сосуде либо создавался внутренний (джоулев) источник тепла (боковые стенки при этом были теплоизолированными) [3—11], либо он подогревался извне через эти стенки [12]. При такой постановке, естественно, возникает вопрос адекватности замены геометрии полости.



*Рис. 1. Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости в замкнутом объеме. Геометрия прототипа и квазидвумерной модели. Общая структура течения*

Предварительный анализ свободной конвекции в квазидвумерной геометрии проводился ранее, в [13]. В настоящей работе дан подробный анализ структуры пограничных слоев, их влияния на картину стратификации в основной части объема и характер распределения теплоотдачи. Рассмотрены оба варианта симуляции объемного источника тепла.

Степень соответствия данных slice-эксперимента прототипу обусловлена влиянием следующих факторов:

- ограничение движения в поперечном к боковым стенкам направлении;
- вязкое трение о боковые стенки.

При охлаждении верхней горизонтальной границы в области конвекции Рэлея — Бенара в интересующем нас диапазоне мощностей течение, как уже говорилось, турбулентно, а значит, трехмерно. С одной стороны, в slice-геометрии масштабы пульсаций ограничены в одном направлении, но, с другой стороны, это не должно на качественном уровне искажать характеристики теплоотдачи, если толщина полости  $L$  велика в сравнении с характерными толщинами вязких подслоев у стенок, имеющими порядок колмогоровской длины (численные множители для разных типов геометрии, естественно, не обязаны совпадать). Таким образом, качественное соответствие теплоотдачи в области Рэлея — Бенара между двумя типами геометрии определяется соотношением этих двух пространственных масштабов.

Рассмотрим теперь часть объема, лежащую ниже точки максимума температуры. Первый из двух перечисленных факторов стремится сделать течение в этой области практически таким же, как в сосуде в форме длинного горизонтального полуцилиндра с тем же, что и у среза, радиусом кривизны нижней границы  $R$ . Последний, таким образом, можно рассматривать как некий промежуточный объект между прототипным и моделирующим объемами [13, 14]. Течение в прототипной трехмерной геометрии при ламинарном режиме аксиально-симметрично, стало быть, двумерно, и некоторые характеристики теплоотдачи в цилиндрической и сферической геометрии должны совпадать с точностью до численных множителей, а именно:

- зависимости интегральных характеристик теплоотдачи (чисел Нуссельта) от модифицированного числа Рэлея [15, 16];
- предельные зависимости плотности теплового потока от угловой координаты на охлаждаемой (нижней) границе [17—19].

Совпадение перечисленных характеристик с точностью до численных коэффициентов определяет наилучшее возможное соответствие slice-модели трехмерному прототипу. Фактором, способным нарушить это соответствие, остается вязкое трение о вертикальные боковые стенки,

которое приводит к образованию вблизи этих стенок пограничных слоев (таким образом, течение становится сугубо трехмерным). Влияние этого фактора незначительно, если:

- пограничные слои на боковых стенках не нарушают режим конвекции в области конвекции Рэлея — Бенара;
- пограничные слои на боковых стенках не искажают режим температурной стратификации в нижней части объема);
- ПС на охлаждаемой нижней границе достаточно тонок по сравнению с толщиной slice-объема  $L$ , так что трение о боковые стенки не оказывает существенного влияния на течение в нем.

Перечисленные обстоятельства накладывают ограничения снизу на толщину slice-объема  $L$ . Их установлению и посвящен настоящий раздел.

### **2.3. Внутренний (джоулев) разогрев**

Теперь перейдем непосредственно к анализу свободной конвекции в slice-полости с объемным тепловыделением. Систему координат выберем следующим образом: ось  $x$  направим горизонтально вдоль вертикальных теплоизолированных плоских участков границы, ось  $y$  направим по нормали к ним, ось  $z$  — вертикально вверх (см. рис. 1). Будем считать режим течения в ПС на охлаждаемой границе ламинарным. Число Прандтля  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$  будем полагать порядка единицы.

Рассмотрим нижнюю область объема, соответствующую области температурной стратификации в трехмерной геометрии. Прежде чем приступить к анализу ПС на теплоизолированных боковых стенках, приведем некоторые оценки для свободно-конвективного ПС на охлаждаемом участке границы, которыми будем пользоваться ниже.

Наибольшая толщина ПС на охлаждаемой границе, достигаемая вблизи полюса (самой нижней точки границы), была оценена в [19]:

$$\frac{\delta_{c \max}}{R} \sim Ra_T^{-1/6}. \quad (2.7)$$

Для того чтобы течение в ПС оставалось, как упоминалось выше, двумерным, необходимо, чтобы вязкое трение о плоские боковые стенки не искажало течения в нем. Отсюда возникает требование, чтобы толщина ПС была малой по сравнению с поперечным размером полости  $L$ :

$$\delta_{c \max} \ll L, \quad (2.8)$$

или, с учетом (2.7),

$$\frac{L}{R} \gg \text{Ra}_I^{-1/6}.$$

При условии (2.8) для ПС будут справедливы оценки, вытекающие из уравнений баланса массы, импульса и энергии, аналогичные найденным в [19] для аксиально-симметричной геометрии.

Из уравнения баланса массы (2.1) получаем следующую оценку:

$$U_z \sim v_c \sim u_c \frac{\delta_c}{R\theta} \sim u_c \frac{\delta_c}{\sqrt{Rz}}, \quad (2.9)$$

где  $U_z$  — вертикальная компонента скорости в основном объеме;  $u_c$  и  $v_c$  — продольная и поперечная компоненты скорости в ПС на охлаждаемой границе;  $z$  — вертикальная координата, отсчитанная от полюса;  $\theta$  — угловая координата, отсчитанная от полюса.

Из уравнения баланса импульса (2.2) имеем

$$u_c^2 \sim g\alpha T_b z, \quad (2.10)$$

где  $T_b$  — температура в основном объеме (области вне пограничного слоя на охлаждаемом участке границы).

Из уравнения баланса энергии (2.3) вытекает

$$u_c \delta_c^2 \sim \chi R \theta. \quad (2.11)$$

Поскольку течение в нижней части основного объема жидкости  $V_-$  относительно медленное, толщины ПС на теплоизолированных боковых стенках  $\delta_s$  в этой области ожидаются наибольшими среди всех участков границы объема:

$$\delta_s \sim \sqrt{\frac{vz}{U_z}}.$$

В работе [19] была получена оценка для толщины ПС на охлаждаемой границе

$$\delta_c \sim \delta_{c \max} \left( \frac{\theta}{\theta^*} \right)^{-2/5},$$

где  $\theta^*$  определяется условием

$$\delta_c(\theta^*) \sim R\theta^{*2} \sim \delta_{c \max}.$$

Углу  $\theta$  соответствует значение координаты  $z \approx \frac{R\theta^2}{2}$ , таким образом,

$$\delta_c \sim \delta_{c \max} \left( \frac{z}{\delta_{c \max}} \right)^{-1/5}. \quad (2.12)$$

Пользуясь этой оценкой, а также (2.9) и (2.11), находим

$$\frac{\delta_s}{\delta_{c \max}} \sim \left( \frac{z}{\delta_{c \max}} \right)^{2/5},$$

откуда с учетом (2.7) следует

$$\frac{\delta_s}{R} \sim \text{Ra}_I^{-1/10}. \quad (2.13)$$

В некоторых случаях толщина ПС на боковой стенке может быть сравнима с толщиной всего объема, что на первый взгляд может показаться неприемлемым с точки зрения соответствия модели трехмерному прототипу, так как режим стратификации, а стало быть, и распределение теплоотдачи при этом будут существенно искажены. Но подробный анализ ПС на вертикальной теплоизолированной границе дает не столь пессимистичные результаты.

Остановимся для начала на горизонтальном течении и предположим, что толщина ПС на боковой стенке — одного (или большего) порядка с полной толщиной объема  $L$ . При этом силы вязкости и давления при рассмотрении горизонтального течения существенны. Тем не менее можно показать, что горизонтальное течение не нарушает режим температурной стратификации. Из горизонтальных компонент уравнения баланса импульса (2.2) оценим характерные масштабы изменения давления по горизонтальным направлениям:

$$\{\delta P\}_x \sim \frac{\nu \rho \sqrt{Rz} U_x}{L^2}, \quad \{\delta P\}_y \sim \frac{\nu \rho U_y}{L}.$$

Для уравнения баланса массы (2.1) в основном объеме справедлива следующая оценка:

$$\frac{U_x}{\sqrt{Rz}} \sim \frac{U_y}{L} \sim \frac{U_z}{z}.$$

Используя (2.9)—(2.11) и эту оценку, находим

$$\{\delta P\}_x \sim \frac{\delta_c^3}{L^2} \rho g \alpha T_b, \quad \{\delta P\}_y \sim \frac{\delta_c^3}{Rz} \rho g \alpha T_b. \quad (2.14)$$

Ввиду того что течение вне ПС на охлаждаемой границе медленное по сравнению с ПС на охлаждаемой границе, градиент давления в уравнении баланса импульса (2.2) для вертикальной компоненты течения целиком уравновешивается архимедовой силой, как в гидростатике (см. [19]). Пользуясь этим соображением, из (2.14) оценим масштабы изменения температуры по горизонтальным направлениям:

$$\{\delta T_b\}_x \sim \frac{\delta_c^3}{L^2 z} T_b \ll T_b, \quad \{\delta T_b\}_y \sim \frac{\delta_c^3}{Rz^2} T_b \ll T_b, \quad (2.15)$$

т. е. характерные перепады температур по горизонтальным направлениям существенно меньше перепада по вертикали, иначе говоря, температура зависит практически только от вертикальной координаты. Таким образом, фактором, способным привести к искажению стратификации, остается лишь вертикальное течение в ПС на плоских вертикальных границах.

С учетом (2.17) при условии малости толщины ПС на охлаждаемой границе уравнение энергетического баланса в основном объеме (вне ПС на охлаждаемом участке границы) приобретает вид

$$U_z \frac{dT_b}{dz} = \frac{Q}{\rho c}. \quad (2.16)$$

Теперь рассмотрим вертикальное течение вблизи теплоизолированной боковой стенки, полагая известными зависимости вертикальной скорости  $U_z$  и температуры  $T_b$  в основном объеме от координаты  $z$ .

Механизм формирования ПС для вертикальной скорости существенно отличается от ответственного за формирование как сдвиговых, так и свободно-конвективных слоев. Качественно этот механизм можно объяснить следующим образом. Градиент температуры вне ПС на охлаждаемой границе, как видно из (2.16), обратно пропорционален вертикальной скорости течения. Тем самым создается обратная связь: замедление течения за счет вязкого трения о стенку приводит к местному разогреву и, как следствие, к росту сил плавучести. Это, в свою очередь, ведет к выравниванию поперечных профилей вертикальной скорости и температуры везде, кроме тонкого слоя, где они меняются с поперечной координатой  $y$ . Таким образом, формируется ПС, основанный не на балансе инерционных и вязких сил, как обычно, а на балансе сил вязкости и плавучести. Забегая вперед

(см. неравенство (2.23)), отметим, что вклад инерционных сил при этом оказывается несущественным. Сравнивая вязкие силы и силы плавучести в уравнении баланса импульса, выразим толщину ПС для вертикальной скорости  $\delta_z$  (в дальнейшем будем называть его  $z$ -подслоем), полагая  $y \sim \delta_z$ :

$$g\alpha(T - T_b) \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \nu \frac{U_z}{\delta_z^2} \Rightarrow \delta_z^2 \sim \frac{\nu U_z}{g\alpha\Delta T}. \quad (2.17)$$

В уравнении теплопереноса (2.3) ни конвекцией, ни теплопроводностью, ни вкладом внутренних источников тепла нельзя пренебречь. Приравнивая по порядку величины два последних, найдем перепад температуры по ПС  $\Delta T$ :

$$u \frac{\partial T}{\partial z}; \quad \nu \frac{\partial T}{\partial y} \sim \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \frac{Q}{\rho c} \Rightarrow \Delta T \sim \frac{Q\delta_z^2}{\chi\rho c}. \quad (2.18)$$

Это позволит нам выразить  $\delta_z$ :

$$\delta_z^2 \sim \frac{\nu\chi U_z}{g\alpha \frac{Q}{\rho c} \delta_z^2},$$

$$\delta_z \sim \left( \frac{\nu\chi U_z}{g\alpha \frac{Q}{\rho c}} \right)^{1/4} \sim \left( \frac{\nu\chi}{g\alpha \frac{dT_b}{dz}} \right)^{1/4}. \quad (2.19)$$

Используя эту оценку для толщины  $z$ -подслоя  $\delta_z$ , а также (2.9)—(2.11), покажем малость перепада температуры по подслою  $\Delta T$  по сравнению с  $T_b$ :

$$\Delta T^2 \sim \frac{\left(\frac{Q}{\rho c}\right)^2 \delta_z^4}{\chi^2} \sim \text{Pr} \frac{\delta_c^2}{Rz} T_b^2; \quad \frac{\Delta T}{T_b} \ll 1. \quad (2.20)$$

Используя оценки (2.18) и (2.19), выразим  $\delta_z$  через толщину ПС на охлаждаемом участке границы, соответствующую тому же значению координаты  $z$ :

$$\delta_z^2 \sim \frac{\nu U_z}{g\alpha\Delta T} \sim \frac{\nu^{1/2}\chi^{1/2}\delta_c}{U_z} \sqrt{\frac{z}{R}}.$$

Выражая  $U_z$  с помощью оценок (2.9) и (2.11), получаем, что толщина  $z$ -подслоя не превышает наибольшей толщины ПС на охлаждаемом участке границы:

$$\delta_z \sim \delta_c \left( \frac{z}{R} \right)^{1/20} < \delta_{c\max} \ll L, \quad (2.21)$$

а стало быть,  $z$ -подслоем при соблюдении неравенства (2.8) существенно тоньше самой полости и не оказывает влияния на режим стратификации в ней. Это обстоятельство позволяет окончательно установить ограничения на толщину slice-объема (см. в конце раздела).

Пользуясь зависимостью  $\delta_c \propto \theta^{-7/5}$  (см. [19]), покажем малость  $\delta_z$  по сравнению с толщиной ПС для горизонтальной скорости (сдвигового типа) на боковой стенке  $\delta_s$ , имеющей порядок  $\delta_s \sim \sqrt{\frac{\nu z}{U_z}}$ :

$$\left( \frac{\delta_z}{\delta_s} \right)^2 \sim \text{Pr}^{-1/2} \frac{\delta_c}{\sqrt{Rz}} \sim \text{Pr}^{-1/2} \left( \frac{z}{R} \right)^{-7/10} \text{Ra}_I^{-1/5} \ll 1. \quad (2.22)$$

$\delta_s$  имеет тот же порядок, что и толщина гипотетического сдвигового слоя, соответствующая скорости течения вдали от стенки  $U_z$ , т. е. того масштаба длины, на котором вязкие и инерционные силы сравниваются по порядку величины.

Этот факт (см. (2.22)) позволяет пренебречь инерционными слагаемыми в вертикальной компоненте уравнения баланса импульса (2.2):

$$\frac{\text{Инерц. слаг.}}{\text{Вязк. слаг.}} \sim \frac{U_z^2/z}{\nu U_z / \delta_s^2} \sim \frac{\delta_z^2}{\delta_s^2} \ll 1. \quad (2.23)$$

Тем самым указанное уравнение линеаризуется:

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\alpha(T - T_b). \quad (2.24)$$

Таким образом, зависимость от горизонтальной компоненты скорости исчезает из уравнения. Принимая во внимание малость перепада температуры по  $z$ -подслою (см. (2.20)) и вычитая уравнение баланса энергии

в основном объеме (2.16), приводим уравнение теплопереноса (2.3) в z-подслое к виду

$$(u - U_z) \frac{dT_b}{dz} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.25)$$

Представим вертикальную скорость и температуру как

$$\begin{aligned} u &= U_z + u', \\ T &= T_b + T' \end{aligned} \quad (2.26)$$

и запишем систему уравнений (2.24), (2.25) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} &= -\frac{g\alpha}{\nu} T', \\ \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} &= \frac{1}{\chi} \frac{dT_b}{dz} u'. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Обезразмерим поперечную координату  $y$ , скорость и температуру:

$$\begin{aligned} y &= \eta \left( \frac{\nu\chi}{g\alpha \frac{dT_b}{dz}} \right)^{1/4}, \quad u' = U_z(z) \varphi(\eta), \\ T' &= -\frac{\nu U_z}{g\alpha} \left( \frac{\nu\chi}{g\alpha \frac{dT_b}{dz}} \right)^{-1/2} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

и сведем систему (2.27) к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi}{d\eta^4} &= -\varphi, \\ \varphi|_0 &= -1; \quad \varphi|_\infty = \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \Big|_\infty = \frac{d^3 \varphi}{d\eta^3} \Big|_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Решение этого уравнения с учетом (2.28) приводит к следующим выражениям для скорости и температуры в z-подслое:

$$u = U_z \left( 1 - \sqrt{2} e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \cos \left( \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \right),$$

$$T = T_b + \frac{vU_z}{g\alpha} \left( \frac{g\alpha dT_b/dz}{v\chi} \right)^{1/2} \sqrt{2} e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \sin \left( \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.30)$$

Решение уравнения (2.29) показано на рис. 2

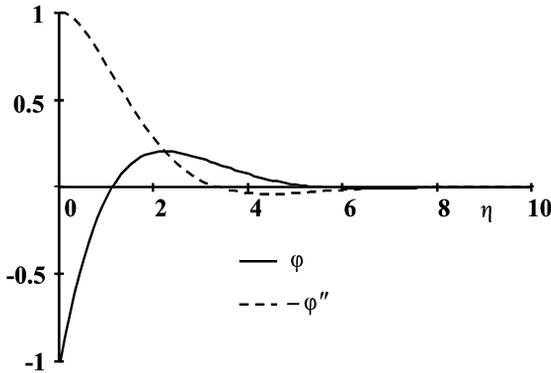


Рис. 2. Профили приведенной вертикальной скорости  $\varphi$  и температуры  $-\varphi''$  в ПС на вертикальной боковой стенке при внутреннем разогреве (см. (2.27), (2.28))

Ввиду неравенства (2.21) наиболее опасный ПС, способный нарушить соответствие квазидвумерной модели ее трехмерному прототипу, — ПС на охлаждаемой границе. Таким образом, условия наилучшего соответствия могут быть выражены в виде следующих геометрических ограничений (см. (2.8)):

$$\delta_{c \max} \ll L \ll R, \quad (2.31)$$

которые с учетом (2.7) записываются в безразмерном виде:

$$\text{Ra}_l^{-1/6} \ll \frac{L}{R} \ll 1. \quad (2.32)$$

## **2.4. Боковой (стеночный) разогрев**

Теперь рассмотрим модель с подводом тепла через плоские вертикальные участки границы. При такой постановке эксперимента внутренние источники тепла отсутствуют, однако в этом случае можно ввести безразмерный критерий, аналогичный модифицированному числу Рэлея, введенному для прототипного объема или квазидвумерной модели с внутренними источниками тепла. Он будет выглядеть как

$$\text{Ra}_m = \frac{g\alpha q_s H^5}{\nu\chi\lambda L}, \quad (2.33)$$

где  $q_s$  — плотность потока тепла, подводимого через плоские вертикальные участки границы. Величина  $\frac{q_s}{L}$  при этом играет ту же роль, что и плотность источников тепла  $Q$  в случае объемного тепловыделения.

Ограничения (2.31), (2.32) остаются справедливыми с заменой  $\text{Ra}_l$  на  $\text{Ra}_m$ . Пограничные слои, возникающие при этом на вертикальных боковых стенках, являются теперь классическими свободно-конвективными ПС. В зависимости от соотношения толщин ПС и поперечного размера объема  $L$  можно выделить два случая:

- 1) ПС не стеснены (толщины ПС много меньше  $L$ );
- 2) ПС стеснены (поперечный размер объема меньше толщины ПС).

Рассмотрим для начала первый случай, когда свободно-конвективные ПС на вертикальных боковых стенках отделены друг от друга. Будем полагать, что ограничение (2.32) выполнено. Выпишем оценки, вытекающие из условий баланса массы импульса и энергии в ПС.

Из уравнения баланса массы (2.1) имеем

$$\frac{u_s}{z} \sim \frac{v_s}{\delta_s}, \quad (2.34)$$

где

$$\delta_s \sim \frac{\chi}{v_s}.$$

Отсюда можно выразить продольную скорость в ПС

$$u_s \sim \frac{v_s^2 z}{\chi}. \quad (2.35)$$

Из условия баланса импульса (2.2) получаем

$$u_s^2 \sim g\alpha\Delta T_s z, \quad (2.36)$$

где  $\Delta T_s$  — порядок перепада температуры по ПС.

Из условия баланса энергии (2.3) вытекает:

$$v_s \Delta T_s \sim \frac{q_s}{\rho c}. \quad (2.37)$$

Теперь, пользуясь оценками (2.34), (2.36) и (2.37), свяжем поперечную скорость на свободной границе ПС (скорость подсоса)  $v_s$  с плотностью теплового потока через боковую стенку  $q_s$  :

$$v_s^4 \sim \frac{g\alpha\chi^2 \Delta T_s}{z}, \quad v_s^5 \sim \frac{q_s g\alpha\chi^2}{\rho c z},$$
$$v_s \sim \left( \frac{g\alpha\chi^2 q_s}{\rho c} \right)^{1/5} z^{-1/5}. \quad (2.38)$$

Из уравнения баланса массы (2.1) в основном объеме вытекает оценка

$$\frac{U_y}{L} \sim \frac{U_z}{z}.$$

С учетом условий сопряжения с пограничными слоями она приобретает вид

$$\frac{v_s}{L} \sim \frac{v_c}{z}. \quad (2.39)$$

Используя (2.39), находим поперечную компоненту скорости на периферии ПС на охлаждаемой границе  $v_c$  :

$$v_c \sim \left( \frac{g\alpha\chi^2 q_s}{\rho c} \right)^{1/5} \frac{z^{4/5}}{L}. \quad (2.40)$$

Для ПС на охлаждаемом участке границы при выполнении условий (2.32) можно выписать оценки, аналогичные соотношениям (2.9)—(2.11).

Используя их, оценим перепад температуры по ПС  $\Delta T_c$  и плотность теплового потока через охлаждаемую границу  $q_c$ .

Из условия баланса массы (2.1) имеем

$$\frac{u_c}{R\theta} \sim \frac{v_c}{\delta_c}, \quad (2.41)$$

где толщина ПС  $\delta_c \sim \frac{\chi}{v_c}$ .

Отсюда вытекает связь продольной и поперечной компонент скорости:

$$u_c \sim \frac{v_c^2 R \theta}{\chi} \sim \frac{v_c^2 \sqrt{Rz}}{\chi}. \quad (2.42)$$

Из условия баланса импульса (2.2) следует:

$$u_c^2 \sim g\alpha\Delta T_c z. \quad (2.43)$$

Пользуясь (2.42) и (2.43), свяжем поперечную скорость и перепад температуры по ПС  $\Delta T_c$ :

$$v_c^4 \sim \frac{g\alpha\chi^2\Delta T_c}{R}. \quad (2.44)$$

Теперь выразим плотность потока тепла через охлаждаемую границу:

$$q_c \sim \rho c v_c \Delta T_c \sim q_s \left( \frac{R}{L} \right)^5 \theta^8. \quad (2.45)$$

Как видно, зависимость плотности теплового потока от полярного угла ( $q_c \propto \theta^8$ ) существенно отличается от имеющей место в трехмерной геометрии ( $q_c \propto \theta^2$ ) [19]. Отсюда мы заключаем, что случай с разделенными свободно-конвективными ПС на вертикальных боковых стенках неприемлем для моделирования свободной конвекции в трехмерной геометрии.

Рассмотрим теперь случай "тонкого" среза:

$$L^2 \ll \frac{\chi z}{u_z}, \quad (2.46)$$

что соответствует малости  $L$  по сравнению с толщиной гипотетического ПС на вертикальной стенке  $\delta_s$ .

Мы продолжаем полагать, что толщина свободно-конвективного ПС на охлаждаемой границе много меньше  $L$ , иначе говоря, выполнены неравенства (2.31) и (2.32). При соблюдении этого условия оценки, вытекающие из уравнений баланса массы, импульса и энергии в ПС на охлаждаемой границе, аналогичны уравнениям (2.9)—(2.11). Скорость течения и температура в основном объеме заменяются соответствующими величинами, усредненными по поперечной координате  $y$ .

Из условия баланса массы (2.1) вытекает:

$$\overline{U_z} \sim v_c \sim u_c \frac{\delta_c}{R\theta} \sim u_c \frac{\delta_c}{\sqrt{Rz}}. \quad (2.47)$$

Из условия баланса импульса (2.2) получаем

$$u_c^2 \sim g\alpha T_b z. \quad (2.48)$$

Из условия баланса энергии (2.3) следует:

$$u_c \delta_c^2 \sim \chi R\theta. \quad (2.49)$$

Теперь перейдем к области вне ПС на охлаждаемом участке границы, соответствующей области устойчивой температурной стратификации в аксиально-симметричной геометрии. Выпишем для нее уравнение баланса энергии (2.3) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(U_x T) + \frac{\partial}{\partial y}(U_y T) + \frac{\partial}{\partial z}(U_z T) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.50)$$

Усредняя его по поперечной координате  $y$ , избавляемся от слагаемого с поперечной скоростью  $U_y$ , исчезающего благодаря граничным условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{U_x T}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{U_z T}) = \frac{\chi}{L} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{L} \frac{q_{s1} + q_{s2}}{\rho c} = \frac{1}{L} \frac{q_s}{\rho c}. \quad (2.51)$$

Порядок изменения температуры по  $y$  можно оценить следующим образом:

$$\{\delta T\}_y \sim L \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{L/2; -L/2} = \frac{L q_s}{\lambda}. \quad (2.52)$$

Его вклад в левую часть уравнения (2.51):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{U_x \{\delta T\}_y} \right) \sim \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{u_x \frac{L q_s}{\lambda}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{U_z \{\delta T\}_y} \right) \sim \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{u_z \frac{L q_s}{\lambda}} \right). \quad (2.53)$$

Из условия баланса массы (2.1) вытекает следующая оценка:

$$\frac{\overline{U_x}}{\sqrt{Rz}} \sim \frac{\overline{U_y}}{L} \sim \frac{\overline{U_z}}{z}. \quad (2.54)$$

Принимая во внимание (2.54) и неравенство (2.46), можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{U_x \{\delta T\}_y} \right) &\sim \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{U_z \frac{\sqrt{Rz}}{z} \frac{L q_s}{\lambda}} \right) \ll \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\chi z}{L} \frac{\sqrt{Rz}}{z} \frac{q_s}{\lambda} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{U_z \{\delta T\}_y} \right) &\sim \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{U_z \frac{L q_s}{\lambda}} \right) \ll \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\chi z}{L} \frac{q_s}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Заменяя для качественных оценок дифференцирование по координатам  $x$  и  $z$  делением на соответствующие характерные пространственные масштабы, покажем, что вклад поперечного изменения температуры в левую часть уравнения (2.51) незначителен по сравнению с его правой частью:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{U_x \{\delta T\}_y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{U_z \{\delta T\}_y} \right) \ll \frac{1}{L} \frac{q_s}{\rho c}. \quad (2.56)$$

Таким образом, операции усреднения скорости и температуры в уравнении можно разделить:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{U_x T} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{U_z T} \right) = \frac{1}{L} \frac{q_s}{\rho c}. \quad (2.57)$$

Усредненное уравнение баланса массы

$$\frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial z} = 0$$

позволяет записать (2.57) в следующем виде:

$$\overline{U_x} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + \overline{U_z} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{q_s}{\rho c}. \quad (2.58)$$

Из уравнения сохранения импульса (2.2) оценим порядок изменения давления по горизонтальным координатам:

$$\{\delta P\}_x \sim \nu \rho \sqrt{Rz} \frac{U_x}{L^2}, \quad \{\delta P\}_y \sim \nu \rho L \frac{U_y}{L^2}. \quad (2.59)$$

Используя оценку (2.54) для уравнения сохранения массы и оценки для ПС на охлаждаемой границе (2.47)—(2.49), находим:

$$\{\delta P\}_x \sim \frac{\nu \rho Rz}{L^2 z} U_z \sim \text{Pr} \frac{\delta_c^3}{L^2} \rho g \alpha \overline{T}, \quad \{\delta P\}_y \sim \nu \rho \frac{U_z}{z} \sim \text{Pr} \frac{\delta_c^3}{Rz} \rho g \alpha \overline{T}. \quad (2.60)$$

Аналогично рассмотренному выше случаю с помощью вертикальной компоненты уравнения баланса импульса (2.2) оценим изменение температуры по координате  $x$  и покажем, что вне ПС на охлаждаемой границе оно незначительно при соблюдении неравенств (2.31) или (2.32):

$$\{\delta T\}_x \sim \text{Pr} \frac{\delta_c^3}{L^2 z} \overline{T} \ll \overline{T}. \quad (2.61)$$

Таким образом, первым слагаемым в (2.51) можно пренебречь:

$$\overline{U_x} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \sim \overline{U_z} \frac{\sqrt{Rz}}{z} \text{Pr} \frac{\delta_c^3}{L^2 z} \frac{\overline{T}}{\sqrt{Rz}} \sim \text{Pr} \frac{\delta_c^3}{L^2 z} \overline{U_z} \frac{\overline{T}}{z} \ll \overline{U_z} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}. \quad (2.62)$$

Из (2.60) следует, что вне ПС на охлаждаемой границе изменение температуры по поперечной координате  $y$  также незначительно:

$$\{\delta T\}_y \sim \frac{L^2}{\chi} \overline{U_z} \frac{d\overline{T}}{dz} \sim \frac{L^2 \overline{U_z}}{\chi z} \overline{T} \ll \overline{T}. \quad (2.63)$$

С учетом сказанного уравнение сохранения энергии можно записать в следующем виде:

$$U_z \frac{d\overline{T}}{dz} = \chi \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2}, \quad (2.64)$$

В усредненном по координате  $y$  виде оно будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{U_z} \frac{d\overline{T}}{dz} = \frac{1}{L} \frac{q_s}{\rho c}. \quad (2.65)$$

Из неравенств (2.61) и (2.63) вытекает, что в рассматриваемой части объема  $V_-$  имеет место температурная стратификация. Уравнение сохранения энергии (2.65) аналогично найденному для нижней области трехмерного объема [19] (см. (2.16)), при этом величина  $\frac{q_s}{L}$ , как было отмечено в начале раздела, играет роль мощности внутренних источников тепла. Система уравнений (2.47)—(2.49) и (2.65) совпадает с выведенной для трехмерной геометрии (см. [19]). Решая эту систему, получим предельные зависимости плотности теплового потока, продольной скорости, толщины ПС на охлаждаемой границе от полярного угла, а также зависимость температуры основного объема от  $z$ , совпадающие с аналогичными зависимостями для трехмерного объема (с точностью до численных коэффициентов) [19]. Таким образом, мы заключаем, что наилучшее соответствие между подогреваемым через боковые стенки квазидвумерным объемом и исходным трехмерным объемом (см. выше) возможно при соблюдении неравенств (2.31) и (2.46) (см. в конце раздела).

Соблюдение этих неравенств позволяет также вычислить поперечные профили температуры и вертикальной скорости, связанных уравнением (2.64). Чтобы замкнуть систему, исключим давление из уравнения баланса импульса.

$$-\nu \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g\alpha T. \quad (2.66)$$

Усредненное по поперечной координате, оно примет вид

$$-\nu \frac{\partial U_z}{\partial y} \Big|_{-L/2}^{L/2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + g\alpha \overline{T}. \quad (2.67)$$

Сравним порядок поперечного изменения сил давления и плавучести в (2.66) (см. уравнения (2.60) и (2.63)):

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \{\delta P\}_y}{g\alpha \{\delta T\}_y} \sim \frac{\frac{\nu U_z}{z^2}}{g\alpha \overline{T} \frac{L^2 U_z}{\chi z}} \sim \frac{\nu \chi}{L^2 u_c^2} \sim \text{Pr} \frac{\delta_c^4}{RzL^2} \ll 1. \quad (2.68)$$

Вычитая (2.67) из (2.56) и принимая во внимание (2.68), получаем

$$-v \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} = g\alpha(T - \bar{T}) - \frac{v}{L} \frac{\partial U_z}{\partial y} \Big|_{-L/2}^{L/2}. \quad (2.69)$$

Введем безразмерные поперечную координату, температуру и скорость:

$$y = \frac{L}{2} \eta, \quad T - \bar{T} - \frac{v}{g\alpha L} \frac{\partial u_z}{\partial y} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{L(q_{s1} + q_{s2})}{2\chi\rho c} \varphi, \quad (2.70)$$

$$U_z = \frac{L(q_{s1} + q_{s2})}{2\rho c} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2}.$$

Из уравнений (2.64) и (2.69) следует:

$$\frac{d^4 \varphi}{d\eta^4} = -\omega^4 \varphi, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{L}{2} \left( \frac{g\alpha}{v\chi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right)^{1/4}; \quad (2.71)$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{-1} = -\frac{q_{s1}}{q_{s1} + q_{s2}}; \quad \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_1 = -\frac{q_{s2}}{q_{s1} + q_{s2}}; \quad \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \Big|_{-1} = \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \Big|_1 = 0.$$

На рис. 3 и 4 показаны решения уравнения (2.71) для некоторых значений параметра  $\omega$  и двух типов граничных условий — симметричного разогрева ( $q_{s1} = q_{s2}$ ) и одностороннего разогрева ( $q_{s2} = 0$ ).

Таким образом, установлено, что условия наилучшего соответствия модели трехмерному прототипу в случае подвода тепла через вертикальные боковые стенки можно выразить в следующих геометрических ограничениях (см. (2.31), (2.46)):

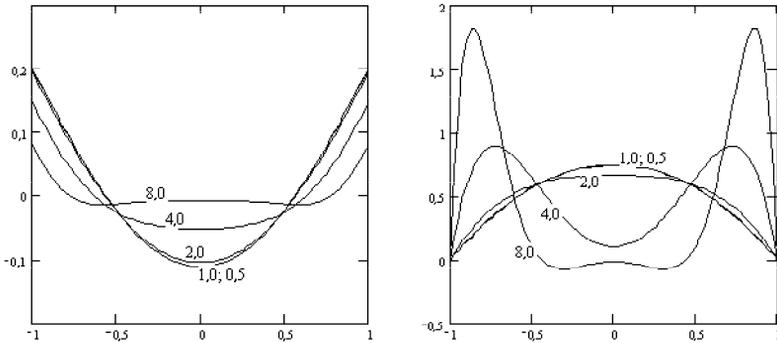
$$\delta_{c \max} \ll L \ll \sqrt{\frac{\chi z}{U_z}}.$$

При этих условиях порядок толщины гипотетических ПС на нагреваемых вертикальных границах  $\delta_s$ , как отмечалось выше (см. (2.46)), соответствует правой части неравенства и оценивается аналогично (2.13). Учитыв-

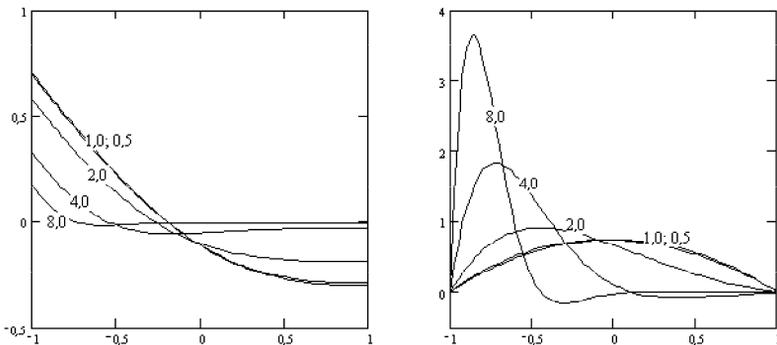
вая это, ограничения на толщину slice-полости можно записать в безразмерном виде:

$$Ra_m^{-1/6} \ll \frac{L}{R} \ll Ra_m^{-1/10}. \quad (2.72)$$

Обратим внимание на следующий отсюда вывод: для slice-моделей с внешним подводом тепла наилучшее соответствие трехмерному прототипу возможно лишь в области больших чисел Рэлея.



*Рис. 3. Профили приведенных температуры (слева) и скорости (справа) при различных значениях параметра  $\omega$  (приведены на графиках, см. (2.69)) в случае симметричного разогрева*



*Рис. 4. Профили приведенных температуры (слева) и скорости (справа) при различных значениях параметра  $\omega$  (приведены на графиках) в случае одностороннего разогрева*

### **3. Количественное сравнение теплоотдачи в квазидвумерной и трехмерной геометрии. Численный расчет**

В предыдущем разделе обсуждался вопрос о соответствии квазидвумерной экспериментальной модели ее трехмерному прототипу и было установлено, что наилучшее качественное соответствие может быть достигнуто, если течение максимально приближено к плоскому двумерному, как в длинном горизонтальном полуцилиндре. Зависимости средних чисел Нуссельта от модифицированного числа Рэлея при этом совпадают с таковыми для геометрии прототипа с точностью до численных множителей. Также это касается и предельных локальных распределений теплового потока. Метод аналитических оценок не дает возможности получить эти численные коэффициенты для каждого типа геометрии объема. Такую возможность предоставляют численные методы.

В данном разделе численно решена задача о конвекции однокомпонентной энерговыделяющей жидкости в полусферическом и соответствующем ему полуцилиндрическом объеме, отвечающем условиям экспериментов по моделированию теплоотдачи энерговыделяющей жидкости, при соблюдении ограничений (2.32) или (2.72) в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^7 \leq Ra_f \leq 10^{12}$ . Среда считалась однородной, несжимаемой, изотропной с постоянными теплофизическими свойствами, с положительным температурным коэффициентом расширения, а режим течения — ламинарным. Целью расчетов было получить численные коэффициенты для характеристик теплоотдачи в обоих типах геометрии объема.

Метод, с помощью которого проводились расчеты, описанные в данном разделе, основан на априорном разделении расчетного объема на области течения, в каждой из которых уравнения движения можно существенно упростить. Это значительно снижает вычислительные затраты, чем данный метод может быть полезен для инженерных приложений.

#### **3.1. Постановка задачи**

Благодаря существованию трех различных ярко выраженных областей течения (область конвекции Рэлея — Бенара, область устойчивой стратификации, область пограничных слоев) задачу о распределении потока тепла к границе замкнутого объема можно упростить. Ограничимся рассмотрением случая, когда верхняя горизонтальная граница объема теплоизолирована. Тогда, из-за стратификации температуры в основном объеме, максимум температуры  $T_{\max}$  достигается на верхней границе, и режим конвекции Рэлея — Бенара

не реализуется. Таким образом, будем считать, что весь занимаемый жидкостью объем состоит из тонких пограничных слоев (с толщиной  $\delta_c \ll H, R$ ) и области температурной стратификации (см. рис. 1).

Для удобства выпишем математическую модель для полусферической геометрии полости, ее модификация для slice-геометрии будет приведена ниже.

Для описания стационарного течения жидкости в пограничном слое на нижней границе воспользуемся приближением Прандтля [1, 2, 20]. Поскольку толщина ПС  $\delta_c$  много меньше характерного поперечного размера объема  $R$ , энергосыделением в правой части уравнения баланса энергии (2.3) можно пренебречь [2], и система (2.1)—(2.3) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{R_{\sin(\theta)}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) u) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\alpha(T - T_b(z)) \sin(\theta), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.3)$$

Граничные условия к системе (3.1)—(3.3) имеют форму

$$y = 0: \quad u, v, T - T_0 = 0;$$

$$y \gg \delta: \quad u \rightarrow 0, T(y, \theta) - T_b(z) \rightarrow 0; \quad z = R(1 - \cos(\theta)). \quad (3.4)$$

Температура изотермической части границы  $T_0$  принята за начало отсчета температур. За положительное направление продольной скорости  $u$  принимается направление от полюса к верхней границе.

Благодаря устойчивой температурной стратификации (температура не зависит от горизонтальных координат и  $dT_b/dz > 0$ ) уравнение баланса энергии в основном объеме имеет вид [19]

$$U(z) \frac{dT_b(z)}{dz} = \frac{Q}{\rho c}. \quad (3.5)$$

Из условия баланса массы следует, что поток массы через любое горизонтальное сечение объема равен нулю. Отсюда находим соотношение для вертикальной компоненты скорости, связывающее ее с соответствующей компонентой скорости в пограничном слое:

$$U(z) \cong -\frac{2}{R \sin(\theta)} \int_0^{\Delta} dy u(\theta, y), \quad z = R(1 - \cos(\theta)). \quad (3.6)$$

Величина верхнего предела в интеграле здесь выбирается в соответствии с неравенством  $\delta_c \ll \Delta \ll R$ .

Так как температура в основном объеме является возрастающей функцией высоты, то в относительной близости ко дну величина температуры мала по сравнению со средним значением по всему объему. Кроме того, как показывают эксперименты и теоретические оценки [3—6, 16—19], толщина ПС вблизи полюса гораздо больше, чем на боковом участке границы, скорость течения в ПС при этом стремится к нулю. На этом основании мы можем выделить область вблизи полюса  $0 \leq \theta < \theta_0$  и предположить, что теплоотвод через границу этой области целиком задается тепловыделением в ней, причем, как показано в [19], распределение теплового потока однородно. В результате при  $\theta \rightarrow \theta_0$ , по аналогии с (3.6), из условия энергетического баланса вытекает соотношение, связывающее температуру в пограничном слое и в основном объеме:

$$U(\theta_0)T_b(\theta_0) \cong -\frac{2}{R \sin(\theta_0)} \int_0^{\Delta} dy u(\theta_0, y)T(\theta_0, y), \quad (3.7)$$

где  $\theta_0$  выбирается меньшим или порядка  $\arccos(1 - \frac{\Delta}{R})$ . При проведении расчетов выбор  $\theta_0$  в указанных пределах не оказывал существенного влияния на результаты в области  $\theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Здесь представлены результаты, полученные для  $\theta_0 = \arccos(1 - \frac{\Delta}{R})$ .

Для плоско-симметричной геометрии (горизонтальный полуцилиндр) система уравнений (3.1)—(3.3) и условия сопряжения записываются иначе. Уравнение баланса массы примет вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.1a)$$

Условия сопряжения ПС с основным объемом (3.6) и (3.7) также изменятся:

$$U(z) \cong -\frac{2}{R \sin(\theta)} \int_0^{\Delta} dy u(\theta, y), \quad z = R(1 - \cos(\theta))., \quad (3.6a)$$

$$U(z_0)T_b(z_0) \cong -\frac{1}{R \sin(\theta_0)} \int_0^{\Delta} dy u(\theta_0, y) T(\theta_0, y). \quad (3.7a)$$

В терминах безразмерных переменных  $\tilde{z}, \tilde{y}, \tilde{u}, \dots$ , определенных равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= z/H, \quad \tilde{y} = y/\Delta, \quad \tilde{u} = u/A_u, \quad \tilde{v} = v/(A_u \frac{\Delta}{H}), \\ \tilde{T} &= (T - T_0)/A_T, \quad \tilde{T}_b = (T_b - T_0)/A_T, \quad \tilde{U} = A_u \frac{\Delta}{R} U, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $A_u = \frac{\nu}{R} Ra_I^{1/3} Pr^{-2/3} \left(\frac{\Delta}{R}\right)^{-1/3}$ ;  $A_T = A_u^2 / g\alpha R$ , система уравнений

(3.1)—(3.7), описывающих течение энерговыделяющей жидкости в замкнутом полусферическом объеме, принимает вид:

пограничный слой:

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{u} \sin(\theta)) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} - \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = (\tilde{T} - \tilde{T}_b) \sin(\theta), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = Pr^{-1} \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}; \quad (3.11)$$

основной объем (включая пограничные слои на горизонтальных поверхностях):

$$\frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial \tau} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{v}}{Pr} \frac{\Delta}{R} \frac{\partial^2 \tilde{T}_b}{\partial \tilde{z}^2} = 1; \quad (3.12)$$

баланс массы:

$$\tilde{U}(\tilde{z}) = -\frac{2}{\sin(\theta)} \int_0^1 \tilde{u} d\tilde{y}; \quad (3.13)$$

баланс энергии:

$$\tilde{U} \tilde{T}_b = -\frac{2}{\sin(\theta)} \int_0^1 (\tilde{u} \tilde{T}) d\tilde{y}. \quad (3.14)$$

Условия на границе расчетной области в соответствии с условиями (4) имеют вид

$$\tilde{u}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \tilde{v}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} = \tilde{v}|_{\tilde{y}=0} = \tilde{T}|_{\tilde{y}=0} = \tilde{u}|_{\tilde{y}=1} = 0, \quad \tilde{T}|_{\tilde{y}=1} = \tilde{T}_b. \quad (3.15)$$

Входящая в уравнения (3.10)—(3.12) эффективная вязкость  $\tilde{\nu}$  определена равенством

$$\tilde{\nu} = \left(\frac{\Delta}{R}\right)^{-5/3} \text{Ra}_I^{-1/3} \text{Pr}^{2/3}. \quad (3.16)$$

Процедура обезразмеривания системы уравнений для плоско-симметричной геометрии остается такой же, как описано выше. Уравнение баланса массы (3.9) и условия сопряжения (3.13) и (3.14) примут следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (3.9a)$$

$$\tilde{U}(\tilde{z}) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \int_0^1 \tilde{u} d\tilde{y}, \quad z = 1 - \cos(\theta), \quad (3.13a)$$

$$\tilde{U}_0 \tilde{T}_{b_0} = -\frac{1}{\sin(\theta_0)} \int_0^1 (\tilde{u} \tilde{T}) d\tilde{y}. \quad (3.14a)$$

## 3.2. Численная модель

В настоящем разделе приведена численная схема для полусферической геометрии. Для плоско-симметричной геометрии процедура построения схемы аналогична.

Расчет уравнений (3.9)—(3.14) проводился на равномерной прямоугольной сетке. Поперечный размер области  $\Delta$  выбирался так, чтобы пограничный слой полностью содержался внутри расчетной области ( $\delta_c < \Delta$ ) и выполнялось неравенство  $\Delta \ll R$ . В настоящей работе все результаты получены для  $\Delta = 8\delta$ , где  $\delta$  определено согласно аналитической оценке

$$\delta = H \text{Ra}_I^{-1/5}. \quad (3.17)$$

Расчеты на сетках с поперечными масштабами  $\Delta = a\delta$ , где  $8 \leq a \leq 12$ , дают разброс в распределении потока тепла к границе менее 5%. Помимо поперечного размера расчетной области независимыми параметрами задачи являются модифицированное число Рэлея  $Ra_I$ , число Прандтля  $Pr$  и аспектное отношение  $R/H$ . Влияние последних двух не исследовалось, и во всех расчетах они предполагались равными единице ( $Pr = 1, R/H = 1$ ). Таким образом, с учетом соотношения (3.17) единственным независимым параметром задачи являлось модифицированное число Рэлея  $Ra_I$ .

Численное решение уравнений баланса для ПС (3.9)—(3.11) проводилось с использованием неявной разностной схемы, требующей выбора начального профиля температуры в основном объеме  $\tilde{T}_b$  :

$$\frac{\tilde{u}_j^n - \hat{u}_j^n}{\Delta\tau} + \tilde{u}_j^s \frac{\tilde{u}_j^n - \tilde{u}_j^{n-1}}{\Delta\theta} + \tilde{v}_j^s \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n-1} - \tilde{u}_{j-1}^{n-1}}{2\Delta\tilde{y}} - \tilde{v} \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n-1} - 2\tilde{u}_j^{n-1} + \tilde{u}_{j-1}^{n-1}}{(\Delta\tilde{y})^2} =$$

$$= (\tilde{T}_j^s - \tilde{T}_b^s) \sin\left(\frac{\theta_n + \theta_{n-1}}{2}\right), \quad (3.18)$$

$$\frac{\tilde{T}_j^n - \hat{T}_j^n}{\Delta\tau} + \tilde{u}_j^s \frac{\tilde{T}_j^n - \tilde{T}_j^{n-1}}{\Delta\theta} + \tilde{v}_j^s \frac{\tilde{T}_{j+1}^{n-1} - \tilde{T}_{j-1}^{n-1}}{2\Delta\tilde{y}} - \tilde{v} Pr^{-1} \frac{\tilde{T}_{j+1}^{n-1} - 2\tilde{T}_j^{n-1} + \tilde{T}_{j-1}^{n-1}}{(\Delta\tilde{y})^2} = 0, \quad (3.19)$$

$$\tilde{v}_j^{n-1} = \tilde{v}_{j-1}^{n-1} - \frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta\theta \sin(\theta_n)} \left( \tilde{u}_j^n \sin(\theta_n) - \tilde{u}_j^{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \right). \quad (3.20)$$

Здесь нижний индекс отвечает поперечной координате  $\tilde{y}$ , а верхний — продольной координате  $\theta$ ;  $\Delta\theta$  и  $\Delta\tilde{y}$  — шаги по продольной и поперечной координате соответственно. Символы “~” и “^” отвечают текущему и предыдущему шагу по времени. Поскольку уравнения (3.18) и (3.19) нелинейные, для их линеаризации был введен промежуточный слой  $s$  по координате  $\theta$  аналогично [21]. В начальный момент  $s = n$ . Далее с использованием итерационного процесса система (3.18)—(3.20) решалась методом прогонки [22], при этом каждый раз вычислялся новый  $s$ -слой до тех пор, пока квадратный корень из суммы квадратов невязок не становился меньше заданного порогового числа:

$$\sqrt{\sum_j \left( (\tilde{u}_j^{n-1} - \tilde{u}_j^s)^2 + (\tilde{v}_j^{n-1} - \tilde{v}_j^s)^2 + (\tilde{T}_j^{n-1} - \tilde{T}_j^s)^2 \right)} < \varepsilon. \quad (3.21)$$

Только после этого можно считать, что  $(n-1)$ -й слой посчитан. Весь процесс продолжался до  $\theta_0 = \arccos(1 - \frac{\Delta}{R})$ , которое соответствует значению

$$\tilde{z}(\theta_0) = 1 - \cos(\theta_0) = \frac{\Delta}{R}.$$

После того как ПС был посчитан, вычислялась скорость в основном объеме — уравнение (3.13) интегрировалось методом трапеций. Аналогичным образом из уравнения (3.14) находилось новое значение температуры на “дне”. Далее методом прогонки из уравнения (3.12) определялись темпера-

тура в основном объеме и ошибка  $\sqrt{\sum_n (\tilde{T}_b^{n,i+1} - \tilde{T}_b^{n,i})^2}$ , где  $i$  — номер итерации. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока не выполнилось условие

$$\sqrt{\sum_n (\tilde{T}_b^{n,i+1} - \tilde{T}_b^{n,i})^2} < \varepsilon. \quad (3.22)$$

Решениями системы (3.9)—(3.15) являются пять массивов  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{T}_b$ . Безразмерная плотность теплового потока к границе вычислялась по формуле

$$\tilde{q}(\tilde{z}) = \frac{\tilde{T}(\theta, \Delta \tilde{y})}{\Delta \tilde{y}}. \quad (3.23)$$

Средний тепловой поток к границе определяется интегралом

$$\tilde{q}_{av} = \int_0^1 \tilde{q}(\theta) \sin(\theta) d\theta. \quad (3.24)$$

С другой стороны, при отсутствии теплоотвода через верхнюю границу он будет целиком определяться объемным тепловыделением:

$$q_{av} = Q \frac{V}{S} = Q \frac{R}{3}. \quad (3.25)$$

Из уравнения (3.25) и условий обезразмеривания для среднего числа Нуссельта имеем

$$\text{Nu}_{dn} = \frac{R}{\Delta} \frac{\tilde{q}_{av}}{\tilde{T}_{max}} = \frac{1}{3\tilde{T}_{max}} \left( \frac{\Delta}{R} \right)^{2/3} \text{Ra}_l^{1/3} \text{Pr}^{1/3}, \quad (3.26)$$

где  $\tilde{T}_{\max}$  — максимальная температура в объеме. Расчет производился в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^7 \leq Ra_f \leq 10^{12}$ . При этом каждый раз по формуле (3.24) вычислялось значение среднего теплового потока.

### **3.3. Обсуждение результатов**

Система уравнений с граничными условиями (3.1)—(3.7) решалась численно в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^7 \leq Ra_f \leq 10^{12}$ . Как уже отмечалось, зависимость характеристик теплоотдачи от аспектного отношения и числа Прандтля не исследовалась. Во всех расчетах предполагалось, что число Прандтля равно единице, а радиус кривизны нижнего участка границы равен высоте объема. Безразмерные характеристики свободной конвекции представлены на рис. 5—9. Расчетные кривые подтверждают немонотонный профиль температуры в пограничном слое в нижней части объема [17—19], что способствует торможению потока жидкости (рис. 5). Профиль температуры в основном объеме (рис. 7), а также распределение теплоотдачи к нижней границе (рис. 8) удовлетворяют результатам прямого численного моделирования, выполненного с помощью программного пакета FLUENT 6.2 [23]. Плотность потока тепла достигает максимума у верхней горизонтальной границы (рис. 8), что также удовлетворяет результатам экспериментов и численных расчетов [3—11, 24—28]. Интерполяция численных результатов для среднего числа Нуссельта через нижнюю границу привела к следующим корреляциям:

$$Nu_{dn} = 0,44 Ra_f^{0,18}, \quad 10^7 \leq Ra_f \leq 10^{12}. \quad (3.27)$$

Результаты расчета качественно удовлетворяют результатам экспериментов [3—11]. Сравнение с результатом прямого численного моделирования, проведенного с использованием пакета FLUENT (табл. 1), не выявило существенных расхождений, особенно при высоких числах Рэлея. Имеющееся различие объясняется упрощенным граничным условием вблизи полюса в предложенной модели (см. (3.6)).

Для геометрии горизонтального полуцилиндра, что соответствует квазидвумерной модели при условиях (2.32) или (2.72), полученная зависимость среднего числа Нуссельта от модифицированного числа Рэлея оказалась следующей:

$$Nu_{dn} = 0,57 Ra_f^{0,18}. \quad (3.28)$$

Эта зависимость с хорошей точностью (до 5,5%) согласуется с корреляцией Маингера, полученной по результатам экспериментов [3—6] (см. табл. 1):

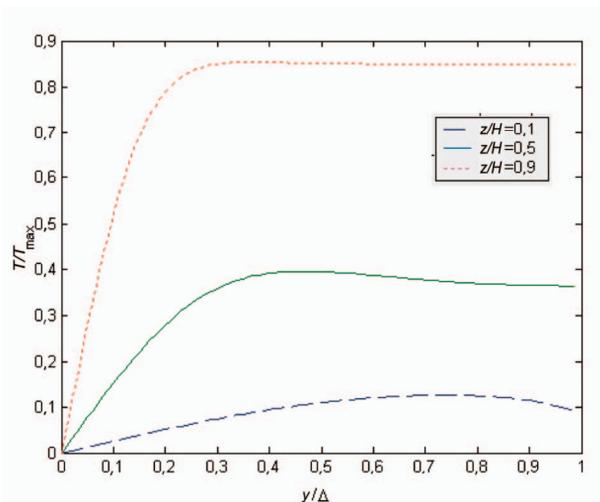
$$Nu_{dn} = 0,54 Ra_I^{0,18}.$$

Качественное согласие полученной зависимости с данными других экспериментальных работ [7—11] также имеется.

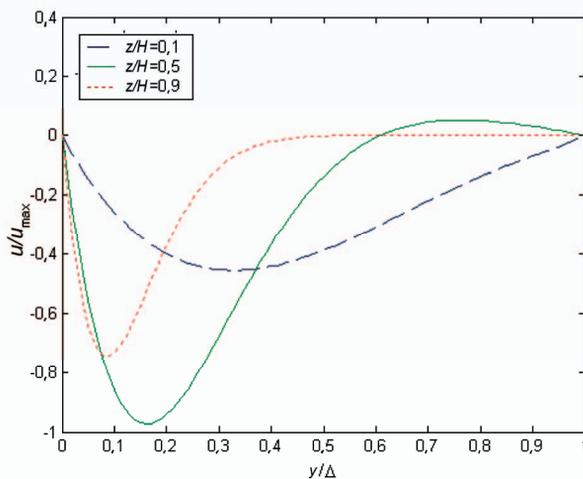
Зависимость среднего числа Нуссельта от модифицированного числа Рэлея, полученная в настоящей работе для полусферической геометрии (см. (3.27)), отличается лишь меньшим численным множителем; показатель степени такой же, как для slice-геометрии, что подтверждает теоретические выводы, полученные в разделе 2.

**Таблица 1. Средний безразмерный тепловой поток к нижней границе (результаты расчетов)**

Полусферическая геометрия (расчет по упрощенной схеме)	$Nu_{dn} = 0,44 Ra_I^{0,18} \quad 10^7 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$
Slice-геометрия (расчет по упрощенной схеме)	$Nu_{dn} = 0,57 Ra_I^{0,18} \quad 10^8 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$
Расчет с постоянной температурой в объеме	$Nu_{dn} = 0,46 Ra_I^{0,2} \quad 10^7 \leq Ra_I \leq 10^{12} \quad Pr = 1$
Эксперимент Маингера	$Nu_{dn} = 0,54 Ra_I^{0,18} \quad 10^7 \leq Ra_I \leq 5 \times 10^{10} \quad Pr \approx 7$
Прямое численное моделирование (FLUENT)	$Nu_{dn} = 0,39 Ra_I^{0,19} \quad 10^8 \leq Ra_I \leq 10^{11} \quad Pr = 1$



*Рис. 5. Температура в пограничном слое,  $Ra_f = 10^9$*



*Рис. 6. Продольная компонента скорости в пограничном слое,  $Ra_f = 10^9$*

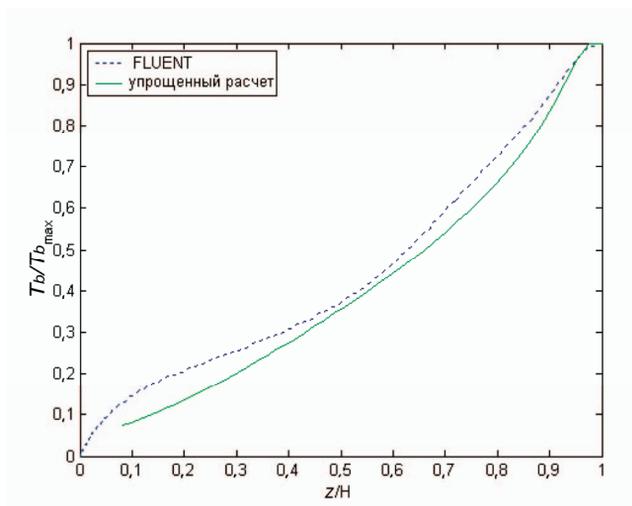


Рис. 7. Температура в основном объеме,  $Ra_I = 10^9$

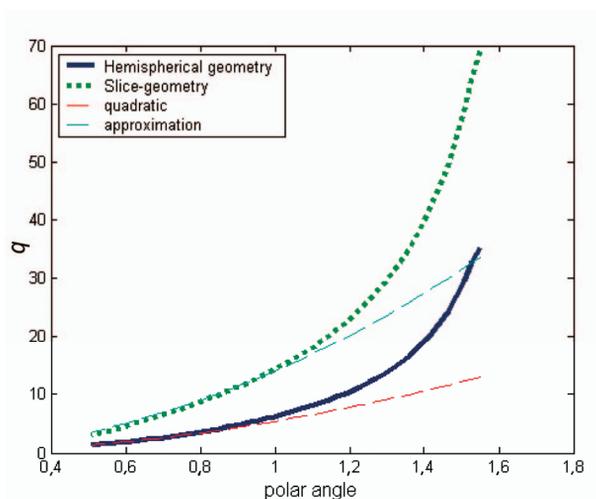


Рис. 8. Плотность теплового потока к границе,  $Ra_I = 10^9$

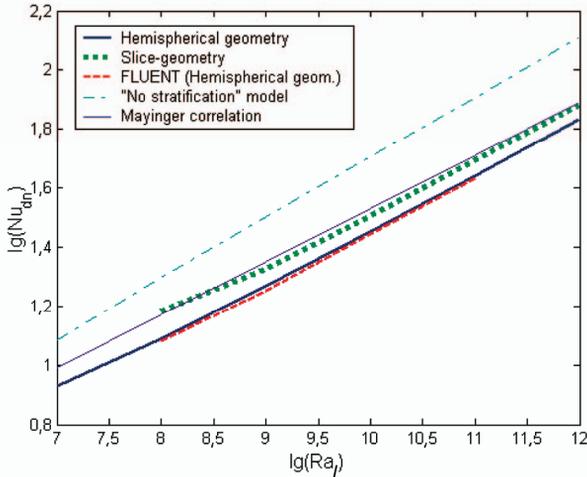


Рис. 9. Интегральный поток тепла

## 4. Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Наилучшее соответствие квазидвумерных экспериментальных моделей трехмерному прототипу сводится к соответствию характеристик свободной конвекции и теплоотдачи в прототипной (осесимметричной) и полуцилиндрической (плоскодвумерной) геометрии. При внутреннем (джоулевым) подогреве пограничные слои на теплоизолированных боковых стенках не нарушают соответствие режимов температурной стратификации в трехмерной и квазидвумерной полостях. Конкуренция между вязкими и архимедовыми силами приводит к выравниванию поперечных профилей вертикальной скорости и температуры везде, кроме тонких подслоев, где они меняются с поперечной координатой  $y$ . Это приводит к тому, что режим температурной стратификации в нижней части среза, а следовательно, степень соответствия модели и прототипа определяется соотношением толщины ПС на кривой охлаждаемой границе и толщины среза  $L$ . С одной стороны, аспектное отно-

шение  $\frac{L}{R}$  ограничивается сверху единицей, с другой стороны, ограничивается снизу величиной  $Ra_I^{-1/6}$ .

2. При подводе тепла через плоские вертикальные участки границы наилучшее полуколичественное соответствие квазидвумерной модели и ее трехмерного прототипа имеет место в случае “стесненных” ПС на вертикальных боковых стенках. Это обстоятельство накладывает верхнее ограничение на  $L$ , более сильное по сравнению со случаем джоулева разогрева. В противоположном случае (“изолированных” ПС) тепловой поток распределен по охлаждаемой границе как  $q_c \propto \theta^8$ , что принципиально отличается от распределения в трехмерной геометрии ( $q_c \propto \theta^2$ ), так что этот случай неприемлем для моделирования трехмерной конвекции. Дополнительное ограничение сверху на толщину объема приводит к тому, что для моделей с внешним подводом тепла наилучшее соответствие прототипу становится возможным лишь в области больших чисел Рэлея.
3. Построена физическая модель и разработан численный алгоритм решения свободно-конвективной теплоотдачи энергоснабжающей жидкости в замкнутом объеме полусферической и полуцилиндрической формы (что соответствует квазидвумерной модели при соблюдении условий (2.32) или (2.72)) с изотермическим условием на нижней границе и адиабатической верхней горизонтальной границей. Численно решена задача о ламинарном потоке в диапазоне модифицированных чисел Рэлея  $10^7 \leq Ra_I \leq 10^{12}$ . По результатам расчета получена зависимость среднего безразмерного потока тепла (числа Нуссельта) к боковой (в случае полусферы — нижней) границе от модифицированного числа Рэлея. Найденные распределения скоростей и температуры в пограничном слое на боковой границе по своей структуре согласуются с результатами экспериментов и прямого численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-17964-а).

## **Литература**

1. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001.
2. *Гебхарт Б.* и др. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991.
3. *Mayinger F., Jahn M., Reineke H., Steinberner U.* Untersuchung thermohydraulischer Vorgänge sowie Wärmeaustausch in der kernschmelze — optische Geschwindigkeitsmessung bei freier Konvektion mit inneren Wärmequellen // BMFT RS 48/1. Abschlußbericht. 1975. Т. 1. Juli.
4. *Mayinger F. X., Jahn M., Reineke H. H., Steinberner U.* Examination of thermohydraulic processes and heat transfer in a core melt // BMFT, RS 48/1 / Inst. für Verfahrenstechnik der T.U. Hannover, FRG, 1976.
5. *Mayinger F. X., Fritz P., Reineke H. H.* et al. Theoretische und experimentelle Untersuchung des Verhaltens eines geschmolzenen Kerns im Reaktorbehälter und auf dem Betonfundament: Technical Report FT-FB (RS 166-79-05), Bundesministerium für Forschung und Technologie. Bonn, Germany, 1980.
6. *Jahn M.* Holografische untersuchung der freien konvektion in volumetrisch beheizten fluiden: Doktor-Ingenieur Dissertation. Hannover, 1975.
7. *Steinberner U., Reineke H. H.* Turbulent buoyancy convection heat transfer with internal heat sources // Proceedings of the 6th International Heat Transfer Conference, Toronto, Canada, 1978. P. 305. (Paper NC-21).
8. *Kymäläinen O., Hongisto O., Antman J.* et al. COPO: experiments for heat flux distribution from a volumetrically heated corium pool // Proceedings of the 20th Water Reactor Safety Meeting, Bethesda, Maryland, USA.
9. *Kymäläinen O., Tuomisto H., Hongisto O., Theofanous T. G.* Heat flux distribution from a volumetrically heated pool with high Rayleigh number // Nuclear Engineering and Design. 1992. 149. P. 401—408.
10. *Helle M., Kymäläinen O., Tuomisto H.* Experimental data on heat flux distribution from volumetrically heated pool with frozen boundaries // OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability, Garching/Munich, Germany March 3—6, 1998, Workshop Proceedings. Paris, 1999. P. 173.
11. *Bernaz L., Bonnet J.-M., Spindler B., Villermaux C.* Thermal hydraulic phenomena in corium pools: numerical simulation with TOLBIAC and experimental validation with BALI // Proceedings of the OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability, Garching/Munich, Germany, 1998. P. 185—193.
12. *Asmolov V.* Latest findings of RASPLAV project // Proceedings of the OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability, Garching/Munich, Germany, 1998. P. 89—110.
13. *Bolshov L.A., Kondratenko P. S., Strizhov V. F.* Free convection of heat-generating fluid in a constrained volume and the conditions governing the characteristics of shape during experimental simulation of heat transfer in slice geometry // Proceedings of the OECD/CSNI Workshop on In-Vessel

- Core Debris Retention and Coolability, Garching/Munich, Germany, 1998. P. 235—241.
14. *Большов Л. А., Кондратенко П. С., Стрижов В. Ф.* Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости // УФН. 2001. 171. № 10. С. 1051—1070.
  15. *Bolshov L. A., Kondratenko P. S., Strizhov V. F.* Qualitative estimates of convective heat transfer in a volumetrically heated fluid // Proceedings of the International Symposium on Transient Convective Heat Transfer, Cesme, Turkey, August 19—23, 1996. New York; Vallingsford (UK), 1997. P. 103.
  16. *Bolshov L. A., Kondratenko P. S., Strizhov V. F.* A semiquantitative theory of convective heat transfer in a heat generating fluid // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 1998. 41. P. 1223—1227.
  17. *Большов Л. А., Кондратенко П. С.* Пограничные слои и особенности распределения теплоотдачи энерговыделяющей жидкости // Тр. Второй российской национальной конференции по теплообмену; в 8 т. Москва, 26—30 октября 1998 г. М., 1998. Т. 3. С. 50.
  18. *Bolshov L. A., Kondratenko P. S.* Limiting characteristics of heat transfer distribution and stratification in a heat-generating fluid // Proc. of the 1999 NURETH-9 Conference, October 3—8, 1999, San Francisco, California, Log 304. [S. 1.], 1999.
  19. *Bolshov L. A., Kondratenko P. S.* Limiting angular dependencies of heat and mass transfer in a heat generating fluid // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2000. 43. P. 3897—3905.
  20. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика: Пер. со 2-го нем. изд. / НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. [Б. м.], 2000.
  21. *Ноготов Е. Ф., Сеницын А. К.* О численном исследовании нестационарных задач конвекции // ИФЖ. 1976. Т. 31. № 6. С. 1113—1119.
  22. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
  23. *Fluent 6.2 User's Guide / Fluent Inc. Lebanon, 2005.*
  24. *Churbanov A. G., Vabishchevich P. N., Chudanov V. V., Strizhov V. F.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. 37. P. 2969.
  25. *Bolshov L. A., Arutyunyan R. V., Aksenova A. E. et al.* // Nuclear Science J. 1995. 32. № 2. P. 134.
  26. *Игнатьев А. С., Киселев А. Е., Семенов В. Н. и др.* ГЕФЕСТ: Численное моделирование процессов в нижней части реактора ВВЭР при тяжелой аварии. М., 2003. (Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2003-13. 2003).
  27. *Киселев А. Е., Семенов В. Н., Стрижов В. Ф. и др.* ГЕФЕСТ: Модели теплообмена с паром и перемещения материалов в НКС реактора ВВЭР при тяжелой аварии. (Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2003-13. 2003).
  28. *Bolshov L. A., Arutyunyan R. V., Chudanov V. V. et al.* Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problem // Nuclear Science J. 1995. Vol. 32. № 2. P. 134—139.

## **VI. Теплообмен в жидкости с неоднородным объемным энерговыделением**

*П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский, В. Ф. Стрижов*

### **1. Введение**

В исследованиях по проблеме безопасности АЭС особое место уделяется тяжелым авариям. В случае потери теплоносителя и разрушения активной зоны реактора возможно накопление тепловыделяющего расплава (кориума) на дне корпуса реактора. В такой ситуации возникает задача сохранения целостности корпуса с целью предотвращения выхода радиоактивных материалов. Для реакторов типа ВВЭР средней и малой мощности основными стратегиями удержания расплава внутри корпуса на сегодняшний день являются внешнее охлаждение и затопление активной зоны водой. Эффективность такого охлаждения определяется механизмом кипения на внешней поверхности корпуса реактора. Во избежание возникновения кризиса кипения требуется знание локального распределения потока тепла к поверхности, которое определяется свободной конвекцией тепловыделяющего расплава.

Для обоснования концепции удержания расплава на днище корпуса реактора проведены серии экспериментальных исследований с модельными жидкостями, в качестве которых использовались вода, расплавы солей или прототипный кориум, при этом объемное тепловыделение создавалось джоулевым нагревом или индукционными токами (см., например, [1]). При этом возникают трудности с обеспечением однородного по объему тепловыделения при сохранении исходной геометрии объема, в частности при индукционном нагреве тепло выделяется преимущественно у границ — глубина прогрева определяется толщиной скин-слоя и зависит от частоты индукционного тока. При такой постановке эксперимента возникает вопрос об адекватности моделирования теплоотдачи в прототипных условиях с однородным распределением источника тепла.

В настоящей работе исследована задача о свободной конвекции в жидкости с неоднородным распределением внутренних источников тепла. Отдельно рассмотрены случаи, когда источники тепла сосредоточены в приграничном слое конечной толщины, и более общая постановка задачи, допускающая нерегулярное распределение источников тепла. Исследование проведено на основе метода аналитических оценок и прямого численного моделирования.

Дальнейшая структура статьи такова. В разделе 2 сформулирована постановка задачи и рассмотрен случай большой по сравнению с толщиной свободно-конвективного пограничного слоя глубины прогрева. В разделе 3 модель обобщена для произвольного распределения мощности тепловыделения. В разделе 4 рассмотрен случай малого масштаба неоднородностей источника тепла. В разделе 5 обсуждается применимость полученных результатов для более сложной геометрии задачи, а также случай охлаждаемой верхней границы. Раздел 6 посвящен численному моделированию свободной конвекции и теплоотдачи в условиях, описанных в разделе 2. В Заключении кратко сформулированы основные результаты работы.

## 2. Постановка задачи. Аксиально-симметричное распределение источников тепла

Стационарная свободная конвекция несжимаемой жидкости описывается системой уравнений (см. [2, 3])

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} \alpha T + \nu \Delta \vec{v}, \quad (2)$$

$$(\vec{v} \nabla) T = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c_p}. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{v}$  — скорость течения;  $T$  — температура;  $Q = Q(\vec{r})$  — объемная плотность источников тепла;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\chi$  — температуропроводность;  $\vec{g}$  — ускорение свободного падения;  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения.

Будем предполагать, что жидкость заключена в вертикально ориентированном круглом цилиндре радиуса  $R$  и высоты  $H \sim R$ . Распределение мощности тепловыделения полагаем не зависящим от азимутальной координаты:

$$Q = Q(r, z), \quad (4)$$

где  $r$  — радиальная координата;  $z$  — вертикальная координата. Полагаем, что охлаждается боковая граница, температуру которой считаем постоянной. Плоские горизонтальные участки границы считаем адиабатическими (неадиабатические граничные условия будут обсуждены позже). Температуру  $T$  будем отсчитывать от температуры боковой границы.

Рассмотрим случай, когда прогревается прилегающий к боковой границе слой жидкости конечной толщины  $\delta_Q$ , меньшей радиуса цилиндра  $R$  и высоты  $H$ . Режим течения предполагаем ламинарным. Считаем, что толщина свободно-конвективного пограничного слоя (ПС) на боковой границе много меньше глубины прогрева  $\delta_Q$ :

$$\delta \ll \delta_Q. \quad (5)$$

При выполнении условия (5), подобно [4, 5], тепловыделением внутри пограничного слоя можно пренебречь. Тогда в приближении Прандтля [3] уравнения движения для ПС примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\alpha(T - T_b), \quad (7)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

где  $u$  и  $v$  — продольная и поперечная компоненты скорости в ПС;  $y$  — расстояние до боковой границы;  $T_b$  — температура жидкости в основном объеме (вне пограничных слоев).

Из соотношений (6)–(8) получаем следующие качественные оценки (см. [4–7]):

$$v \sim \frac{\delta}{z} u, \quad (9)$$

$$\frac{u^2}{z} \sim g\alpha T_b, \quad (10)$$

$$\frac{u}{z} \sim \frac{\chi}{\delta^2}. \quad (11)$$

В основном объеме (вне ПС) теплопроводность и вязкость несущественны. Поэтому уравнения движения в этой области имеют следующий вид (см. [4–7]):

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (12)$$

$$(\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla P_b}{\rho} + g\alpha T_b \vec{n}, \quad (13)$$

$$\vec{V}\nabla T_b = \frac{Q(r, z)}{\rho c}, \quad (14)$$

где  $\vec{V}$  — скорость течения в основном объеме;  $\rho$  — плотность жидкости;  $P_b$  — давление в основном объеме за вычетом гидростатической составляющей;  $Q(r, z)$  — мощность объемного тепловыделения;  $c$  — удельная теплоемкость;  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный по вертикали вверх. Согласно условию баланса массы (1) течение вне пограничного слоя значительно медленнее, чем в самом ПС:

$$V_z \sim \frac{\delta}{\delta_Q} u, \quad (15)$$

где  $V_z$  — вертикальная компонента  $\vec{V}$ . Ввиду этого обстоятельства архимедовы силы почти полностью уравновешиваются градиентом давления, так же, как в гидростатике, где все функции состояния жидкости зависят только от вертикальной координаты. Это дает основания полагать, что в основном объеме устанавливается температурная стратификация, другими словами, температура в этой области зависит только от вертикальной координаты [4—7]. Этот вывод подтверждается следующим более строгим анализом.

Из горизонтальной компоненты уравнения Навье — Стокса оценим порядок изменения давления в горизонтальной плоскости при фиксированном  $z$ :

$$(\Delta p)_h \sim \rho V_r^2. \quad (16)$$

Подставляя это выражение в вертикальную компоненту уравнения баланса импульса, получаем характерный порядок изменения температуры при том же  $z$ :

$$(\Delta T_b)_h \sim \frac{V_r^2}{g\alpha z}. \quad (17)$$

Из уравнения (9) с учетом того, что  $V_r|_{r=R} = -v|_{\delta \ll y \ll \delta_Q}$ , вытекает следующее соотношение для горизонтальной компоненты скорости:

$$V_r \sim \frac{\delta}{z} u, \quad (18)$$

и мы получаем следующую оценку:

$$(\Delta T_b)_h \sim \left(\frac{\delta}{z}\right)^2 T_b. \quad (19)$$

Таким образом, в области  $z \gg \delta$  имеет место температурная стратификация, так что с точностью до малых поправок порядка (19) температура является функцией только вертикальной координаты:

$$T_b \cong T_b(z). \quad (20)$$

С учетом этого факта уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$V_z \frac{dT_b}{dz} = \frac{Q(r,z)}{\rho c}. \quad (21)$$

Уравнение (21), описывающее баланс энергии в основном объеме, справедливо для любой геометрии объема — геометрический фактор сказывается лишь на условиях сшивки пограничного слоя и основного объема, т. е. на граничном условии для уравнения (21).

Следует заметить, что оценки (9)—(11) для пограничного слоя на боковой границе, уравнение (21) и оценки (16)—(19) для основной части объема не привязаны к определенному характеру распределения мощности тепловыделения и остаются справедливыми при произвольном распределении с одним ограничением — тепловыделение в ПС должно быть незначительным по сравнению с основным объемом. Перечисленные обстоятельства помогут в анализе более общего случая, рассмотренного ниже.

Также заметим, что вследствие уравнения (21) вертикальная компонента скорости  $V_z$  зависит от радиальной координаты, также как мощность тепловыделения:

$$V_z = \frac{Q(r,z)}{\frac{dT_b}{dz} \rho c}. \quad (22)$$

Подставляя это выражение в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (V_r r) = 0 \quad (23)$$

и интегрируя (23) по горизонтальному сечению, получаем следующее выражение для радиальной компоненты скорости на периферии ПС:

$$V_r(R) = -\frac{R}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\frac{dT_b}{dz} \rho c} \bar{Q}(z) \right). \quad (24)$$

Как видим, радиальная компонента скорости определяется только средней по горизонтальному сечению плотностью источников тепла

$$\bar{Q}(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R Q(r, z) 2\pi r dr \quad (25)$$

и не зависит от особенностей его распределения по радиальной координате  $r$ .

Уравнение (21) также можно проинтегрировать по горизонтальному сечению с учетом условия баланса массы:

$$2 \frac{dT_b}{dz} \int_0^{y>\delta} u \cdot dy = -R \frac{\bar{Q}(z)}{\rho c}. \quad (26)$$

Заметим, что соотношения (24) и (26) задают соответствие между характеристиками ПС и основного объема, замыкая систему уравнений (6)—(8) и (21).

В том случае, когда величина  $\bar{Q}$  не зависит от  $z$ , соотношения (24) и (26) сохраняются такими же, как при равномерном распределении источников тепла по объему. При этом распределение температуры в основном объеме и теплоотдача к боковой границе также будут соответствовать случаю однородно распределенных источников тепла.

С учетом сказанного можно конкретизировать полученные условия (5), для чего необходимо определить параметр  $\delta$  — толщину свободноконвективного пограничного слоя на боковой границе. В геометрии круглого цилиндра при однородно распределенных источниках тепла толщина пограничного слоя была оценена в работах [5, 7]. Она определяется модифицированным числом Рэлея  $Ra_I$  и для ламинарного режима течения, соответствующего  $Ra_I < 10^{12}$ , имеет порядок

$$\delta \sim R \cdot Ra_I^{-0,2}.$$

В рассматриваемой задаче с неоднородным тепловыделением модифицированное число Рэлея выражается через среднюю по объему плотность источников тепла  $\bar{Q}_v$ :

$$Ra_I = \frac{g \alpha \bar{Q}_v H^5}{\nu \chi \lambda},$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Само условие (5) приобретет вид

$$\frac{\delta_Q}{R} \gg Ra_I^{-0,2}. \quad (27)$$

При значениях модифицированного числа Рэлея выше  $10^8$ , представляющих интерес для практики, правая часть неравенства (27) много меньше единицы.

### 3. Произвольное распределение источников тепла

Распределение источников тепла в предыдущем разделе предполагалось аксиально-симметричным. Теперь мы рассмотрим более общий случай, полагая, как и ранее, что главная часть тепловыделения приходится на основной объем. Будем, как и прежде, считать геометрию задачи цилиндрической, а мощность тепловыделения распределенной произвольным образом:

$$Q = Q(\vec{r}), \quad (28)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор.

Полагаем, что прогрев происходит по всему объему. Параметр  $\delta_Q$  в данном случае играет роль характерного масштаба неоднородностей (например, размер “белых пятен” — областей с незначительным тепловыделением). Здесь следует выделить два предельных случая — когда этот масштаб значительно больше толщины ПС  $\delta \sim \frac{\chi}{V}$  (что отвечает условию

(5)) и, соответственно, когда он не превышает ее. Рассмотрим подробно первый предельный случай. Второй случай будет рассмотрен в следующем разделе.

Как было отмечено выше, при условии малости тепловыделения в пограничном слое по сравнению с основным объемом оценки (6)–(9) для пограничного слоя на боковой границе и оценки (14)–(17) для основного объема остаются справедливыми независимо от характера распределения тепловыделения в основном объеме. Следовательно, в основном объеме устанавливается температурная стратификация, а соотношение

$$V_z(\vec{r}) \frac{dT_b}{dz} = \frac{Q(\vec{r})}{\rho c} \quad (28)$$

задает режим течения. Как видим, вертикальная скорость определяется плотностью мощности тепловыделения:

$$V_z(\vec{r}) = \frac{Q(\vec{r})}{\frac{dT_b}{dz} \rho c}. \quad (29)$$

Иначе говоря, она “отслеживает” неоднородности распределения источников тепла.

Запишем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \operatorname{div}_{2D} \vec{V}_{hor} = 0. \quad (30)$$

Оператор  $\operatorname{div}_{2D}$  определяется следующим образом:

$$\operatorname{div}_{2D} \vec{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (f_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (f_\varphi),$$

где  $\varphi$  — азимутальная координата.

Усредняя (30) по горизонтальному сечению и пользуясь теоремой Гаусса, получаем следующее соотношение:

$$\frac{d\bar{V}_z}{dz} = -\frac{1}{\pi R^2} \oint V_r R d\varphi = \frac{2}{R} v, \quad (31)$$

где  $v$  — поперечная скорость на периферии ПС — не зависит от азимутального угла  $\varphi$ , поскольку течение в ПС определяется распределением температуры в основном объеме, которая, как было показано выше, зависит только от вертикальной координаты. Подставляя (29) в (31), находим

$$\frac{R}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{dT_b} \frac{d\bar{Q}(z)}{dz} \right) = v(z), \quad (32)$$

что совпадает с формулой (24).

Также, усредняя по горизонтальному сечению уравнение (28), получаем

$$\bar{V}_z \frac{dT_b}{dz} = - \int_0^{y>\delta} u \cdot dy \frac{dT_b}{dz} = \frac{\bar{Q}(z)}{\rho c}. \quad (33)$$

Любое из условий сопряжения (32) и (33) замыкает систему уравнений (6)—(8) и (28). Результаты анализа, как видим, совпадают с теми, что были получены выше для частного случая аксиально-симметричного распределения источников тепла.

#### **4. Мелкомасштабные неоднородности. Тонкий скин-слой**

Коротко коснемся случаев малого масштаба неоднородностей источников тепла.

В условиях, описанных в разделе 3, т. е. при незначительном по сравнению с основным объемом тепловыделении в пограничном слое, если масштаб неоднородностей мощности тепловыделения мал, т. е. не превышает толщины ПС  $\delta \sim \frac{\chi}{V}$ , эффекты вязкости и теплопроводности, существенные на мелких масштабах, сглаживают неоднородности температуры и скорости течения в основном объеме. Следовательно, температурная стратификация будет иметь место и в этом случае, а масштаб изменения скорости в основном объеме будет порядка  $R$  или  $H$ . Уравнение баланса энергии после усреднения по горизонтальному сечению запишется в таком же виде, как при однородном распределении источников тепла.

Коснемся теперь случая аксиально-симметричного распределения мощности тепловыделения, описанного в разделе 2, но при глубине прогрева  $\delta_Q$  много меньшей толщины предполагаемого свободно-конвективного пограничного слоя на боковой границе  $\delta$ :

$$\delta \gg \delta_Q. \quad (34)$$

В этом случае тепловыделение происходит в тонком слое вблизи границы, где роль конвекции существенно меньше теплопроводности, за счет которой выделяемое тепло целиком отводится к границе. Температура на периферии прогретого слоя (см. уравнение (3)) имеет порядок

$$T(z) \sim \delta_q^2 \frac{\bar{Q}(z)}{\lambda}. \quad (35)$$

Решение задачи о свободной конвекции в этом случае будет совпадать с таковым для жидкости без внутренних источников тепла с эффективными граничными условиями, задаваемыми (35).

#### **5. Полусферическая геометрия. Охлаждаемая верхняя граница**

Представленный выше анализ переносится на случай осесимметричного объема более сложной формы, например, полусферического. При этом

соотношения для основного объема останутся такими же, а уравнения для пограничного слоя и замыкающие соотношения запишутся с учетом геометрического фактора [4, 6]. Для них будут справедливы оценки, аналогичные (9)—(11). Условия, при которых реализуется режим температурной стратификации в основном объеме, останутся такими же. Баланс энергии вне пограничных слоев, как уже указывалось, будет описываться уравнением (28). Соответственно режим стратификации будет определяться средней по горизонтальному сечению величиной объемной мощности тепловыделения. В частности, если эта величина не зависит от вертикальной координаты, распределение температуры в области стратификации будет таким же, как при однородном тепловыделении.

Выше мы ставили адиабатическое граничное условие на верхней горизонтальной границе. В случае охлаждаемой верхней границы максимальная температура достигается не на ней, а внутри объема. При этом в области выше плоскости, проходящей через точку максимума температуры, создаются условия для конвекции Рэлея — Бенара. В интересном для практических приложений диапазоне чисел Рэлея  $10^8 < Ra_l < 10^{15}$  в этой области реализуется турбулентный режим конвекции, благодаря чему температура в ядре (вне пограничных слоев) практически постоянна. Стало быть, здесь распределение теплоотдачи будет определяться средней по слою Рэлея — Бенара плотностью источников тепла.

## **6. Численный эксперимент**

При помощи пакета FLUENT были проведены численные расчеты свободной конвекции в объеме цилиндрической формы с однородным тепловыделением и с распределением источника тепла, заданного выражением

$$Q(r) = \frac{\bar{Q}}{A} \operatorname{ch} \left( \frac{r}{\delta_Q} \right), \quad (36)$$

где  $y$  — расстояние до боковой стенки;  $A$  задается выражением

$$A = \delta_Q \operatorname{sh} \left( \frac{1}{\delta_Q} \right) - \delta_Q^2 \left( \operatorname{ch} \left( \frac{1}{\delta_Q} \right) - 1 \right).$$

Значение  $\bar{Q}$  соответствовало плотности источников тепла для случая равномерного разогрева. Температура боковой и нижней границ полагалась постоянной. Верхняя граница считалась теплоизолированной. Здесь при-

ведены результаты расчетов для  $Ra_I = \frac{g\alpha\overline{Q}H^5}{\nu\chi\lambda} = 10^9$  при  $R = H$ , адiabатической верхней границе и глубине прогрева  $\delta_Q = 0,2R$ , что заведомо больше толщины ПС при данном числе Рэлея. На графиках левая вертикальная граница отвечает боковой стенке, правая — оси симметрии.

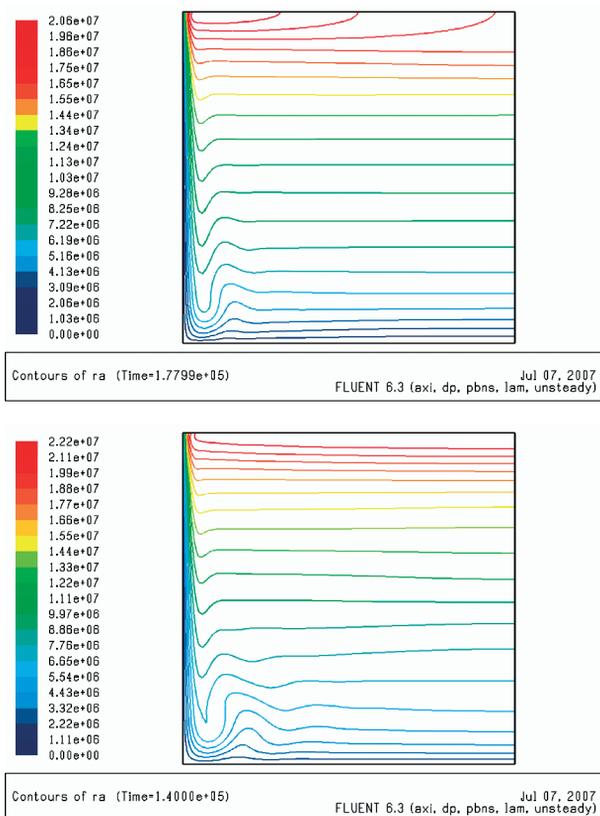


Рис. 1. Распределение температуры при неоднородном (вверху) и однородном (внизу) тепловыделении

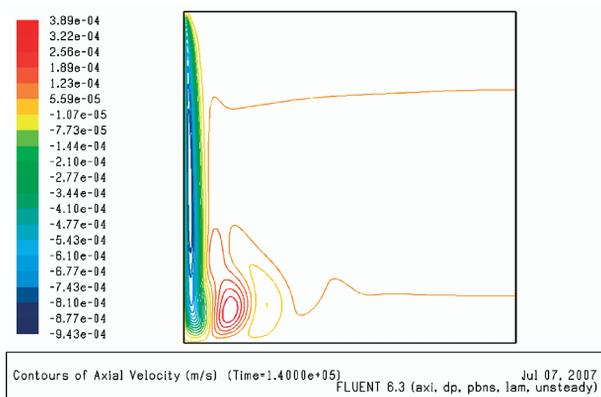
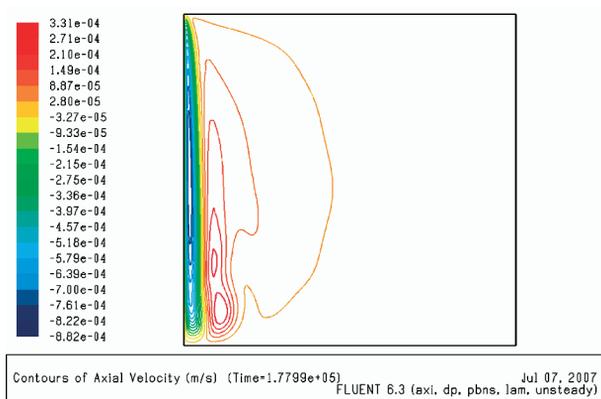


Рис. 2. Распределение вертикальной компоненты скорости при неоднородном (вверху) и однородном (внизу) тепловыделении

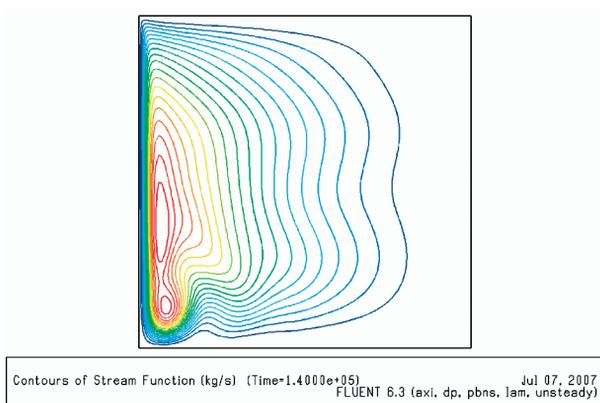
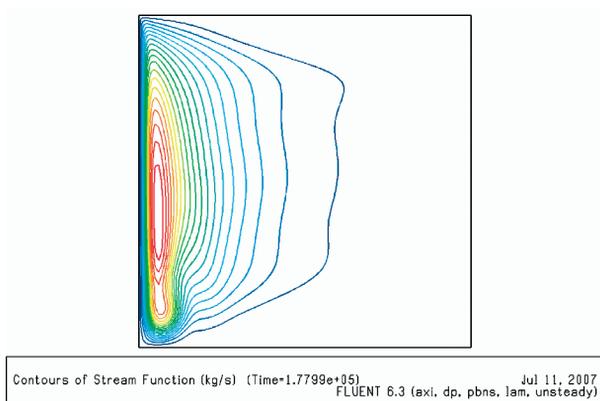


Рис. 3. Линии тока при неоднородном (вверху) и однородном (внизу) тепловыделении

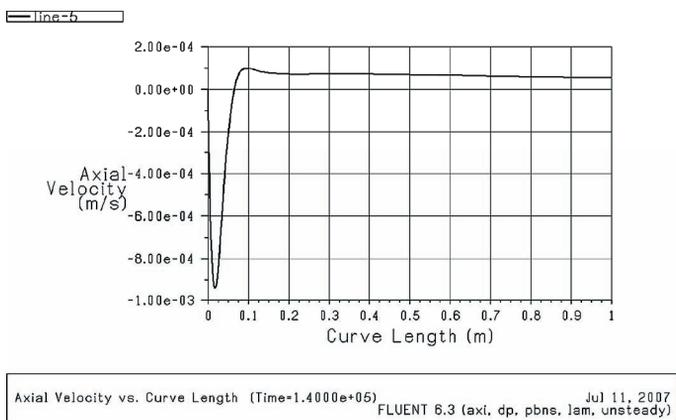
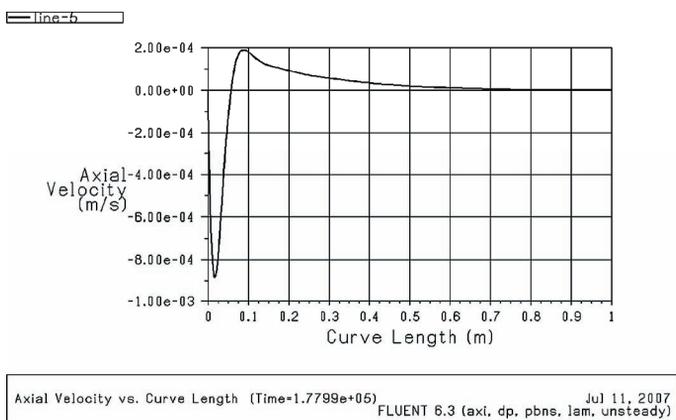


Рис. 4. Зависимость вертикальной скорости от поперечной координаты  $y$  на уровне  $z = 0,5H$  при неоднородном (вверху) и однородном (внизу) тепловыделении

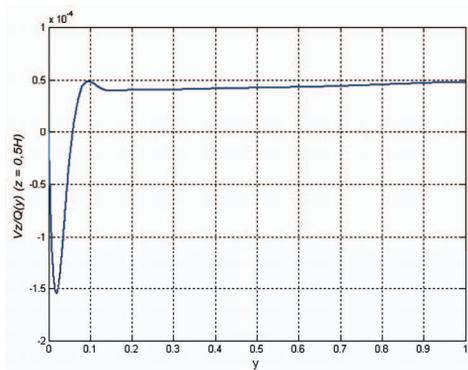


Рис. 5. Отношение вертикальной скорости к локальной плотности тепловыделения при  $z = 0,5H$  (неоднородный источник тепла)

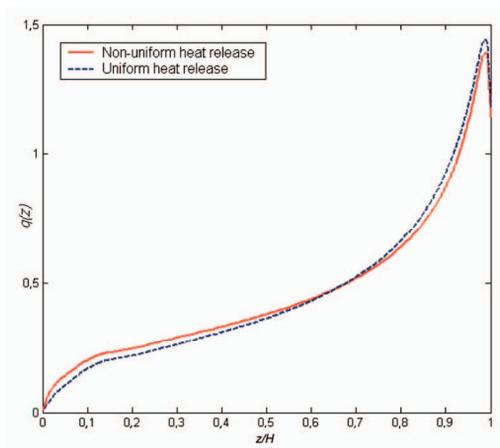


Рис. 6. Распределения теплового потока к боковой границе при неоднородном и однородном тепловыделении

На приведенных графиках хорошо видно, что температурная стратификация присутствует во всем объеме вне пограничных слоев, в том числе в ненагреваемой области, вплоть до оси симметрии. Вертикальная скорость вне пограничного слоя быстро падает (по такому же закону, как плотность источников тепла) с удалением от стенки. Это хорошо согласуется с теоретическими выводами, полученными выше.

## **7. Заключение**

Основные результаты работы состоят в следующем.

При условии малости толщины пограничных слоев по сравнению с характерным масштабом неоднородностей распределения внутренних источников тепла общая структура свободной конвекции (область устойчивой стратификации, слой Рэлея-Бенара при охлаждаемой верхней границе, свободно-конвективные пограничные слои) сохраняется такой же, как при однородном тепловыделении (см. [2, 7]). При этом многие детали распределения источников тепла играют незначительную роль — определяющим фактором является среднее по горизонтальному сечению значение мощности тепловыделения в зависимости от вертикальной координаты  $\bar{Q}(z)$ .

В случае  $\bar{Q}(z) = \text{const}$  имеется полное количественное соответствие случаю однородного распределения источников тепла.

В случае, когда тепло выделяется в тонком по сравнению с толщиной ПС слое вблизи границы, структура течения соответствует свободной конвекции без внутренних источников тепла. Распределение эффективной температуры границы при этом определяется поверхностным тепловыделением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-17964-а).

## **Литература**

1. *Asfia F. J., Frantz B., Dhir V. K.* Experimental investigation of natural convection heat transfer in volumetrically heated spherical segments // *ASME J. of Heat Transfer*. 1996. Vol. 118. P. 31—37.
2. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001.
3. *Гебхарт Б.* и др. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991.
4. *Bolshov L. A., Kondratenko P. S.* Limiting angular dependencies of heat and mass transfer in a heat generating fluid // *Intern. J. of Heat and Mass Transfer*. 2000. 43. P. 3897—3905.
5. *Григорук Д. Г., Кондратенко П. С.* Свободная конвекция энергосыделяющей жидкости в цилиндрической геометрии // Тр. Третьей российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-3). М., 2002. Т. 3. С. 57—60.
6. *Большов Л. А., Кондратенко П. С., Стрижов В. Ф.* Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости // *УФН*. 2001. Т. 171, № 10. С. 1051—1070.
7. *Григорук Д. Г., Кондратенко П. С., Никольский Д. В.* Геометрический фактор в свободной конвекции тепловыделяющей жидкости // *Изв. РАН. Сер. Энергетика*. 2004. Т. 2. С. 86—100.

## **VII. Двухфазное течение в пористой тепловыделяющей среде**

*Д. Г. Григоров, П. С. Кондратенко*

### **1. Введение**

Как показал опыт аварии на Three Mile Island (1979 г.), при взаимодействии с водой часть расплава зоны кристаллизуется, образуя пористый тепловыделяющий слой (дебрис). В отсутствие охлаждения этот слой за счет остаточного тепловыделения будет разогреваться и, достигнув температуры ликвидуса, плавиться, угрожая разрушить корпус реактора. Если же дебрис постоянно охлаждается водой, то выделившееся в слое тепло будет отводиться. В зависимости от мощности тепловыделения отвод тепла будет осуществляться посредством теплопроводности, конвекции или кипения. В последнем случае существует критическое значение мощности внутренних источников тепла, при котором скорость парообразования может превысить скорость подпитки водой, что приведет к осушению дебриса. Критическое значение зависит от условий доступа в слой воды. Помимо заливки сверху в случае затопления реактора вода может проникать в дебрис через зазоры между корпусом реактора и пористой средой. Эффективность охлаждения при этом зависит от ширины зазора, внешнего давления, геометрических характеристик среды. Цель настоящей работы состоит в нахождении количественной оценки влияния дополнительного смачивания границы на эффективность охлаждения глубокого дебриса, занимающего цилиндрический объем при нормальном давлении. Влияние ширины зазора, сил поверхностного натяжения и инерционных сил не рассматривалось.

### **2. Основные характеристики пористой среды**

Пористой средой мы будем называть вещество, состоящее из твердой матрицы (каркаса [1]), содержащей неоднородности в виде пустого пространства (поры). Считается, что поры связаны между собой в каналы, в которые может проникать жидкость или газ. В природе поры распределены в среде неравномерно по размеру и форме, так что течение жидкости или газа на масштабе размера поры сильно неупорядочено. Поэтому

движение жидкости или газа через пористую среду описывают с помощью средних значений характеристик течения (скорости, давления и т. д.). Для этого в среде выбирается элементарный объем — такой, чтобы его размер был много больше размера пор, но достаточно мал по сравнению с характерным масштабом области течения. Усреднение проводится по сечению элементарного объема. При этом предполагается, что среда насыщенная, т. е. все поры заняты жидкостью или газом. Полученные таким образом макроскопические величины являются непрерывными в пространстве и времени. При данном подходе возникают дополнительные параметры среды: пористость и проницаемость.

*Пористостью*  $\phi$  среды называется доля объема вещества, занятого порами. Соответственно  $1 - \phi$  есть доля объема, занятого твердой матрицей. Обычно пористость не превышает значения 0,6.

Впервые одномерное уравнение движение жидкости в пористой среде было экспериментально получено Дарси. Изучая одномерное стационарное течение в однородной среде, он установил, что скорость потока  $u$  прямо пропорциональна приложенному перепаду давления:

$$u = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\frac{\partial P}{\partial z}$  — градиент давления в направлении течения;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости. Коэффициент  $\kappa$  зависит только от структуры пористой среды и характеризует ее способность пропускать через себя жидкость. Он имеет размерность квадрата длины и называется *проницаемостью*. В трехмерной геометрии  $\kappa$  является тензором второго порядка. Однако в случае изотропной среды проницаемость представляет собой скалярную величину. Значения проницаемости природных материалов имеют широкий диапазон: для гравия  $\kappa = 10^{-7} \div 10^{-9} \text{ м}^2$ , для песка  $\kappa = 10^{-9} \div 10^{-12} \text{ м}^2$ .

Если среда представляет собой засыпку шариков одинакового диаметра  $d$ , то проницаемость можно вычислить по формуле Кармана — Козени:

$$\kappa = \frac{d^2 \phi^3}{C(1 - \phi)^2}, \quad (2.2)$$

где  $C$  — константа, принимающая значения от 150 до 180. Формула (2.2) дает удовлетворительные результаты для случая, когда среда состоит из сферических шариков одинакового диаметра. Однако это уравнение часто используется и для других геометрий, поскольку является наиболее удач-

ной среди корреляций [2]. Как показывают эксперименты [14], средний диаметр частиц, образующих дебрис, для тяжелоаварийных задач оказывается порядка нескольких миллиметров.

В случае двухфазного течения, например системы жидкость — газ, одна часть пор занята газом, а другая жидкостью. Долю пор, занятых каждой фазой, будем называть насыщением и обозначать  $\gamma_j$ . Индекс  $j$  принимает значения  $l$  и  $v$  для жидкости и пара соответственно. Кроме того, на межфазной границе возникают силы трения. Влияние этих сил принято описывать с помощью коэффициента относительной проницаемости  $k$ . Он является безразмерной величиной и представляет собой функцию насыщения. Уравнение Дарси для каждой из фаз имеет вид

$$\gamma_i u_i = -\frac{k_i k}{\mu_i} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (2.3)$$

### **3. Обзор работ по изучению двухфазных течений в пористых средах**

Если пористая среда заполнена многофазной системой, то для ее описания необходимо отдельно для каждой фазы записать уравнения баланса массы, импульса и энергии, в которых все величины усреднены по элементарному объему. На межфазных поверхностях должны выполняться определенные граничные условия, отражающие эффекты взаимодействия фаз. Эти условия кратко будем именовать условиями совместности [3]. Совокупность систем уравнений сохранения для каждой из фаз и условий совместности составляет математическое описание (теоретическую основу) механики гетерофазных систем. Аналитическое решение уравнений, описывающих динамику двухфазной системы в пористых средах, может быть получено только для простых задач. В более сложных случаях решение сопряжено со значительными математическими трудностями. Поэтому в настоящем разделе рассмотрены лишь частные случаи двухфазного течения в пористой тепловыделяющей среде, актуальные для задач безопасности атомной энергетики.

В работе Харди и Нильсона [4] исследовались характеристики теплоотдачи пористого тепловыделяющего слоя, охлаждаемого водой через верхнюю горизонтальную границу. Для одномерного случая были построены модели распределения тепла при различных мощностях тепловыделения. Предполагалось, что пористая среда представляет собой прямоугольник с изолированными боковыми и нижней границами. По аналогии со свободно-

конвективными течениями для пористой энерговыделяющей среды определено модифицированное число Рэлея:

$$\underline{Ra}_p = \frac{\rho g \beta H^3 \kappa Q (1 - \varphi)}{2 \mu \chi \lambda}, \quad (3.1)$$

где  $Q$  — мощность тепловыделения, отнесенная к объему каркаса,  $H$  — толщина (глубина) слоя. При достаточно малых значениях  $\underline{Ra}_p$  перенос тепла осуществляется только благодаря механизму теплопроводности. Тогда характерный перепад температур по толщине слоя

$$T_{\text{дн}} - T_{\text{уп}} = \frac{H^2}{2\lambda} Q (1 - \varphi), \quad (3.2)$$

где  $T_{\text{дн}}, T_{\text{уп}}$  — соответственно температуры нижней и верхней границ. С ростом мощности тепловыделения существуют два возможных сценария смены режима переноса тепла:

1. Двухфазное течение наступает, когда температура нижней границы достигнет температуры кипения  $T_{\text{boiling}}$ . При этом критическая мощность  $Q_b$ , при которой осуществляется этот переход, находится из уравнения (3.1):

$$Q_b = \frac{2\lambda}{H(1-\varphi)} (T_{\text{boiling}} - T_{\text{уп}}). \quad (3.3)$$

2. Однофазная конвекция возникает при достижении критического числа Рэлея, из которого определяется критическая мощность тепловыделения  $Q_c$ .

Тот или иной режим может наступить в зависимости от соотношения величин  $Q_b$  и  $Q_c$ . Для случая однофазной конвекции предложенная авторами теоретическая модель “конвекции в ячейках” дала следующую корреляцию для числа Нуссельта:

$$\text{Nu} = \left( \frac{1}{32} \underline{Ra}_p \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Зависимость (3.4) качественно согласуется с экспериментами [5, 6], согласно которым  $\text{Nu} = \left( \frac{1}{43} \underline{Ra}_p \right)^{0,573}$ .

В основу модели двухфазного течения лег экспериментальный закон Дарси, записанный для каждой из фаз (см. (3.1)). Влияние капиллярных сил

не учитывалось. Коэффициенты относительных проницаемостей считались равными значениям соответствующих насыщений ( $k_i = \gamma_i$ ). Критическое значение  $Q_D$ , выше которого наступает осушение, было найдено аналитически и выражается формулой

$$Q_D = \frac{g\kappa L\rho_l}{H\nu_v(1-\varphi)} \frac{\left[1 + \frac{C_l(T_{\text{boiling}} - T_{\text{up}})}{L}\right]}{\left[1 + \left(\frac{\nu_l}{\nu_v}\right)^{1/2}\right]^2}, \quad (3.5)$$

где  $L$  — удельная теплота парообразования;  $C_l$  — удельная теплоемкость воды.

Если внешнее давление равно одной атмосфере, то отношение кинематических вязкостей в (3.5) является малой величиной ( $\left(\frac{\nu_l}{\nu_v}\right)^{1/2} \approx 1/70$ ). Пренебрегая отводом тепла за счет конвекции (полагая  $T_{\text{up}} = T_{\text{boiling}}$ ), получим

$$Q_D \approx 0,8 \frac{g\kappa L\rho_l}{H\nu_v(1-\varphi)}. \quad (3.6)$$

Р. Липински [7] на основе экспериментов [8, 9] дополнил физическую модель Харди и Нильсона, включив в рассмотрение эффекты поверхностного натяжения (капиллярные эффекты) и турбулентного течения. Для коэффициентов относительных проницаемостей он использовал аппроксимации Брукса и Кори [9], согласно которым  $k_i = \gamma_i^3$ . Уравнения баланса массы, импульса и энергии приняли вид

$$\frac{d}{dz}(\rho_v V_v + \rho_l V_l) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{1,75(1-\varphi)\rho_j V_j |V_j|}{\eta_j \varphi^3 d} + \frac{150(1-\varphi)^2 \mu_j V_j}{k_j \varphi^3 d^2} + \frac{dP_j}{dz} + \rho_j g = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dz}(\rho_v V_v) = \frac{Q(1-\varphi)}{L}, \quad (3.9)$$

где  $j = l, v$ ;  $\eta_j$  — коэффициент относительной проницаемости в случае турбулентного режима течения. Для определения  $\eta_j$  использовалась аппроксимация Рида [10]:

$$\eta_j = \gamma_j^5. \quad (3.10)$$

Благодаря силам поверхностного натяжения возникает разница между давлениями каждой фазы. Разность между давлениями определялась посредством функции Леверетта  $J$  [11]:

$$P_v - P_l = \frac{\sqrt{150}\sigma(1-\varphi)\cos\vartheta J}{\varphi d}. \quad (3.11)$$

Здесь  $J$  — функция Леверетта [11]:

$$J = \frac{\left(\frac{1}{\gamma_l} - 1\right)^{0,175}}{\sqrt{5}}, \quad (3.12)$$

$\vartheta$  — угол смачивания между жидкостью и частицами пористой среды (для системы вода —  $\text{UO}_2$   $\cos\vartheta \sim 1$ );  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Система (3.7)–(3.12) была решена численно для случаев глубокого (когда капиллярные эффекты несущественны) и мелкого слоев. Для каждого случая были получены картины распределения насыщения жидкой фазы в зависимости от высоты слоя. В случае глубокого дебриса насыщение монотонно убывает с высотой. Совсем иначе обстоит дело, когда силы поверхностного натяжения существенны. Насыщение при этом практически постоянно в нижней части слоя и резко возрастает в его верхней части.

Зайсбергер [12] провел эксперимент в квази-2-D-геометрии по изучению влияния зазоров на охлаждение тепловыделяющего дебриса. Экспериментальная установка представляла собой стеклянный контейнер с горизонтальными размерами 500x150 мм. Дно контейнера было наклонено под углом  $10^\circ$  к горизонту, что соответствует искривленному участку границы корпуса реактора. В качестве тепловыделяющего слоя использовались две различные засыпки: 1) засыпка стальных шариков диаметром 2 мм; 2) неоднородная засыпка стальных шариков диаметром 4 мм и стеклянных шариков диаметром 0,95 мм. Высота дебриса составляла 125 мм. Эксперимент проводился в диапазоне давлений от 0,8 до 1,8 МПа. Первый слой соответствовал глубокому дебрису. В случае второй засыпки эффекты поверхностного натяжения оказались существенными.

Эксперименты показали, что наличие зазора у нижней границы существенно увеличивает значение критического теплового потока, при котором начинается осушение. Также установлено отсутствие влияния давления на результаты.

Влияние размера зазора на величину критического потока в пористом тепловыделяющем слое изучалось на установке BENSON в работе Кёллера и др. [13]. Оказалось, что ширина зазора сильно влияет на критический тепловой поток в диапазоне значений  $1 \div 5$  мм. Дальнейшее увеличение ширины не оказывает влияния на характеристики двухфазного течения в дебрисе.

#### 4. Влияние смачивания границы на эффективность охлаждения пористой тепловыделяющей среды

Будем считать, что пористый тепловыделяющий слой занимает цилиндрический объем высотой  $H$  и радиусом  $R$ . Вертикальную координату  $z$  отсчитываем от плоской нижней горизонтальной границы. Мощность объемного тепловыделения пористой среды  $\tilde{Q} = (1 - \phi)Q$  считаем постоянной и однородной. Задача будет решена при различных условиях доступа воды к границе слоя. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Движение двухфазной среды жидкость — пар будем описывать с помощью модели Дарси, пренебрегая влиянием инерционных и капиллярных сил. Пренебрежение силами поверхностного натяжения справедливо для глубоких слоев, когда выполняется неравенство

$$H \gg \frac{\sigma}{\rho_l g a}, \quad (4.1)$$

где  $a$  — характерный диаметр канала пор. По аналогии с пуазейлевым течением скорость течения жидкости в канале пропорциональна квадрату диаметра канала. С другой стороны, скорость течения в канале равна осредненной по элементарному объему скорости  $u$ , деленной на пористость  $\phi$ . Используя уравнение Дарси (2.1), для характерного диаметра канала получим оценку

$$a \sim \sqrt{\frac{\kappa}{\phi}}. \quad (4.2)$$

Подставив соотношение (4.2) в (4.1), для высоты глубокого слоя окончательно имеем

$$H \gg \frac{\sigma}{\rho_l g \sqrt{\frac{\kappa}{\phi}}}. \quad (4.3)$$

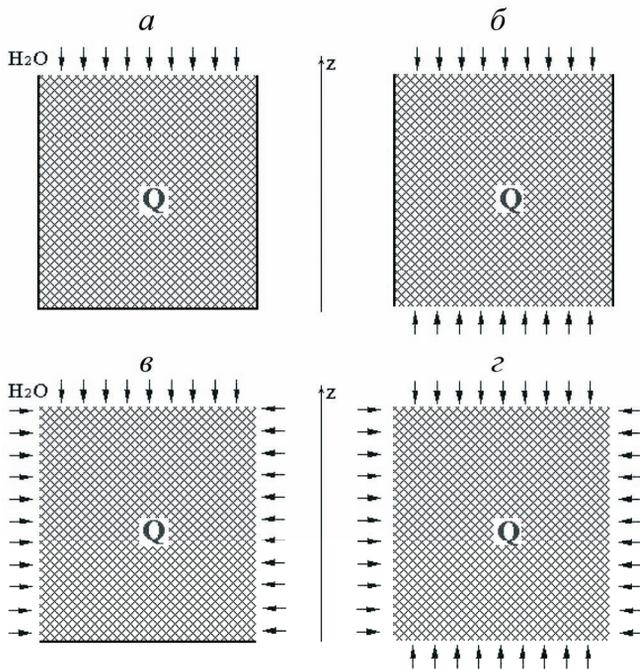


Рис. 1. Пористый тепловыделяющий слой при различных условиях доступа воды к границе

Для того чтобы пренебречь инерционными слагаемыми в уравнении движения, как и в любой гидродинамической задаче, необходимо, чтобы характерное безразмерное число Рейнольдса  $Re_j$  для каждой фазы  $j$  было много меньше критического значения  $Re_{cr}$ . Под критическим значением числа Рейнольдса мы понимаем такое, при котором закон Дарси (2.1) перестает быть справедливым. Число Рейнольдса представляет собой отношение инерционных сил к силам вязкого трения:

$$Re_j = \frac{u_j l}{\nu_j}. \quad (4.4)$$

В формуле (4.4)  $u_j$ ,  $l$  — масштабы скорости и длины соответственно.

Для течения в пористой среде в качестве характерного масштаба длины возьмем средний диаметр канала, определяемый соотношением (4.2). Масштаб скорости течения определим из уравнений баланса массы (2.7) и энергии (2.9):

$$u_j \sim \frac{\tilde{Q}H}{\rho_j L}. \quad (4.5)$$

Подставляя соотношения (4.2) и (4.5) в (4.4), для характерных чисел Рейнольдса получим:

$$\text{Re}_l = \frac{\tilde{Q}H}{\mu_l L} \sqrt{\frac{\kappa}{\phi}}, \quad (4.6a)$$

$$\text{Re}_v = \frac{\tilde{Q}H}{\mu_v L} \sqrt{\frac{\kappa}{\phi}}. \quad (4.6b)$$

Поскольку динамическая вязкость пара  $\mu_v$  меньше динамической вязкости воды  $\mu_l$ , необходимым и достаточным условием малости инерционных эффектов в уравнении движения для обеих фаз является соотношение

$$\text{Re}_v \ll \text{Re}_{cr}. \quad (4.7)$$

Из уравнения (4.6b) для высоты пористого слоя получим неравенство

$$H \ll \text{Re}_{cr} \frac{\mu_v L}{\tilde{Q}} \sqrt{\frac{\phi}{\kappa}}. \quad (4.8)$$

Критическое число Рейнольдса в (4.7), (4.8) определяется из экспериментов. Если число Рейнольдса определено формулами (4.6a), (4.6b), то критическое число Рейнольдса оказывается больше или порядка единицы:  $\text{Re}_{cr} \gtrsim 1$  [2]. Из соотношений (4.3), (4.8) следует, что отсутствие капиллярных и инерционных эффектов в задаче справедливо, когда толщина слоя удовлетворяет условию:

$$\frac{\sigma}{\rho_l g} \sqrt{\frac{\phi}{\kappa}} \ll H \ll \text{Re}_{cr} \frac{\mu_v L}{\tilde{Q}} \sqrt{\frac{\phi}{\kappa}}. \quad (4.9)$$

Подставив в (4.9) значения теплофизических характеристик воды и пара при атмосферном давлении и температуре кипения ( $\rho_l = 958 \text{ кг/м}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $\sigma = 5,886 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$ ,  $\mu_v = 11,97 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $L = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ ) и считая, что характерная мощность объемного тепловыделения каркаса  $\tilde{Q}$  при тяжелой аварии по порядку величины равна  $1 \text{ МВт/м}^3$ , получим

$$6,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \ll H \sqrt{\frac{\kappa}{\phi}} \ll \frac{\text{Re}_{cr}}{(1-\phi)} 27 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2. \quad (4.10)$$

Отсюда следует, что диапазон значений  $H$ , удовлетворяющий неравенству (4.10), существует при любых геометрических параметрах пористой среды.

В отсутствие капиллярных и инерционных сил система уравнений движения, представляющих собой запись балансов массы и импульса для каждой фазы, имеет вид

$$\operatorname{div}[(1-\alpha)\rho_l\vec{v}_l] = -\frac{\tilde{Q}}{L}, \quad (4.11)$$

$$\operatorname{div}[\alpha\rho_v\vec{v}_v] = \frac{\tilde{Q}}{L}, \quad (4.12)$$

$$(1-\alpha)\rho_l\vec{v}_l = \frac{\kappa k_l}{\nu_l}(-\nabla p + \rho_l\vec{g}), \quad (4.13)$$

$$\alpha\rho_v\vec{v}_v = \frac{\kappa k_v}{\nu_v}(-\nabla p + \rho_v\vec{g}), \quad (4.14)$$

где  $\alpha$  — паросодержание (доля газообразной фазы). Для одномерного случая система (4.11)—(4.14) совпадает с моделью Харди [4]. Как и в работах [4, 7], коэффициенты относительной проницаемости будем аппроксимировать степенными функциями паросодержания:

$$k_l = (1-\alpha)^m, \quad (4.15)$$

$$k_v = \alpha^m. \quad (4.16)$$

В нашей работе рассмотрены показатели степени  $m=1$  и  $m=3$ , которые используются в литературе [4, 7]. На несмачиваемой (сухой) части границы нормальная компонента скорости течения каждой фазы равна нулю, и, как следует из уравнений (4.13), (4.14), результирующая сила в направлении нормали к границе должна обращаться в нуль:

$$\nabla_n(-p + \rho_l\vec{g}\vec{w}) = 0, \quad (4.17)$$

где  $\vec{w}$  — радиус-вектор. На смачиваемой части границы давление равно гидростатическому:

$$p - \rho_l\vec{g}\vec{w} = 0. \quad (4.18)$$

Поскольку течение пара направлено вверх, на дне объема имеет место граничное условие

$$\alpha|_{z=0} = 0. \quad (4.19)$$

При атмосферном давлении плотность пара мала по сравнению с плотностью воды, и ее можно не учитывать в правой части уравнения (4.14). Представим систему (4.11)—(4.14) в безразмерном виде. В качестве масштаба плотности энерговыделения  $Q^*$  возьмем значение мощности, при котором все поры заняты паром. Это значение совпадает с размерным множителем в формуле (3.6):

$$Q^* = \frac{g\kappa L\rho_l}{H\nu_v}. \quad (4.20)$$

Характерным масштабом давления в задаче является гидростатическое давление жидкости

$$p^* = \rho_l gH. \quad (4.21)$$

В качестве масштабов координат возьмем высоту и радиус тепловыделяющего слоя. Для удобства будем отсчитывать давление от гидростатического. Тогда в безразмерных переменных система (4.11)—(4.14) с граничными условиями (4.17)—(4.19) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (1-\alpha)^m \frac{\partial f}{\partial s} \right\} + \frac{H^2}{R^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ (1-\alpha)^m \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\} + \xi q = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha^m \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial s} \right) \right\} + \frac{H^2}{R^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \alpha^m \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\} - q = 0. \quad (4.23)$$

Сухие участки границы:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0. \quad (4.24)$$

Смачиваемые участки границы:

$$f = 0. \quad (4.25)$$

Обращенная вниз граница:

$$\alpha|_{s=0} = 0. \quad (4.26)$$

Здесь  $s = z/H$ ,  $\eta = r/R$  — безразмерные координаты;  $q = \tilde{Q}/Q^*$  — безразмерная плотность мощности объемного тепловыделения;  $f = -\frac{p - \rho_l \tilde{g}\vec{w}}{\rho_l gH}$  — безразмерное модифицированное давление;

$\vec{n}$  — единичный вектор нормали к границе;  $\xi = \frac{\nu_l}{\nu_v} \approx 1/70$  — малый параметр.

Система уравнений (4.22)—(4.23) с граничными условиями (4.24)—(4.26) была решена численно. Как ожидалось, паросодержание растет с высотой (рис. 2 и 3). При изолированной (несмачиваемой) боковой границе зависимости паросодержания и давления от радиальной координаты отсутствуют, и задача становится одномерной [4].

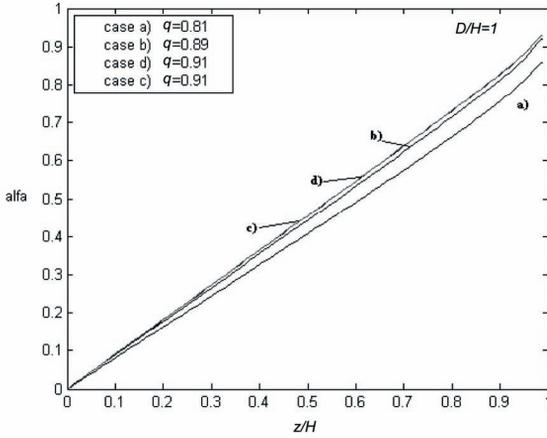


Рис. 2. Распределение паросодержания ( $r = 0, m = 1$ )

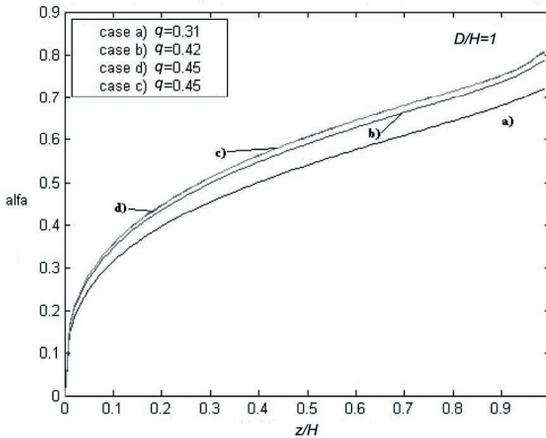


Рис. 3. Распределение паросодержания ( $r = 0, m = 3$ )

При наличии доступа воды к границе из-за градиента давления возникает сила, действующая на жидкость и направленная внутрь слоя по нормали к поверхности. Это приводит к дополнительному вовлечению жидкости в объем и повышению эффективности охлаждения дебриса. В случае проницаемой (смачиваемой) боковой поверхности эффективность охлаждения зависит также от аспектного отношения  $\frac{D}{H}$  (где  $D$  — диаметр цилиндра) и растет с его уменьшением (табл. 1).

**Таблица 1. Безразмерная критическая плотность мощности тепловыделения при различных условиях смачивания на границе**

$m$	$D/H$	$q_{cr}$ (случай а)	$q_{cr}$ (случай б)	$q_{cr}$ (случай с)	$q_{cr}$ (случай d)
1	10,0	0,81	0,89	0,81	0,89
1	2,0	0,81	0,89	0,89	0,9
1	1,0	0,81	0,89	0,91	0,91
1	0,5	0,81	0,89	0,93	0,93
1	0,1	0,81	0,89	0,96	0,96
3	10,0	0,31	0,42	0,32	0,42
3	2,0	0,31	0,42	0,42	0,43
3	1,0	0,31	0,42	0,45	0,45
3	0,5	0,31	0,42	0,47	0,48
3	0,1	0,31	0,42	0,51	0,51

Как следует из данных табл. 1, смачивание границы оказывает сильное влияние на эффективность охлаждения пористого тепловыделяющего слоя, особенно при  $m = 3$ . В этом случае критическая мощность тепловыделения увеличивается до 60%. Как следует из данных графиков на рис. 4 и 5, модифицированное давление при критической мощности тепловыделения выше в случае  $m = 3$ , чем при  $m = 1$ .

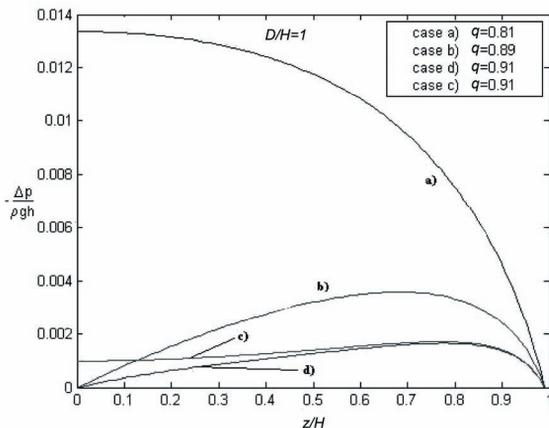


Рис. 4. Модифицированное давление ( $r = 0, m = 1$ )

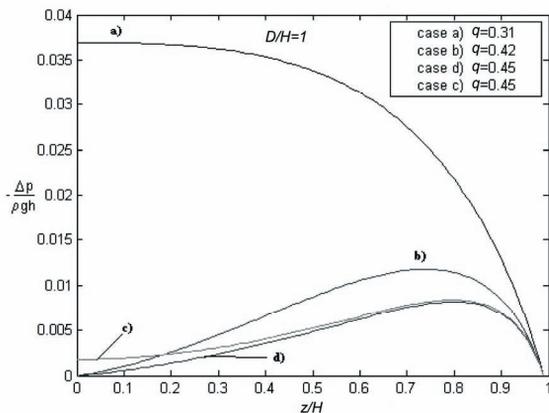


Рис. 5. Модифицированное давление ( $r = 0, m = 3$ )

В работе [7] было найдено распределение насыщения для глубокого дегриза в случае отсутствия зазора у границы (случай а) при  $m = 3$ . Объектом исследования был 300-миллиметровый слой  $UO_2$  с пористостью 0,4 и диаметром частиц 1 мм. Критическая мощность в этом случае оказалась равной 196 Вт/кг. Чтобы сравнить результаты нашего расчета с результатом [7], перейдем в табл. 1 к размерным величинам.

Используя определение  $q$ , для мощности объемного тепловыделения к единице массы  $Q_{kg}$  получаем соотношение

$$Q_{kg} = \frac{Q}{\rho_{UO_2}} = \frac{qL\kappa\rho_l g}{v_v H} \frac{1}{(1-\phi)\rho_{UO_2}}, \quad (4.27)$$

где  $\rho_{UO_2}$  — плотность  $UO_2$ . Подставляя безразмерную критическую мощность внутренних источников тепла  $q$  из табл. 1 в уравнение (4.18), для системы пар — вода ( $\rho_l = 958 \text{ кг/м}^3$ ,  $v_v = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $L = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ ) и 300-миллиметрового слоя  $UO_2$  ( $\rho_{UO_2} = 9,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ) с пористостью 0,4 и диаметром частиц 1 мм имеем

$$Q_{kg_{cr}} = 227 \text{ Вт/кг}. \quad (4.28)$$

Отличие результата (4.28) от результата работы [7], где  $Q_{kg_{cr}} = 196 \text{ Вт/кг}$ , является следствием учета в модели [7] инерционных сил. Похожее расхождение наблюдается и в распределении насыщения жидкой фазы в дебрисе (рис. 6).

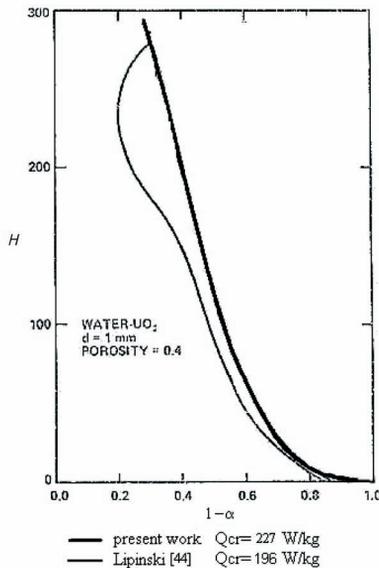


Рис. 6. Распределение насыщения ( $1-\alpha$ ), сравнительный анализ [7]

Критические мощности объемного тепловыделения для 300-миллиметрового слоя  $UO_2$  пористостью 0,4 и диаметром частиц 1 мм представлены в табл. 2.

**Таблица 2. Критическая плотность мощности тепловыделения (Вт/кг) при различных условиях смачивания на границе для слоя  $UO_2$  высотой 300 мм, пористостью 0,4 с диаметром частиц 1 мм**

$m$	$D/H$	$Q_{kg_{cr}}$ (случай а)	$Q_{kg_{cr}}$ (случай б)	$Q_{kg_{cr}}$ (случай с)	$Q_{kg_{cr}}$ (случай d)
1	10,0	596	655	596	655
1	2,0	596	655	655	662
1	1,0	596	655	670	670
1	0,5	596	655	685	685
1	0,1	596	655	707	707
3	10,0	227	309	236	309
3	2,0	227	309	309	316
3	1,0	227	309	331	331
3	0,5	227	309	346	353
3	0,1	227	309	375	375

Для случая  $m = 1$  и отсутствия смачивания на боковой и нижней границах пористого слоя  $q_{cr} = 0,81$  (см. табл. 1), что удовлетворяет результату работы Харди и Нильсона [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-17964-а).

## Литература

1. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. New York: Elsevier, 1972.
2. Nield D., Bejan A. Convection in porous media. New York: Springer-Verlag, 1999.
3. Лабунцов Д. А., Ягов В. В. Механика двухфазных систем. М.: МЭИ, 2000.
4. Hardee H. C. Nilson R. H. Natural convection in porous media with heat generation // Nuclear Science and Engineering. 1977. Vol. 63.
5. Burette R. Thermal convection in a fluid filled porous layer with uniform internal heat sources: PhD. Dissertation / Univ. of Minnesota. [S. l.], 1972.
6. Sun W. Convection instability in superposed porous and free layers: PhD. Dissertation / Univ. of Minnesota. [S. l.], 1973.
7. Lipinski R. J. A coolability model for postaccident nuclear reactor debris // Nuclear Technology. 1984. Vol. 65. Apr.
8. Ergun S. Fluid flow through packed columns // Chem. Eng. Prog. 1952. Vol. 48.
9. Brooks R. H., Corey A. T. Properties of porous media affecting fluid flow // J. Irreg. And Drainage Div. Proc. ASChE. 1966. Vol. 92. IR2.
10. Reed A. W. The effect of channeling on the dryout of heated particulate beds immersed in a liquid pool: PhD Thesis / Massachusetts Inst. of Technology. Cambridge, 1982.
11. Leverett M. C. Capillary behavior in porous solids // Trans. Soc. Min. Eng. AIME. 1941. Vol. 142.
12. Zeisberger A. Boiling in particle beds in a two dimensional configuration // Heat and Mass Transfer. 2001. Vol. 37.
13. Köller et al. Experiments on heat removal in a gap between debris crust and RPV wall // Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability Garching/Munich, Germany March 3—6, 1998. Workshop Proceedings. Paris, 1999. P. 287—295.
14. Magallon D., Huhtiniemi I., Hohmann H. Lessons learnt from FARO/TERMOS corium melt quenching experiments // Nuclear Eng. & Design. 1999. Vol. 189. P. 223—238.
15. Нозотов Е. Ф., Синицын А. К. О численном исследовании нестационарных задач конвекции // Инженер.-физ. журн. 1976. Т. 31. № 6.
16. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
17. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
18. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

# VIII. Численное моделирование экспериментов по свободной турбулентной конвекции в широком диапазоне условий

*Д. Г. Григорук, А. С. Филиппов*

## 1. Введение

При анализе гипотетической аварии ядерного реактора с расплавлением активной зоны, в процессе которой расплав перемещается на днище корпуса реактора, необходимо рассматривать задачу о распределении температуры и потока тепла к охлаждаемым границам в условиях свободной конвекции тепловыделяющей жидкости (ТВЖ). Приближенные решения этой задачи для полусферической формы днища корпуса были построены в 90-е годы прошлого века [1].

Основу для количественной проверки аналитических моделей теплоотдачи расплава составляют сравнительно немногочисленные эксперименты. Экспериментальные исследования процессов теплопереноса при естественной конвекции подтверждают основные выводы теории ТВЖ, однако доступная экспериментально область ТВЖ не покрывает диапазон параметров расплава, возможных при тяжелых авариях.

Для проверки моделей теплоотдачи ТВЖ за пределами возможностей экспериментов могут служить численные расчеты методами вычислительной гидродинамики (CFD). К настоящему времени эти методы воплощены в комплексах программ широкого назначения. Одним из них является коммерческий код Fluent [2], широко используемый за рубежом и начинающий приобретать популярность в нашей стране.

Как всякий “тяжелый” коммерческий CFD-пакет общего назначения, код Fluent обладает обширным набором физических моделей. Пределы его применимости для непосредственного моделирования событий при тяжелых авариях ставит относительно высокая стоимость отдельных расчетов (расчет в реалистической постановке должен использовать очень мелкие сетки), а также существенные трудности построения согласованной численной модели переменного неоднородного состава жидкости при моделировании больших перемещений твердого и жидкого материала. Закрытость исходного кода, несмотря на развитый аппарат пользовательских функций, существенно ограничивает возможности его доработки в этом направлении. Тем не менее трудность (или невозможность) использова-

ния CFD-кодов в сквозном расчете аварии не снижает их ценность как средства получения решений сложных задач конвекции, недоступных для экспериментального исследования. При этом, однако, сам код должен быть, в свою очередь, испытан на решении задач указанного класса.

В настоящей работе проводится численное моделирование экспериментов с целью оценки пригодности кода Fluent как средства получения новых результатов и тестирования более простых моделей теплоотдачи расплава. В качестве основы для сравнения берутся результаты, полученные в сериях экспериментов:

течение жидкости между плоско-параллельными пластинами, находящимися при различной температуре (представлены случаи горизонтального и вертикального положения пластин);

эксперименты с расплавами солей, моделирующих ТВЖ, проведенные в рамках программы РАСПЛАВ-SALT [3, 4].

При анализе процессов естественной конвекции в неравномерно нагретом сосуде практический интерес представляет теплоотдача жидкости, определяемая распределением потока тепла на стенках сосуда. Основными факторами, характеризующими состояние жидкости и теплоперенос, служат число Рэлея и среднее число Нуссельта:

$$Ra = \alpha g \Delta T R^3 / (\nu \kappa), \quad Nu = R \int_{S_b} f_n ds / (\lambda (T_m - T_b) S_b). \quad (1)$$

При наличии объемных источников тепла вместо  $Ra$  вводится модифицированное число Рэлея:

$$Ra_i = \alpha g Q R^5 / (\nu \kappa \lambda).$$

Здесь  $T_m$ ,  $T_b$  — соответственно температуры жидкости и стенки;  $\Delta T \approx |T_m - T_b|$  — перепад температуры;  $R$  — радиус сосуда;  $f_n$  — нормальная компонента потока тепла;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\lambda$  — теплопроводность;  $\kappa$  — температуропроводность;  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения;  $Q$  — мощность тепловыделения на единицу объема;  $g$  — ускорение свободного падения. Зная для некоторого класса течений зависимость  $Nu(Ra_i)$  в определенном диапазоне изменения аргумента, можно рассчитать теплоотдачу на стенки. Поэтому приводимые ниже результаты расчетов естественной конвекции представляются в форме зависимостей  $Nu(Ra)$  или  $Nu(Ra_i)$ , построенных по группам расчетов и экспериментов.

### **Естественная конвекция: плоско-параллельные стенки**

Расчеты течения жидкости между теплой и холодной плоско-параллельными пластинами проводились как предваряющие моделирование свободно-конвективных турбулентных течений в тепловыделяющей жидкости, поскольку течение у плоской стенки устроено проще, и теория ТВЖ в значительной степени основана на аналогии с этим случаем.

В зависимости от расположения пластин относительно направления гравитационного поля картина течения меняется. В случае горизонтального расположения и неустойчивой температурной стратификации устанавливается режим конвекции Рэлея—Бенара. Аппроксимация результатов экспериментов по изучению турбулентной конвекции Рэлея—Бенара в диапазоне чисел Рэлея  $10^7 \leq Ra \leq 10^{10}$  дает следующую корреляцию для среднего числа Нуссельта [5]:

$$Nu = a_{rb} Ra^{1/3}, \quad (2)$$

где  $a_{rb}$  — численный коэффициент, зависящий от числа Прандтля. Для воздуха  $a_{rb} = 0,15$ . При увеличении числа Рэлея может наблюдаться переход к режиму жесткой турбулентности, при котором показатель степени уменьшается с  $1/3$  до  $2/7$ . Однако для практических целей различие в величине потока тепла оказывается небольшим.

В экспериментах по турбулентной свободной конвекции у вертикальной пластины зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея также имеет степенной характер с показателем  $1/3$  в диапазоне  $10^7 \leq Ra \leq 10^{10}$  [5], [6]:

$$Nu = a_v Ra^{1/3}. \quad (3)$$

Численный коэффициент  $a_v$  в формуле (3) оказывается ниже, чем  $a_{rb}$  в законе (2) для конвекции Рэлея—Бенара. Для воздуха  $a_v \approx 0,1$ .

Расчеты проводились на неравномерной сетке размером 20 000 ячеек для плоскопараллельных пластин длиной  $L = 30$  м с расстоянием между ними  $h = 1$  м (рис. 1). Поскольку выполняется условие  $h \ll L$ , влияние краевых эффектов мало. Проведены расчеты при нескольких углах наклона пластин  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  относительно направления вектора гравитации  $g$  в диапазоне чисел Рэлея  $10^7 \leq Ra \leq 10^{14}$ . Конвекция рассматривалась в приближении Буссинеска. Плотность и тепловое расширение брались независимыми от температуры. Для расчета использовалась  $K - \varepsilon$ -модель турбулентности [7—8]. Расчеты стационарного режима проводились методом установления от некоторого начального состояния. Вариация числа Рэлея осуществлялась за счет изменения величины ускорения свободного падения.

Результаты расчетов представлены на рис. 2 и 3. В случае горизонтальных пластин ( $\alpha = 90^\circ$ ) картина течения совпадает с теорией и экспериментом и соответствует ячеистой бенаровской конвекции (см. рис. 3).

При изменении наклона пластин структура течения деформируется: аспектное отношение ячеек растет до тех пор, пока не станет порядка характерного продольного размера пластины  $L$ . При дальнейшем увеличении угла наклона ячеистая структура сменяется циркуляционным движением во всем объеме, занимаемом средой. В этом случае восходящее течение под действием силы плавучести идет вдоль более горячей пластины, в то время как у более холодной пластины скорость течения направлена вниз.

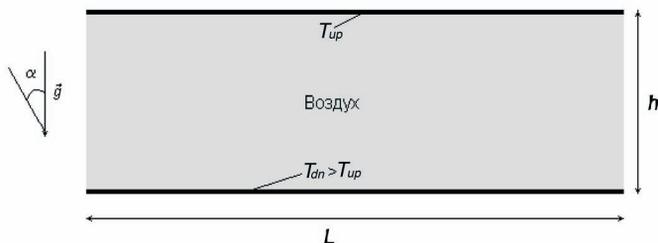


Рис. 1. Расчетная область: жидкость между плоско-параллельными пластинами

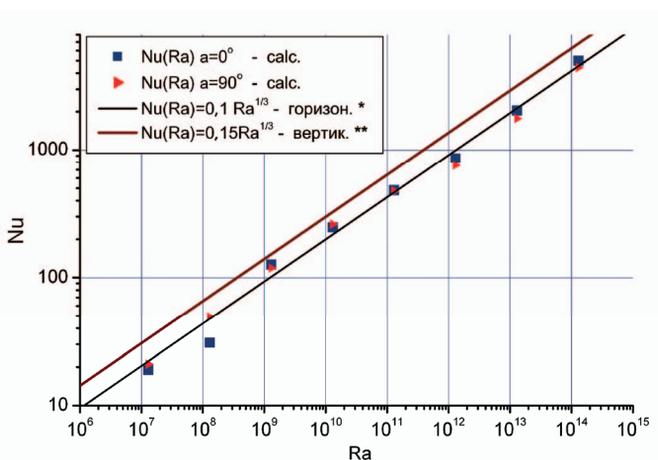


Рис. 2. Сравнение расчетов и экспериментов для вертикальных и горизонтальных пластин:  
 \* работа [6], \*\* работа [5]

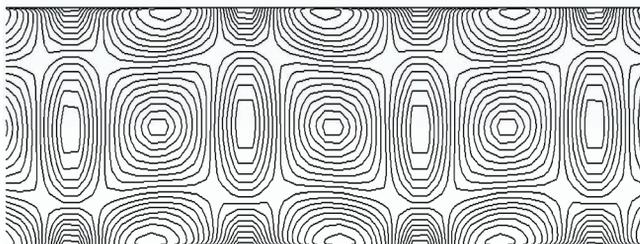


Рис. 3. Изолинии модуля скорости в установившейся конвекции Рэлея — Бенара

## 2. Расчеты экспериментов с расплавами солей

Эксперименты РАСПЛАВ-SALT проводились в рамках международной программы РАСПЛАВ [3, 4]. При постановке использовалась аналогия режимов ТВЖ в сосуде полусферической формы и в сосуде так называемой slice-геометрии (форма slice-сосуда с ТВЖ близка к той части полусферического сосуда с ТВЖ, что заключена между двумя близкими плоскостями, параллельными оси системы, и заключающими между собой эту ось, — см. рис. 4). Моделирующая жидкость — расплав композиции солей  $\text{NaF-NaBF}_4$ . Схема установки и ее двумерная расчетная идеализация приведены на рис. 4 и рис. 5. Нагрев расплава осуществлялся с помощью погружных нагревателей, помещенных у плоских стенок, а также путем прямого пропускания тока. Толщина округлой стальной стенки в эксперименте — 2 см. Охлаждение создавалось расплавом другой соли с пониженной температурой плавления, циркулирующим у наружной стенки. Температура стенки в эксперименте оказывается неоднородной.

Положение точек границы соль — сталь может быть характеризовано углом, который образует радиус полукруга с вертикалью (см.рис. 5), или расстоянием по окружности. Серия экспериментов была проведена для диапазона чисел  $2,7 \cdot 10^{11} \leq \text{Ra}_1 \leq 1,6 \cdot 10^{13}$ , режим течения — ламинарный и слаботурбулентный. В каждом эксперименте получено стационарное пространственное распределение температуры. По результатам серии измерений была построена зависимость  $\text{Nu}(\text{Ra}_1)$ .

### 2.1. Постановка задачи моделирования

На расчетной области, отвечающей slice-геометрии, было проведено прямое численное моделирование двух экспериментов. Расчеты проводились

в двумерной постановке (см. рис. 5). Моделировались два эксперимента из проведенной серии. Граничные условия и теплофизические коэффициенты в этих расчетах с достаточной точностью отвечали экспериментальным (“реальная” постановка). Эффективное объемное тепловыделение и теплофизические величины приведены в [9] ( $q = 254 \text{ кВт/м}^2$  и  $q = 287 \text{ кВт/м}^2$  в экспериментах № 29 и 30).

Была также проведена серия расчетов для определения зависимостей  $Nu(Ra_i)$ . В серийных расчетах теплофизические коэффициенты были постоянны, граничные условия однородны (“идеальная” постановка), и варьировалась мощность тепловыделения либо величина ускорения силы тяжести  $g$ . Для сравнения были проведены также серийные расчеты этой задачи в осесимметричной постановке с тем же сеточным разбиением (полусферическое днище). При высоких числах  $Ra_i$  в расчет вводилась турбулентность, и в этом случае использовалась модель  $K - \epsilon$ -realizable [7], в которой всегда выполнено условие Шварца [8]. Стандартные значения коэффициентов модели не менялись.

Двумерная геометрия расчетной области slice-геометрии отвечает бесконечному полуцилиндру, дополненному сверху плоским слоем (в расчете участвует половина симметричной области). Стальная стенка моделируется как тепловое сопротивление, учитываемое коэффициентом теплообмена  $H$  в граничных условиях конвективного типа на охлаждаемой границе:

$$F(\varphi) = H(T(\varphi) - T_b(\varphi)), H = 1000 \text{ Дж/м}^2\text{К}.$$

Здесь профиль  $T_b(\varphi)$  наружной температуры в зависимости от угла  $\varphi$  отвечает экспериментально измеренной температуре наружной границы стальной стенки;  $F(\varphi)$  — поток тепла. Теплоотдача вверх оценивалась в эксперименте величиной  $\sim 10\%$  полного тепловыделения и учитывалась аналогичным условием конвективного типа на верхней границе. Расчеты в “реальной” постановке проведены для сравнения с экспериментом по температуре боковой границы и максимальной температуре. В эксперименте № 30 охлаждение приводило к затвердеванию расплава на холодной границе соль — сталь, и здесь интерес представляет толщина образовавшейся корки. Затвердевание учитывалось стандартной моделью кода (введение источников/стоков в уравнения импульса и энергии).

В “идеальной” постановке условие охлаждения вводилось граничным условием по температуре  $T = 668 \text{ К}$ , постоянной во всех расчетах серии, верхняя граница бралась адиабатической. Для оценки возможностей расчетной методики диапазон чисел  $Ra_i$  в серийных расчетах брался шире, чем в экспериментах:  $3 \cdot 10^8 \leq Ra_i \leq 3 \cdot 10^{15}$ . При  $Ra_i \geq \sim 10^{11}$  расчеты велись методом установления до выхода на стационарный режим, характеризу-

мый постоянной  $T_m$  и полным потоком тепла через границу, равным тепловыделению  $\underline{Q}$ . Результатом единичного расчета служат перепад температуры  $T_{\max} - T_b$  и вычисляемое по нему среднее число Нуссельта (1). Количество расчетных ячеек в модели, используемой для серийных расчетов, ~11 000. Сходимость решения по сетке была проверена на более мелких разбиениях (~20 000 ячеек).

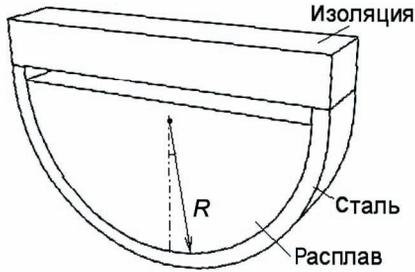


Рис. 4. Схема экспериментов SALT

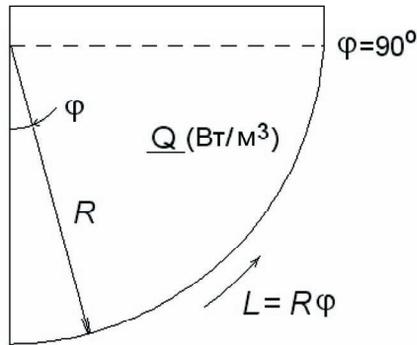


Рис. 5. Расчетная область

### 3. Обсуждение результатов

Расчет хорошо передает особенности пространственного распределения температуры, свойственные всем режимам конвекции ТВЖ (рис. 6), — (это температурная стратификация по вертикали, приводящая к возвратному течению в пограничном слое и немонотонности поперечного профи-

ля температуры у охлаждаемой стенки. В расчетах эксперимента № 30 сгущение изолиний температуры на границе (рис. 7) показывает область затвердевания. Максимальная толщина корки  $\delta \cong 3$  см близка к экспериментально полученной (3÷4 см). Этот параметр, однако, напрямую зависит от величины теплопроводности соли в твердой фазе, которая бралась из работы [9]. Сравнение по температуре проводится для пограничной области “соль — стальная стенка”. На рис. 8 и 9 приведены угловые распределения температуры (абсцисса — длина окружности), полученные в экспериментах № 29 и 30. Несоответствие с экспериментом при углах  $\cong 90^\circ$  ( $L = 0,314$  м) связывается с краевыми эффектами: верхняя свободная граница расплава в эксперименте колеблется, стенка имеет конечную толщину.

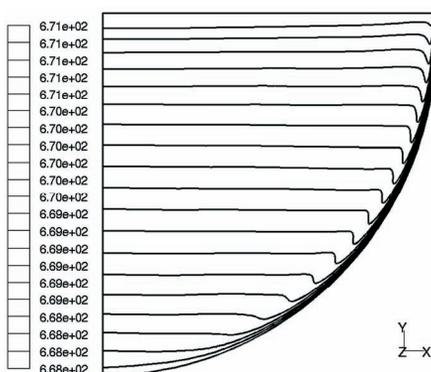


Рис. 6. Типичное распределение температуры в ламинарном режиме

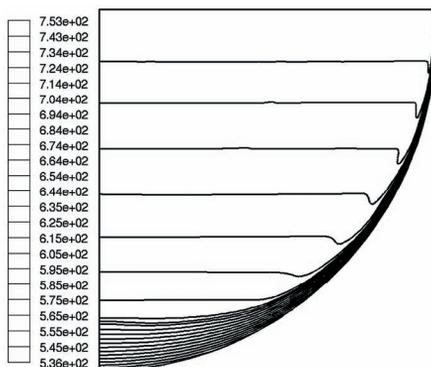


Рис. 7. Распределение температуры в эксперименте № 30 (с затвердеванием на границе)

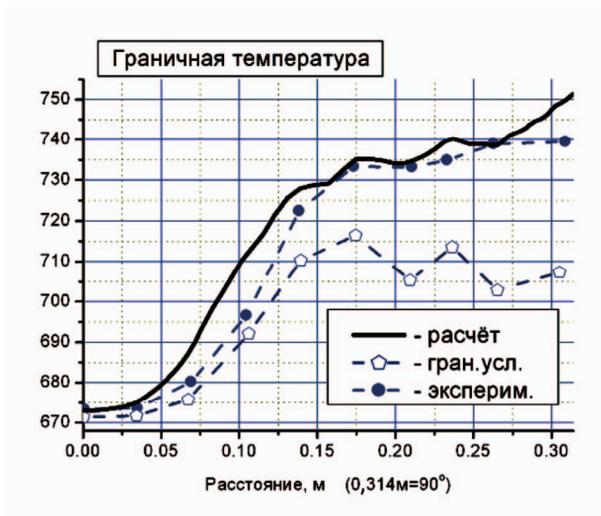


Рис. 8. Граничные температуры  $K$  стенки в эксперименте № 29 в зависимости от расстояния по меридиану; «гран. усл.» — задаваемая наружная температура стенки

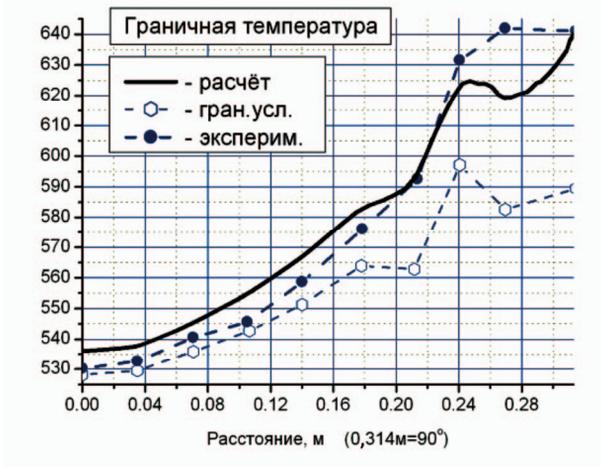


Рис. 9. Граничные температуры  $K$  стенки в эксперименте № 30 в зависимости от расстояния по меридиану; «гран. усл.» — задаваемая наружная температура стенки

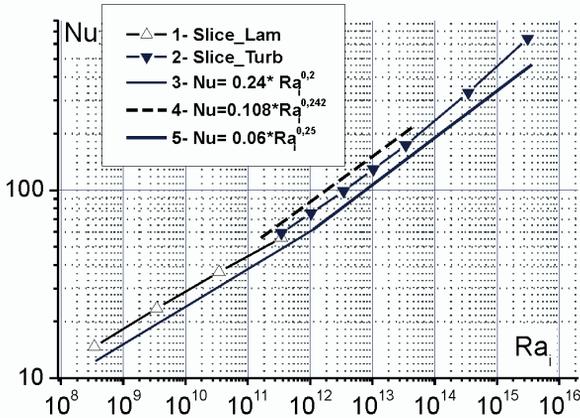


Рис. 10. Зависимости  $Nu(Ra_i)$ , slice-геометрия: 1 — расчеты в ламинарном режиме; 2 — расчеты с моделью турбулентности; 3, 5 — аналитические степенные законы для полусферического сосуда; 4 — зависимость  $Nu(Ra_i)$  из солевых экспериментов

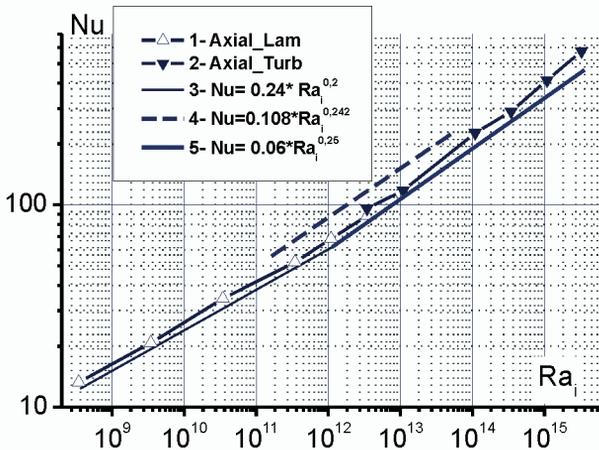


Рис. 11. Зависимости  $Nu(Ra_i)$ , аксиальная геометрия в расчетах (обозначения те же, что на рис. 7)

Кривые  $Nu(Ra_i)$  представляются степенным законом:  $Nu \sim Ra_i^\gamma$ . На рис. 10 и 11 нанесены расчетные кривые и степенная зависимость для

$\gamma = 0,242$ , аппроксимирующая результаты серии экспериментов по интегральной теплоотдаче расплава соли, а также зависимости: с показателем  $\gamma = 0,2$ , что характерно для ламинарного режима, и с показателем  $\gamma = 0,25$ , что характерно для развитого турбулентного режима конвекции ТВЖ в полусферическом сосуде [1].

В серийных расчетах турбулентность вводилась в ламинарную модель для вариантов с  $Ra_i \geq 3 \cdot 10^{11}$ . Расчет при  $Ra_i = 3 \cdot 10^{11}$  проводился для ламинарного и турбулентного режимов, и результаты оказались близкими (см. рис. 7). При росте параметра  $Ra_i$  в серии расчетов с турбулентностью зависимость  $Nu(Ra_i)$  отклоняется от ламинарной.

## **7. Заключение**

- Получено хорошее согласие с экспериментами по теплоотдаче жидкости между двумя плоско-параллельными пластинами в широком диапазоне чисел Рэлея.
- Картина течения для горизонтальных пластин отвечает экспериментально наблюдаемой (ячейки Бенара).
- Заметного влияния угла наклона пластин на закон теплообмена не получено, что несколько расходится с существующими представлениями, но расхождение имеет порядок разброса данных разных авторов.

При моделировании солевых экспериментов полученные распределения температуры на границе и интегральная теплоотдача хорошо описываются двумерной численной моделью с объемным источником тепла. “Источниковая” модель затвердевания кода Fluent позволяет количественно описать застывание расплава на холодной стенке.

Интегральная теплоотдача ТВЖ в численных расчетах может быть описана степенным законом  $Nu(Ra_i)$  в диапазоне чисел  $3 \cdot 10^8 \leq Ra_i \leq 3 \cdot 10^{15}$ , охватывающим как ламинарный, так и турбулентный режимы течения. Показатели степенной зависимости  $\gamma = 0,2$  для ламинарного,  $\gamma \cong 0,24 \div 0,26$  для турбулентного slice-режимов численного расчета хорошо согласуются с аналитически и экспериментально полученными.

Зависимости  $Nu(Ra_i)$ , полученные в численных расчетах для полусферической и slice-геометрии, близки друг к другу.

Авторы выражают благодарность П. С. Кондратенко и В. Ф. Стрижову за ценное обсуждение постановки задач и результатов расчетов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-17964-а).

## Список сокращений и обозначений

ТВЖ	— тепловыделяющая жидкость
CFD	— computational fluid dynamics
$g$	— ускорение свободного падения
$L$	— расстояние вдоль меридиана окружности
$Nu$	— число Нуссельта
$Q, q$	— полное тепловыделение (кВт) и объемное тепловыделение (кВт/м <sup>3</sup> )
$R$	— радиус стенки
$Ra_i$	— модифицированное число Рэлея
$T_m$	— максимальная температура расплава
$T_b$	— температура охлаждения стенки сосуда
$\alpha$	— коэффициент объемного теплового расширения
$\gamma$	— показатель степени
$\kappa$	— температуропроводность
$\lambda$	— теплопроводность
$\nu$	— кинематическая вязкость
$\varphi$	— угол вдоль меридиана круговой границы

## Литература

1. *Большов Л. А., Кондратенко П. С., Стрижов В. Ф.* Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости // УФН. 2001. 171. № 10. С. 1051—1070.
2. *Fluent 6.2 User's Guide / Fluent. Inc. Lebanon, 2005.*
3. *Abalin S., Gmidoi I., Semenov V. et al.* The results and analysis of the RASPLAV salt tests // Proc. RASPLAV Seminar 2000, Garching, Germany.
4. *Асмолов В. Г., Абалин С. С., Дегальцев Ю. Г. и др.* Поведение бассейна расплава активной зоны в днище корпуса реактора (Проект РАСПЛАВ) // Атом. энергия. 1998. 84. Вып. 4. С. 303—318.
5. *Warner C. Y., Arpaci V. S.* // ИЖМТ. 1968. Vol. 11. P. 397—406.
6. *Al-Arabi M., El-Riedy M. K.* // ИЖМТ. 1976. Vol. 19. P. 1399—1404.
7. *Методы расчета турбулентных течений.* М.: Мир, 1984.
8. *Shih T.-H., Liou W. W., Shabbir A. et al.* A New K- $\epsilon$  Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows — Model Development and Validation // Computers Fluids. 1995. 24 (3). P. 227—238.
9. *Semenov V. N., Kasyanov S. Yu., Kisselev A. E.* Results of Assessment of SCDAP/RELAP Mod3.2 against RASPLAV corium and salt tests / Russian Academy of Sciences Nuclear Safety Inst. Moscow, 1999.

# IX. Численное исследование конвективной теплоотдачи расслоенного расплава с объемным энерговыделением

*Д. Г. Григорук, А. С. Филиппов*

## 1. Введение

При аварии с осушением активной зоны (АЗ) водо-водяного реактора материал АЗ должен плавиться и под действием силы тяжести перемещаться в нижнюю область на корпус реактора. Тепловыделяющий высокотемпературный расплав оксидного топлива способен плавить стальные внутрикорпусные устройства реактора и сам корпус. Образующийся в большом количестве расплавленный металл практически не смешивается с оксидным расплавом. Поэтому расплав, находящийся в нижней части корпуса реактора с исходной средней толщиной стенок 0,2 м, должен состоять из двух слоев: металлического и оксидного. Оцениваемые плотности слоев при температуре ~1800 К составляют соответственно  $\rho_{ст} = 6900 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_{окс} = 7900 \text{ кг/м}^3$ . В этом случае металлический слой должен находиться выше, причем тепловыделение будет в основном сосредоточено в нижнем оксидном слое.

Более точный термодинамический анализ системы U-Zr-O-Fe, проведенный на основе соответствующих экспериментов [1], показывает, что равновесный состав металлического и оксидного слоев зависит от соотношения масс компонентов во всем расплаве, причем в состав металлического слоя может входить заметное количество урана. В последнем случае плотность металлического слоя может превышать плотность оксидного, и оксиды могут всплыть. Поскольку тепловыделяющие продукты деления растворены в основном в оксидном слое, распределение объемных источников тепла в этом случае также переместится вверх.

Все это существенно усложняет картину поведения тепловыделяющей жидкости (ТВЖ), поэтому теплоотдача расслоенного тепловыделяющего расплава экспериментально почти не исследовалась. Простым и содержательным приближением здесь служит модель теплоотдачи отдельного плоского стального слоя, подогреваемого снизу потоком тепла и отдающего тепло вбок (на постоянную температуру плавления стали) и вверх (излучением). В одной из первых работ [2], в которой исследовались свойства

подобной системы, для оценки теплоотдачи использовались известные эмпирические зависимости теплоотдачи при конвекции Рэлея-Бенара и при конвекции у вертикальной холодной стенки. Позже эта модель была развита в работе [3]. Математически задача сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, описывающих баланс теплоотдачи расплава. Из решения системы следует, что большая часть входящего потока тепла должна уходить через стальной слой на боковую границу. При меньшей толщине металлического слоя плотность потока тепла должна быть большей (“эффект фокусировки потока тепла”).

Для условий тяжелой аварии в реакторе типа ВВЭР-1000 оцениваемая доля тепловыделения расплава, идущая в стальной слой при его верхнем положении, составляет около 50%, соответственно плотность потока через боковую стенку слоя может достигать величины  $1 \text{ МВт/м}^2$  и более. Этот результат важен для анализа безопасности последствий тяжелой аварии, поскольку при разрушении АЗ корпус реактора может охлаждаться только водой, и большая плотность потока тепла от корпуса приводит к кризису теплоотдачи. Поэтому для водо-водяных реакторов достаточно большой мощности (700—800 МВт и более) удержание расплава в водоохлаждаемом корпусе при аварии с разрушением АЗ возможно не во всех случаях, и для локализации расплава в новых проектах АЭС, отечественных и зарубежных, предусматриваются специальные устройства [4, 5].

Для получения количественной информации по теплоотдаче расслоенного расплава необходимо решать задачу о конвекции в двух несмешивающихся жидкостях в полуэллиптическом сосуде. Количественные результаты здесь могут быть получены путем численных расчетов методами вычислительной гидродинамики (CFD). В настоящей работе для этих целей использован коммерческий код Fluent 6.3 [6], предоставляющий ряд возможностей для моделирования течений в разных физических условиях.

Методы CFD в принципе позволяют получить решение задачи термогидродинамики для любой формы сосуда и при наличии нескольких слоев расплава. Однако в силу сложности физических условий (турбулентность, плавление-затвердевание, неопределенности в начальных и граничных условиях) само получаемое численное решение подлежит проверке и анализу. В связи с отсутствием экспериментов для расслоенного расплава необходимая верификация кода была проведена на более простых задачах, представляющих разные аспекты общей проблемы. Некоторые результаты изложены ниже в качестве обоснования использования кода. После этого приведены результаты расчетов самосогласованной задачи о теплоотдаче расслоенного расплава в корпусе реактора с набором входных данных, отвечающим одному из сценариев тяжелой аварии для реактора ВВЭР-1000.

## 2. Расчеты по аналитической и численной модели для плоского слоя

Геометрия задачи представлена на рис. 1. В цилиндрической области радиусом  $R$  находится расплав стали, нагреваемый снизу потоком тепла. На верхней границе с температурой  $T$  задано условие по потоку тепла излучения во внешнюю среду с температурой  $T_b$  и коэффициентом переизлучения  $\varepsilon = 0,45$ :

$$F_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma (T^4 - T_b^4). \quad (3)$$

Боковая поверхность находится при постоянной температуре плавления стали  $T_{\text{ЛЮ}}$ . Надо определить поток тепла на боковой границе в зависимости от размеров слоя и подаваемого потока тепла снизу. Принимаемые в расчетах численные значения:  $R = 2,07$  м,  $h = (0,1 \div 0,5)R$ ,  $F = 400 \div 1000$  кВт/м<sup>2</sup>. При этих условиях течение в расплаве турбулентно. Температура  $T_b$  здесь принималась нулевой. Диапазон параметров расчетов соответствует значениям, которые фигурируют в [2, 3].

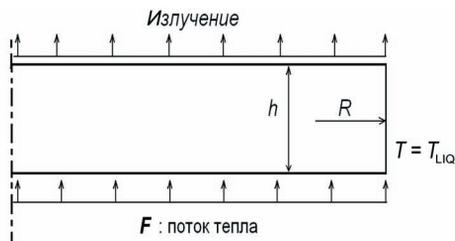


Рис. 1. Постановка задачи по теплоотдаче расплавленного металлического слоя

В применении к проблеме разрушения корпуса реактора эта задача рассматривалась в работе [2]. В ней приведена модель, использующая полуэмпирические зависимости по теплоотдаче жидкости при рэлей-бенаровской конвекции и при течении у холодной стенки, позволяющая рассчитать величину потока тепла на боковую поверхность в зависимости от аспектного отношения  $h/R$ . Затем модель была усовершенствована в работе [3].

CFD-расчет проводился на неравномерной ортогональной сетке размером 20 000 ячеек. Конвекция рассматривалась в приближении Буссинеска. Для моделирования турбулентности использовалась модель  $K-\varepsilon$ -realizable [7]. Расчеты проводились методом установления.

На рис. 2 приведены результаты для величины плотности потока на боковую стенку в зависимости от аспектного отношения  $h/R$ , полученные по моделям [2, 3] и в серии численных расчетов при подаваемом снизу потоке тепла плотностью 400 кВт/м<sup>2</sup>. На рис. 3 приводятся результаты

расчетов отношения плотности потока тепла через боковую границу в зависимости от подаваемого потока  $F$ . Плотность потока тепла к боковой границе слоя находится в обратной зависимости к его толщине.

Во всех описываемых расчетах решение считалось установившимся после достижения баланса граничных потоков тепла и тепловыделения, если оно имелось. Полный поток тепла на границе определялся с помощью опций кода Fluent. Полученное хорошее совпадение результатов расчета по численной и полуэмпирической моделям свидетельствует о корректности вычисления потоков тепла и вместе с остальными проведенными проверками позволяет рассматривать гидродинамические расчеты по коду Fluent как средство исследования теплоотдачи в более сложных конфигурациях тепловыделяющей жидкости.

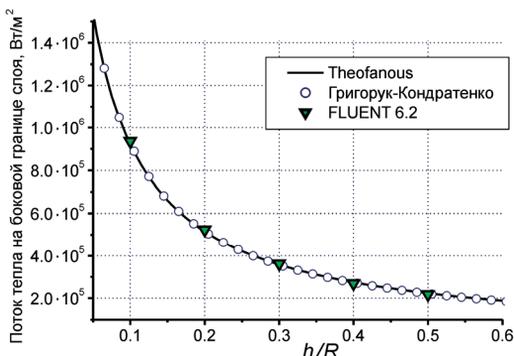


Рис. 2. Зависимость плотности потока тепла к боковой границе металлического слоя от аспектного отношения  $h/R$

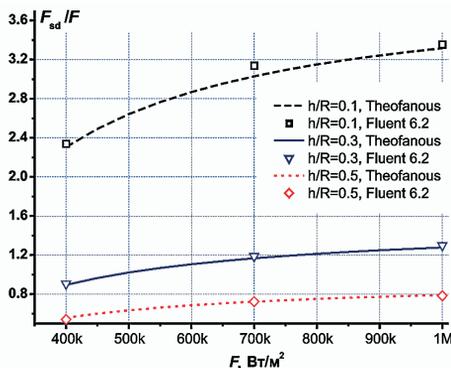


Рис. 3. Отношение плотностей потоков тепла в зависимости от подаваемого потока  $F$  при разных аспектных отношениях

### **3. Расслоенный тепловыделяющий расплав в толстостенном корпусе**

Перейдем к расчетам согласованной задачи о теплоотдаче расслоенного расплава в корпусе реактора. Ранее была продемонстрирована возможность количественного описания каждой зоны расплава по отдельности:

однородный тепловыделяющий расплав — см. [8];

металлический слой, подогреваемый снизу, — рассмотренная выше задача.

При постановке согласованной задачи о теплообмене в двухслойной жидкости, заключенной в сосуд, физическая картина усложняется наличием плавкой границы, процессами плавления-затвердевания на границе слоев в условиях большого перепада температур плавления материалов слоев, турбулентным характером течения. Кроме того, оксиды и металлы в процессе взаимодействия сепарируются, пространственно разделяются под действием сил плавучести, и растворение может не дойти до конца, т. е. соотношение составов металлического и оксидного слоев может в течение некоторого времени отличаться от термодинамически равновесного. Эти важные вопросы, однако, здесь не обсуждаются, и основное внимание уделяется распределению температуры и теплоотдачи расслоенного расплава для двух случаев:

металлический слой *над* оксидным — “нормальное” расположение слоев;

металлический слой *под* оксидным — “инверсное” расположение слоев.

Тем не менее остановимся кратко на вопросе о возможности существования расслоенного расплава в плавком корпусе в масштабе времени, необходимого для установления квазистационарного состояния. Упрощенно процесс образования расслоенного расплава в нижней части реактора можно реконструировать следующим образом. Однородный горячий расплав оксидов и металлов частично перемещается (после разрушения днища шахты реактора) на дно массивного стального корпуса с температурой ~400 К. При контакте с холодным корпусом приграничный слой материала застывает, а в остальной массе набирают ход процессы тепловой циркуляции и одновременно расслоения расплава.

Предположим, что металлическая фаза легче и всплывает вверх. Тогда в нижней части бассейна собирается расплав тугоплавкого материала, состоящего преимущественно из оксидов, а в верхней — более легкоплавкий слой, состоящий преимущественно из стали. Теплоотдача и плавление корпуса на границе с оксидами затруднены застыванием расплава — образованием корки. На границе с горячим металлическим слоем корка не образуется, поток тепла из расплава высок, и корпус, имея начальную толщину и невысокую теплопроводность, не способен пропустить такой высокий поток тепла и должен плавиться. Вследствие высокой начальной темпера-

туры металлического слоя его боковая граница с твердым материалом должна продвигаться от начального положения к внешней границе корпуса. Время, необходимое для полного плавления границы, если она не охлаждается, оценивалось в отдельных численных расчетах задачи для металлического слоя. Оно составляет величину порядка 200÷500 с.

Если металлический расплав оказывается более тяжелым, то за то время, пока идет растворение урана и циркония в стали, металлическая фаза, не образующая твердой корки, разрушает корпус по всей границе. В обоих случаях расположения слоев на установление квазиравновесной структуры жидкостей может потребоваться значительное время. Это время может быть сравнимо с общим временем разрушения корпуса в случае достаточного интенсивного тепловыделения.

Последовательное моделирование расслоения расплава, включающее продвижение его боковых границ, сильно усложняет модель и далеко уведит от сравнительно проверенной области применения кода, представленной выше. Поэтому цель настоящей работы ставится более узко: получить самосогласованную численную оценку распределения температуры и граничной теплоотдачи в расслоенном расплаве. Соответственно при численном моделировании принимались упрощения, основные из которых таковы:

плотности и начальное равновесное положение слоев расплава заданы изначально;

толщина корпуса берется малой и однородной вдоль границы.

### **3.1. Конфигурация расчетной области и параметры расплава**

Расчетная область показана на рис. 4. Сетка содержит ~18 000 четырехугольных ячеек. Рассмотрим сперва случай верхнего расположения металлического слоя. При подготовке данных выделяется две подобласти, отвечающие верхнему металлическому слою, который будем называть “сталь”, и оксидному слою, который по сложившейся терминологии будем называть “кориум” (внизу). Толщина стального слоя — 0,34 м, высота кориума — 0,95 м. Объемное тепловыделение мощностью 2 МВт/м<sup>3</sup> задано в оксидном слое. Константы материалов отвечали константам стали и кориума, для последнего бралось  $\lambda = 7$  Вт/мК в твердой фазе и  $\lambda = 12$  Вт/мК в жидкой,  $C_p = 500$  Дж/кгК. Плавление в модели Fluent'a происходит в интервале температуры солидус-ликвидус. Начальное условие задается однородной температурой  $T = 2650$  К и нулевыми скоростями. Модифицированное число Рэлея  $Ra$ , для кориума, оцениваемое по высоте оксидного слоя, составляет  $\sim 10^{14}$ . В расчетах использовалась модель турбулентности  $K$ - $\varepsilon$ .

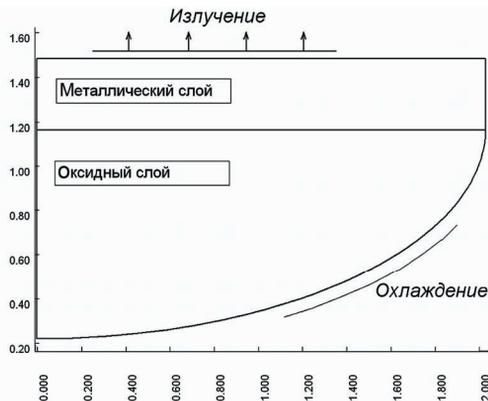


Рис. 4. Расчетная область

### 3.2. Моделирование границ

Свободная граница в расслоенной жидкости моделировалась двумя способами. В одном из них использовался метод VOF (Volume Of Fluid) с явным отслеживанием границы жидкостей. В другом способе граница бралась фиксированной, и решалась связанная задача для двух областей течения, сопряженных только по потоку тела или по температуре.

Плавление, изменение формы стенки корпуса, которая имеет толщину 0,2 м, явно не учитывались, и стенка в расчет не вводилась. Рассматривался случай охлаждаемой наружной боковой границы расплава. Охлаждение учитывалось через граничные условия.

При постановке граничных условий на боковой границе без учета плавления возникают трудности, связанные с существенным различием температур плавления кориума и стали. Наличие плавления в однородном расплаве естественным образом приводит к постановке изотермических граничных условий, связанных с появлением твердой корки на охлаждаемой внешней границе. Однако для расслоенного расплава место стыка трех границ является особенным, и в упрощенной постановке, без рассмотрения плавления корпуса, приходится вводить упрощения для моделирования этой области.

В описываемых расчетах принималось, что сталь и кориум могут плавиться и затвердевать, и образование корок происходило в процессе установления стационарного состояния. Граничное условие на боковой охлаждаемой границе области, положение точки на которой задано ее координатами  $x$ , бралось изотермическим:

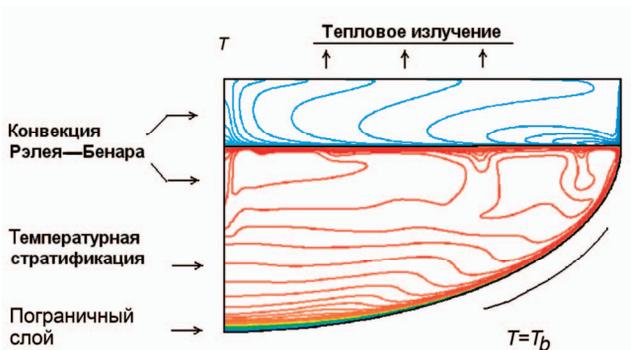
$$T(x) = T_c, \quad (4)$$

где граничная температура  $T_c$  отвечала принимаемой температуре плавления стали (1700 К). При образовании корки на границе кориума граничные условия на стыке “жидкое — твердое” также близки к изотермическим, при этом толщина корки невелика, а сама граница достаточно плавная. На верхней границе задавались условия излучения вида (3) на температуру  $T_b = T_c = 1700$  К с коэффициентом серости  $\varepsilon = 0,3$ .

Температура в оксидном слое на верхней границе со сталью устанавливается ниже солидуса кориума, поэтому там должна образовываться корка, которая может быть тяжелее жидкости. Однако, вопрос о том, устойчива ли эта корка на границе и какова может быть ее плотность, еще недостаточно исследован. В описываемых расчетах предполагается, что корка существует на границе слоев. В случае ее отсутствия (и присутствия на стенке) поток тепла в верхний слой должен быть более интенсивным, а теплоотдача верхнего слоя — выше.

### 3.3. Результаты расчетов и обсуждение

Квазистационарное распределение температуры приведено на рис. 5. Структура течения в расслоенном расплаве показана на рис. 4, где построены изолинии функции тока для расслоенного расплава с верхним положением металла и тепловыделяющим оксидным слоем внизу. Получаемая картина течения в области оксидного расплава — пограничные слои, температурная стратификация в областях с ламинарным режимом, турбулентная конвекция Рэлея — Бенара в верхних слоях — отвечает сложившимся представлениям [9].



*Рис. 5. Структура течения в расслоенной турбулентной ТВЖ*

На рис. 6 приведены профили потока теплоотдачи, построенные вдоль образующей боковой границы расплава начиная от осевой точки для

квазистационарного состояния. Профили приведены для двух указанных выше вариантов задания конфигурации слоев — свободной границы (“VOF”) и сопряженной задачи (“Сопряженная”). В обоих указанных вариантах температура на бесконечности в граничных условиях (3)  $T_b = 1700$  К. Различие между двумя профилями проявляется только в переходной области и формируется на начальной стадии образования корки между слоями в окрестности боковой границы. После этого для обоих случаев граница слоев становится фиксированной, а модели границы — физически эквивалентными (тепловое сопротивление корки между двумя слоями). Отметим, что модель VOF по численной реализации довольно сложна, и сходства получаемых численных решений могло не получиться по причинам вычислительного характера. Кроме того, на рис. 6 приведено распределение потока тепла для случая  $T_b = 0$ . Как видно, теплоотдача излучением может составлять заметную часть.

Отметим повышенную величину плотности потока у верхней границы расплава. Этот краевой эффект проявляется в разной степени во всех проведенных численных расчетах ТВЖ и связывается с характером течения. Детальное его исследование не проводилось.

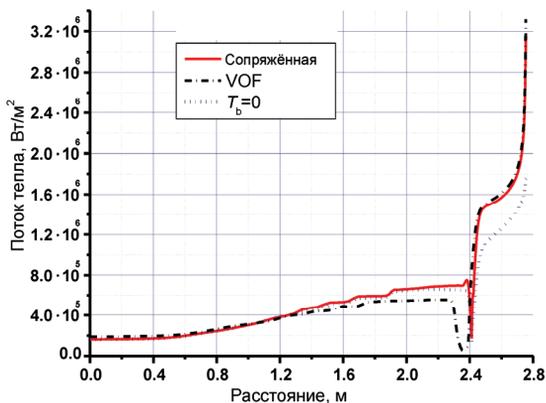


Рис. 6. Распределение нормального потока тепла на боковой границе области

### 3.4 Сравнение с полуэмпирической моделью теплоотдачи стального слоя

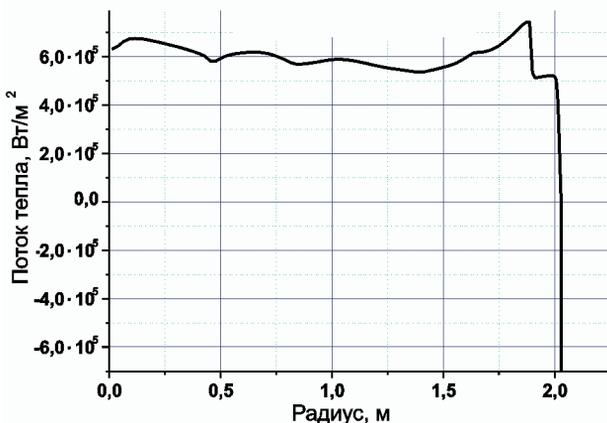
Поток тепла в металлический слой составляет 49% полного тепловыделения. Зная эту величину, можно провести сравнение с решением задачи для отдельного металлического слоя. Сравнение проведено по величине отно-

шения  $F_{sd}/F$  плотностей потоков тепла через боковую границу  $F_{sd}$  к плотности теплового потока через границу раздела  $F$  для двух значений объемного тепловыделения, которым отвечают два значения  $F$ . Аспектное отношение  $h/R = 0,167$  не менялось, и в этих расчетах температура  $T_b = 0$ . Результаты расчетов и сравнение с моделью плоского слоя приведены в табл. 1.

**Таблица 1. Результаты расчетов**

Полное тепловыделение, МВт	Средний поток через границу раздела, кВт/м <sup>2</sup>	Средний поток через боковую границу кВт/м <sup>2</sup>	$F_{sd}/F$	
			двухслойная модель	плоский слой
16	587	1215,000	2,082	2,012
32	1127	2,658	2,370	2,329

Некоторое отличие в величинах  $F_{sd}/F$  имеет систематический характер и может быть связано с затвердеванием кориума у боковой границы и связанной с этим нечеткостью задания границы областей двух жидкостей. Распределение потока на границе слоев однородно (рис. 7), но имеет нерегулярность у боковой границы расплава. В целом можно констатировать, что результаты по теплоотдаче отдельного слоя хорошо согласуются с численным решением для двухслойного расплава с нормальным расположением слоев.



*Рис. 7. Горизонтальное распределение потока тепла на границе слоев расплава в сопряженной задаче*

#### **4. Инверсное расположение слоев расплава**

Рассмотрим случай инверсного расположения слоев, когда тепловыделяющий оксидный слой расположен над металлическим. Свойства материалов, тепловыделение, граничные условия, начальные условия, численные модели брались в целом такими же, как в описанной выше постановке задачи для нормального расположения слоев, но со следующими модификациями и добавлениями.

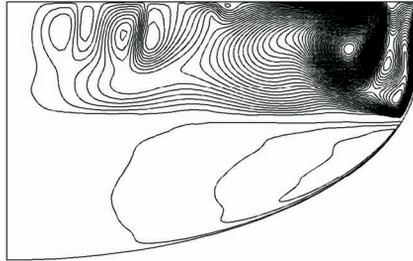
Полный объем и соотношение объемов слоев расплава сохранялись, но плотность металлического расплава, находящегося внизу, в этом расчете бралась выше, чем у кориума. В стационарном состоянии поток тепла в стальной слой в данном случае оказывается малым, и большая часть металла должна затвердеть. Соответственно задача решалась также в дополнительной постановке, в которой вместо условий 1-го рода (3) ставились условия 3-го рода на поток тепла:

$$F = H(x)(T - T_b) \quad (4)$$

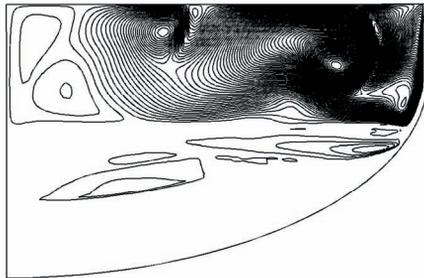
с коэффициентом теплоотдачи  $H(x)$ , который брался равным  $2 \text{ кВт/м}^2\text{К}$ . Это по тепловому сопротивлению эквивалентно наличию однородного стального корпуса толщиной около 10 мм. При этом граничная температура бралась равной 400 К.

Результаты приведены на рис. 8—10. На рис. 8 показаны линии тока для случая изотермической границы, которые дают представление о характере течения. В нижнем металлическом нетепловыделяющем слое тепловая циркуляция осуществляется за счет охлаждения верхней части металлического слоя, находящейся в пристеночной области, и стекания ее вниз по более холодной границе. В приосевой области расплав поднимается вверх и, протекая под горячим верхним слоем, нагревается, растекается по инерции к боковой границе и, встречая ее, поворачивает вниз, опять стекая по боковой стенке. В случае охлаждаемой стенки стальной слой в большей части затвердевает — в этой области (см. рис. 9) линии тока отсутствуют. Циркуляция в оставшемся расплаве стали сохраняется.

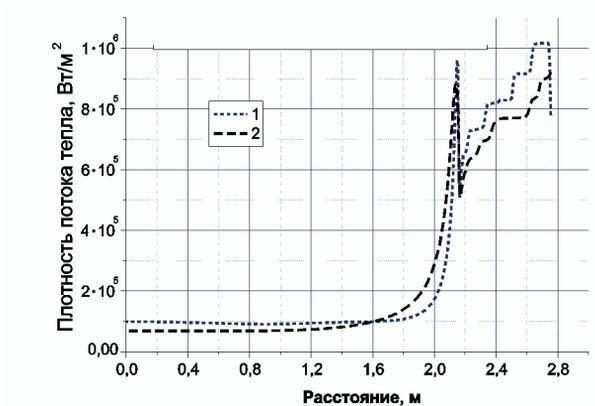
Распределение потока теплоотдачи вдоль боковой стенки приведено на рис. 10. Локальный максимум отвечает указанной точке контакта циркуляционного потока расплава с боковой стенкой. Максимальный поток тепла на боковой стенке приблизительно отвечает положению оксидного тепловыделяющего слоя. Доля тепла, идущая в металлический слой, составляет ~10% от полного тепловыделения.



*Рис. 8. Линии тока. Затвердевание в металлическом слое отсутствует*



*Рис. 9. Линии тока. Затвердевание в металлическом слое*



*Рис. 10. Поток тепла на боковой границе: 1 — без затвердевания стали снизу, граничная температура 1700 К; 2 — затвердевание стали*

## 5. Заключение

- Максимум потока тепла расслоенного расплава на боковую границу находится в области верхнего слоя — как металлического (в случае нормального расположения слоев), так и оксидного (в случае инверсного расположения слоев).
- Величина средней плотности стационарного потока тепла от стального слоя на боковой поверхности  $\sim 1,2$  МВт/м<sup>2</sup> при мощности остаточного тепловыделения 16 МВт близка к критической для кипения воды,  $\sim 1,5$  МВт/м<sup>2</sup>, и в максимуме превышает ее.
- Полученные результаты по распределению потоков теплоотдачи и сравнению с расчетами по модели плоского металлического слоя позволяют использовать последнюю для быстрых оценок плотности потока тепла в расслоенном расплаве.

Авторы выражают благодарность П. С. Кондратенко и В. Ф. Стрижову за ценное обсуждение постановки задач и результатов расчетов.

## Литература

1. Озрин В. Д., Тарасов О. В. Термодинамическая модель системы U-Zr-Fe-O. — Опубликовано в настоящем выпуске “Трудов ИБРАЭ”, с. 210—223.
2. Theofanous T. G. et al. In vessel coolability and retention of a core melt // Nuclear Eng. & Design. 1997. Vol. 169. P. 1—48.
3. Григорук Д. Г., Кондратенко П. С. Эффект фокусировки в теплоотдаче многокомпонентной жидкости с внутренними источниками тепла // ТВТ. 2001. Т. 39. № 1. С. 161—162.
4. Bittermann D., Fischer M., Nie M. Main features of the core melt stabilization system of the european pressurized water reactor (epr) // 18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 18), Beijing, China, August 7—12, 2005.
5. Вопросы безопасности АЭС в ВВЭР: Труды научно-практического семинара. СПб., 12—14 сентября 2000 г.
6. Fluent 6.2 User's Guide / Fluent. Inc. Lebanon, 2005.
7. Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984.
8. Филиппов А. С. Численное моделирование экспериментов по теплоотдаче жидкости с объемным энерговыделением (код *Fluent*) // Труды 4-й Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-IV), Москва, МЭИ, 2006.
9. Большой Л. А., Кондратенко П. С., Стрижов В. Ф. Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости // УФН. 2001. 171. № 10. P. 1051—1070.

# **Х. Численное моделирование высокочастотной магнитной гидродинамики в задачах разогрева и плавления кориума**

*В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Н. Семенов, В. Ф. Стрижов*

## **1. Введение**

Исследование влияния высокочастотной магнитной гидродинамики (ВМГД) на процесс разогрева и плавления кориума имеет большое значение для различных отраслей промышленности: атомной энергетики, машиностроения, металлургии, поскольку интенсивное развитие народного хозяйства требует отыскания новых путей получения высококачественной продукция, повышения производительности промышленных установок, более широкого внедрения в практику новых технологических процессов.

В машиностроении рациональное управление процессом индукционной закалки позволяет добиваться высокой прочности изделий из углеродистой стали и экономии легирующих элементов.

В металлургии различные способы выращивания монокристаллов, получение металлов и полупроводников методом бестигельной зонной плавки, плавка металлов во взвешенном состоянии, процессы кристаллизации, транспортировка жидких металлов требуют создания определенных условий для их наиболее благоприятного протекания, а также применения целенаправленного управляемого воздействия на гидродинамические, тепловые, химические, диффузионные процессы в расплавах и т. д.

Поэтому изучение поведения нагретого жидкого расплава в различных физических условиях и способов воздействия на него имеют большое значение для осуществления технологического процесса. Немаловажную роль здесь играет исследование возникающей во многих процессах проблемы устойчивости течений, равновесных конфигураций жидкого расплава, изучение поведения границ раздела жидкой и твердой фаз расплава, исследование различных видов неустойчивости.

Неустойчивости, возникающие при некоторых критических значениях параметров и обусловленные наличием в среде возмущающих воздействий, часто значительно снижают эффективность технологического процесса, а иногда делают его осуществление невозможным. Например, развитие

свободной конвекции в жидком расплаве при определенных условиях приводит к нежелательным деформациям фронта кристаллизации в задачах выращивания монокристаллов. Магнитная подвеска расплава при зонной плавке не находит широкого применения, по-видимому, из-за развития гидродинамических неустойчивостей в жидкой фазе [1—3]. Проблема удержания металла магнитным полем при плавке во взвешенном состоянии [4, 5] значительно усложняется в результате развития магнитогиродинамических неустойчивостей и разрушения равновесной конфигурации жидкого металла. С другой стороны, естественная и вынужденная конвекции в жидкой фазе в процессах зонной плавки, выращивания монокристаллов, кристаллизации приводят к перемешиванию расплава и тем самым способствуют повышению однородности структуры и распределения примесей в отливке [2, 3, 6, 7]. Неустойчивость ламинарного течения металла в бегущем магнитном поле может быть использована для более интенсивного его перемешивания, а неустойчивость струи жидкого металла — в целях разбрызгивания струи [8].

Таким образом, возникает задача исследования роли гидродинамических, тепловых, магнитогиродинамических неустойчивостей в различных промышленных процессах (металлургии, машиностроении и т. д.) и способов их подавления или принудительного развития. Расплав является, как правило, электропроводящей средой, поэтому один из наиболее широко применимых к нему способов воздействия — электромагнитный.

Электромагнитные поля могут быть использованы в различных целях. Например, в металлургии:

- 1) как средство интенсификации процессов тепло- и массообмена в расплаве, что позволяет сократить время приготовления металла, улучшить его качество и увеличить объем (электромагнитное перемешивание и управление циркуляцией, возбуждение колебаний в расплаве в процессе кристаллизации с помощью переменных и бегущих полей);
- 2) как средство осуществления новых технологических процессов (электромагнитной разливки и транспортировки жидких металлов, штамповки, формовки, сварки, плавки металлов во взвешенном состоянии);
- 3) в качестве информационных средств и управляющих воздействий для управления различного рода явлениями, связанными с магнитогиродинамическими и тепловыми неустойчивостями, неустойчивостями границ фазового перехода в процессах МГД-технологии.

Роль магнитогиродинамических, тепловых неустойчивостей в процессах МГД-технологии и способы их стабилизации менее всего освещены в литературе, хотя исследованию влияния электромагнитных полей на устойчивость течений, развитию тепловой гравитационной конвекции в жидком металле посвящено достаточно много работ [9, 10]. Электромагнитные поля в данном случае рассматриваются как заданное внешнее воздейст-

вие, не связанное непосредственно с развивающимися возмущениями. Такой подход к решению задач подавления неустойчивостей не всегда приводит к желанной цели.

Поэтому в последнее время получил распространение подход, связанный с пространственно-распределенным управлением процессами, — одновременное управление электромагнитными и тепловыми полями. Исследования показали, что наиболее полную картину дает численное решение полных нелинейных уравнений магнитной гидродинамики. Такие решения в настоящее время представляют интерес в связи с применением индукционных устройств большой мощности, в частности в металлургии, поскольку эти решения учитывают существенную зависимость электромагнитных процессов от движения металла.

Необходимость в численном моделировании ВМГД при разогреве и плавлении расплава кориума обусловлена потребностями экспериментальных и численных исследований, проводимых в поддержку мер по удержанию расплавленных материалов активной зоны на днище корпуса легководного реактора. Ниже будут представлены постановка задачи и методы решения, которые могут быть использованы не только для целей атомной энергетики, но и для исследования технологических процессов в металлургии и машиностроении.

## **2. Физическая постановка задачи**

Рассматривается задача высокочастотной магнитной гидродинамики при разогреве и плавлении расплава кориума, объединяющая в себе магнитную гидродинамику и теплообмен.

В вольфрамовом стакане находится порошок одной из урановых солей. Стакан, в свою очередь, помещен внутрь соленоида, ось которого совпадает с осью стакана. По обмотке соленоида пропускается переменный ток таким образом, что содержащаяся внутри него система индукционно нагревается до высоких температур (температур плавления стакана).

Теплопроводность и проводимость стакана в первом приближении линейно зависят от температуры. Зависимость теплопроводности и проводимости содержимого стакана (порошка) от температуры является нелинейной.

Моделирование проведено в предположении, что в бесконечном по оси  $Z$  соленоиде расположен коаксиальный двухслойный цилиндр, нагреваемый за счет индукционных токов. Для описания процесса используется модель, записанная в предположении аксиальной симметрии, когда все физические поля зависят только от радиуса. Теплообменом стакана с окружающей средой пренебрегаем.

### 3. Математическая постановка задачи

Поскольку рассматриваемая задача объединяет в себе магнитную гидродинамику и тепломассообмен, для моделирования МГД-процессов следует использовать модели, основанные на согласованном решении уравнений Навье — Стокса, законов Максвелла и Ома, а также уравнений тепломассопереноса.

#### 3.1. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла для рассматриваемой задачи в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} H &= j + \frac{\partial D}{\partial t}, \\ \operatorname{div} D &= \bar{\rho}, \\ \operatorname{div} B &= 0, \\ D &= \varepsilon_0 \varepsilon E, \quad B = \mu_0 \mu_p H.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь  $E$  и  $H$  — векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно;  $D$  — электрическая индукция;  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $B$  — магнитная индукция;  $\mu_p$  — относительная магнитная проницаемость среды;

$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} = 8,854187818 \cdot 10^{-12} \text{ с}^4 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-3} (\text{Ф} \cdot \text{м}^{-1})$  — диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2} (\text{Г} \cdot \text{м}^{-1})$  — магнитная проницаемость свободного пространства;  $\bar{\rho}$  — плотность электрического заряда;  $j$  — плотность электрического тока. Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  между параметрами  $E$  и  $j$  называется проводимостью, и  $j = \sigma E$ .

Учитывая приближенный характер задания параметров материала, токами смещения в уравнениях Максвелла (3.1) можно пренебречь. В этом случае система уравнений (3.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial \mu_0 \mu_p H}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} H &= j, \\ \operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon E) &= 0, \\ \operatorname{div}(\mu_0 \mu_p H) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Представим напряженность магнитного поля как

$$\vec{H} = \{0, 0, H(r, t)\}, \quad H = H_0 e^{i\omega t},$$

где  $H_0$  — медленно меняющаяся со временем амплитуда колебаний. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial H_0}{\partial r} e^{i\omega t} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{\operatorname{rot} \vec{H}}{\sigma},$$

и из (3.2) имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_0}{\partial r} \right) = \frac{\partial(\mu_0 \mu_p H_0)}{\partial t} + i\omega \mu_0 \mu_p H_0. \quad (3.3)$$

В уравнении (3.3) учтем, что вектор напряженности магнитного поля представляет собой сумму действительной и мнимой частей, а именно  $H_0 = u + iv$ , тогда получим окончательную систему из двух уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= -\omega \mu_0 \mu_p v + \frac{\partial \mu_0 \mu_p u}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma} \frac{\partial v}{\partial r} \right) &= \omega \mu_0 \mu_p u + \frac{\partial \mu_0 \mu_p v}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения замыкаются соответствующими граничными условиями: на внешней границе  $u = u_0$  и  $v = 0$ .

В случае неоднородного по высоте кориума задача становится двумерной. В предположении осесимметричности задача может быть сведена к скалярному уравнению для векторного потенциала  $A$ , который имеет только азимутальную компоненту.

Уравнение для потенциала может быть получено из уравнения распределения поля

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H'}{\partial r} \right) \text{ подстановкой } A = \text{rot} H :$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} (\text{rot rot } A) = \frac{1}{\sigma} \Delta^* A.$$

В цилиндрической системе для азимутальной компоненты  $A$  уравнение имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \Delta^* A = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (Ar)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right).$$

Для задачи с периодическими условиями разделяем потенциал на действительную и мнимую части  $A_1$  и  $A_2$ , получаем два следующих уравнения:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \Delta^* A_1 - \omega A_2,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \Delta^* A_2 + \omega A_1.$$

### 3.2. Уравнения Навье — Стокса

Для моделирования исследуемых течений используются несжимаемые многомерные уравнения Навье — Стокса в естественных переменных в приближении Буссинеска для плавучести в ортогональных криволинейных координатах совместно с уравнением конвекции/диффузии для температуры:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} - \text{div}(\mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{v}) + \text{grad } p = \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \tilde{C}(\mathbf{v})h - \text{div}(k \text{ grad } T) = q, \quad h = \int_0^T c^{\text{eff}}(\xi) d\xi. \quad (3.6)$$

В уравнения включена скрытая теплота плавления через эффективную теплоемкость, определяемую согласно соотношению

$$c^{\text{eff}} = \begin{cases} c + L\delta(T - T^*) & \text{— чистые материалы,} \\ c + L \frac{d\Phi}{dT} & \text{— сплавы.} \end{cases}$$

Кроме того, используются следующие обозначения:  $p$  — давление, нормализованное на плотность;  $L$  — скрытая теплота плавления;  $\delta$  — дельта-функция;  $T^*$  — температура плавления;  $\Phi$  — доля твердой фазы;  $C$  и  $\tilde{C}$  — операторы для разных форм записи конвективных слагаемых.

Источник  $q$  в уравнении для температуры представляет собой Джоулев нагрев токами внутри кориума:

$$q = \frac{|j|^2}{2\sigma} = \frac{\{J_1^2 + J_2^2\}}{2\sigma} = \frac{1}{2\sigma} \left\{ \left( \frac{\partial H_1}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_2}{\partial r} \right)^2 \right\}.$$

Коэффициент 0,5 при джоулевом нагреве учитывает, что это амплитудное значение высокочастотного тока,  $\sigma$  обозначает проводимость среды.

Источник  $f$  в уравнении движения представляет собой пондеромоторные электромагнитные силы, действующие на электрические заряды и токи, протекающие в рассматриваемой среде;  $f = j \times B$ .

## **4. Вычислительная методика**

С учетом рассматриваемой проблемы основные моменты алгоритма решения, развитого в [11 — 13] и включенного в представляемый подход, таковы:

- дискретные аппроксимации строятся с использованием конечно-разностных методов и разнесенных сеток;
- для построения неявной схемы для нестационарных уравнений гидродинамики применена операторная схема расщепления Дугласа — Рэкфорда (подобная SIMPLEX-методу);
- при конструировании временной интеграционной схемы для уравнения энергии его операторы расщепляются на две части, связанные с энтальпией и температурой соответственно.

Результатом расщепления является следующая двухшаговая процедура:

$$\frac{h^{n+1/2} - h^n}{\tau} + \tilde{C}(\mathbf{v}^n) h^{n+1/2} = 0, \quad \frac{h^{n+1} - h^{n+1/2}}{\tau} - \tilde{N} T^{n+1} = 0. \quad (4.1)$$

В уравнении движения операторы также расщепляются на две части. Первая часть связана со скоростным переносом конвекцией/диффузией, которая в линеаризованном виде записывается как  $A_1 = C(\mathbf{v}^n) + N$ , вторая часть связана с градиентом давления  $A_2 = \text{grad}$ . Следует подчеркнуть, что операторы градиента и дивергенции являются сопряженными друг другу, т. е.  $A_2^* = -\text{div}$ .

Анализируемая аддитивная схема расщепления является схемой типа Дугласа — Рэкфорда и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^n}{\tau} + A_1 \mathbf{v}^{n+1/2} + A_2 p^n &= \mathbf{f}^n, \\ \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} + A_1 \mathbf{v}^{n+1/2} + A_2 p^{n+1} &= \mathbf{f}^n, \\ A_2^* \mathbf{v}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Численная реализация этой схемы выполнена как предиктор-корректор-процедура, подобно SIMPLEC-алгоритму, а именно: введение поправки давления  $\delta p = p^{n+1} - p^n$  в два последних уравнения (4.2) позволяет получить известное уравнение Пуассона и уравнение для коррекции скорости вида

$$\text{div}_h \text{grad}_h \delta p = \frac{1}{\tau} \text{div}_h \mathbf{v}^{n+1/2}, \quad \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1/2} - \tau \text{grad}_h \delta p. \quad (4.3)$$

Вычисления [13] показывают, что предпочтительнее использовать эту схему, чем другие подобные ADI-схемы, например, схемы типа Писмэна — Рэкфорда.

Для работы с нерегулярными сложными вычислительными областями применяется метод фиктивных областей (МФО). В вычислительной математике существуют два варианта этого метода [14]: с продолжением по младшим производным и с продолжением по высшим производным. Оба подхода используются для предсказания динамики жидкости с учетом фазовых превращений [15, 16]. Мы применяем первый вариант, который в физическом смысле можно трактовать как включение в уравнения Навье — Стокса (3.5) модели пористой среды:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \tau} + C(v_\varepsilon)v_\varepsilon - \operatorname{div}(v \operatorname{grad} v_\varepsilon) + \operatorname{grad} p + c_\varepsilon v_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0. \quad (4.4)$$

Различные формулы  $c_\varepsilon$  могут использоваться для термина сопротивления потока в вышеупомянутых уравнениях. Например, ступенчатая функция для резкого переключения процесса, линейный Дарси и т. д., см. [15 — 17]. Для соотношения (4.4) модифицированная предиктор-корректор-процедура для схемы Дугласа — Рэкфорда имеет вид

$$\frac{v_\varepsilon^{n+1/2} - v_\varepsilon^n}{\tau} + A_1 v_\varepsilon^{n+1/2} + A_2 p_\varepsilon^n + c_\varepsilon(x) v_\varepsilon^{n+1/2} = f^n, \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div}_h \left( \frac{1}{1 + \tau c_\varepsilon} \operatorname{grad}_h \delta p_\varepsilon \right) = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h v_\varepsilon^{n+1/2}, \quad (4.6)$$

$$v_\varepsilon^{n+1} = v_\varepsilon^{n+1/2} - \frac{\tau}{1 + \tau c_\varepsilon} \operatorname{grad}_h \delta p_\varepsilon.$$

Полностью неявная схема используется для нестационарного уравнения теплопроводности.

Для решения задачи конвекции в (4.1) развита монотонная нелинейная регуляризованная операторная схема расщепления [18].

В (4.2) используется специальная аппроксимация конвективных слагаемых  $C(v)$  для получения дискретного конвективного оператора, который является кососимметричным и не дает вклада в кинетическую энергию (т. е. является энергетически нейтральным):

$$C(v)v = \frac{1}{2} [(v, \operatorname{grad})v + \operatorname{div}(vv)]. \quad (4.7)$$

Схема обеспечивает второй порядок по пространству и первый по времени. Алгоритм устойчив при достаточно больших шагах интегрирования по времени. Полученные сеточные эллиптические уравнения решаются на каждом временном слое итерационным методом сопряженных градиентов с предобуславлителем: ICCG для симметричной матрицы и ORTHOMIN (1) для несимметричной матриц.

Для решения уравнения давления развит быстрый алгоритм, основу которого составляют модифицированный метод Ричардсона с предобуславлителем (ММРП) и быстрое преобразование Фурье (БПФ). Итерации ММРП могут быть записаны как  $P(x^{k+1} - x^k) = \alpha r^k$ , где  $\alpha$  — параметр ускорения, отличный от 0;  $P$  — предобуславливатель, симметричный и больше 0.

Пусть задано начальное приближение  $x^0$ , сначала находится начальная невязка  $r^0 = b - Ax^0$ , а затем выполняется следующая последовательность действий:

$$\begin{cases} Pz^k := r^k, \\ x^{k+1} := x^k + \alpha z^k, \\ r^{k+1} := r^k - \alpha Az^k. \end{cases}$$

Оптимальная величина параметра  $\alpha$ , при котором достигается сходимость метода,

$$\alpha = \alpha^* = \frac{2}{\eta_{\min} + \eta_{\max}},$$

а  $\eta_{\min}$  и  $\eta_{\max}$  — минимальное и максимальное собственные значения матрицы  $P^{-1}A$  и  $A^T = A > 0$ .

Ошибка оценивается с помощью соотношения

$$\left| e^k \right|_P \leq \left( \frac{c-1}{c+1} \right)^k \left| e^0 \right|_P, \quad c = \frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}},$$

в норме  $\left| \cdot \right|_P$  со скалярным произведением

$$\begin{aligned} (u, v)_P &:= (Pu, v), \\ \left| u \right|_P &:= \sqrt{(u, u)_P}, \\ \forall u, v &\in R^n. \end{aligned}$$

Данный алгоритм решения уравнения давления дает более чем 50-кратное ускорение в сравнении со стандартным методом сопряженных градиентов с предобуславливателем.

## 5. Результаты расчетов

В этом разделе представлены:

- Результаты расчетов тестовой задачи для верификации изложенного выше подхода.

- Результаты численного моделирования высокочастотной магнитной гидродинамики при разогреве и плавлении кориума. Решение данной задачи обусловлено потребностями экспериментальных и численных исследований, проводимых в поддержку мер по удержанию расплавленных материалов активной зоны на днище корпуса легководного реактора.

## 5.1. Расчеты для тестовой задачи

В этом подразделе представлены результаты для задачи индукционного нагрева цилиндра радиусом  $R$ , равным 0,1 м. Электропроводность среды  $\sigma$  в этой тестовой задаче задавалась с учетом соотношения  $\mu_0\sigma = 1$ .

Частота тока  $\omega$  в расчетах полагалась равной  $10^6$ . Исследовался эффект вытеснения переменного электрического тока и электромагнитного поля из толщи проводника на его поверхность (скин-эффект).

Известно, что распределение плотности переменного тока по сечению проводника зависит от частоты тока и определяется глубиной проникновения тока  $d$  (толщина скин-слоя). Для проводника с удельной электропроводностью  $\sigma$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  толщина скин-слоя определяется согласно [19] как

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}.$$

Если  $d \ll R$ , то зависимость плотности тока  $j$  от расстояния  $x$  до оси проводника вычисляется по формуле [19]

$$j = j_0 e^{-\frac{R-x}{d}},$$

где  $j_0$  — значение плотности тока вблизи поверхности проводника. Отсюда видно, что в случае  $d \ll R$  значение плотности тока быстро (по экспоненте) уменьшается вглубь проводника, и фактически весь ток переносится небольшим приповерхностным слоем толщиной  $d$ .

На рис. 1 представлена картина распределения мощности тепловыделения  $p$  по радиусу проводника в результате индукционного нагрева. Изображаемая величина  $p$  связана с плотностью тока  $j$  соотношением

$$p = \frac{1}{2\sigma} (j)^2.$$

Это означает, что если значение плотности тока уменьшается по экспоненте вглубь проводника, то значение мощности  $p$  в случае  $d \ll R$

уменьшается по закону  $e^2$  в глубь проводника. Что мы и наблюдали в расчете, поскольку толщина скин-слоя  $d \ll R$ , где  $d = 1,4 \cdot 10^{-3}$  и  $R = 0,1$ .

Фактически весь ток переносится небольшим приповерхностным слоем толщиной  $d$ , что хорошо согласуется с теорией и позволяет говорить об адекватном моделировании процессов с помощью представленной выше вычислительной методики.

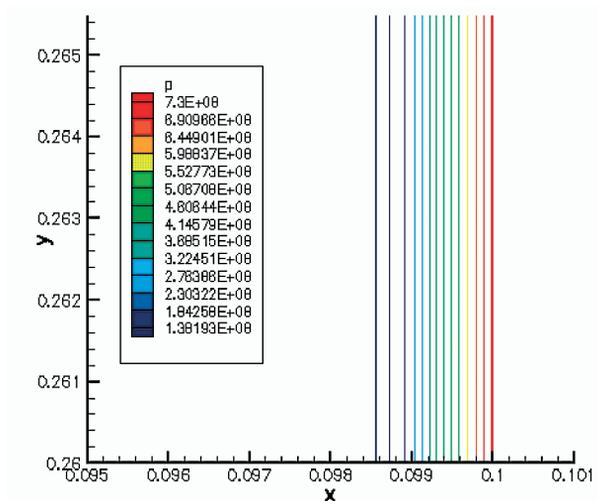


Рис. 1. Распределение мощности тепловыделения  $p$  по радиусу проводника

## 5.2. Результаты численного моделирования ВМГД при разогреве и плавлении кориума

В этом подразделе представлены результаты численного моделирования ВМГД при разогреве и плавлении топливных масс в результате индукционного нагрева с частотой 60 кГц в стакане с металлической вставкой.

Исходными данными для расчетов являлись график относительной вкладываемой мощности и график изменения температуры.

Искомymi параметрами были граничные условия для магнитного поля, температурная зависимость коэффициента проводимости и граничные условия на правой внешней стенке.

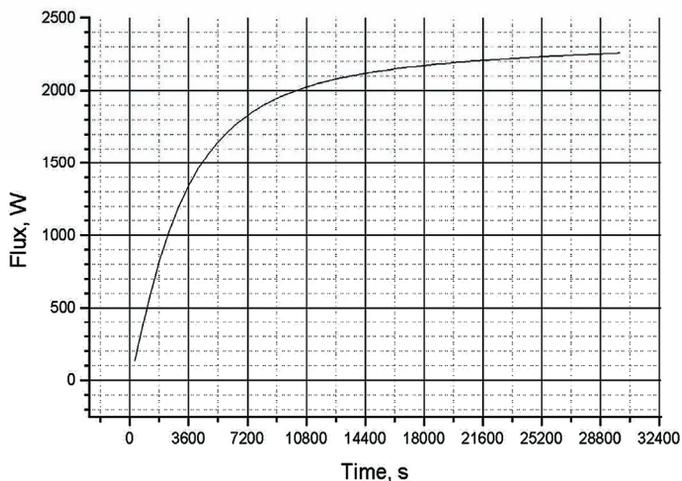
Методом прямого двумерного моделирования решалась обратная задача с тремя неизвестными параметрами.

Далее представлены два варианта расчетов с разными коэффициентами теплопередачи  $h$ : 1)  $h = 100$ ; 2)  $h = 50$ .

Все расчеты производились по схеме:

- поток на правую границу;
- вкладываемая в металлическую вставку мощность;
- суммарная вкладываемая мощность;
- максимальная температура в виде изотерм;
- линии уровня тепловыделения в результате индукционного нагрева топливных масс.

На рис. 2—7 представлены результаты для варианта 1, на рис. 8—13 — результаты для варианта 2.



*Рис. 2. Поток на правую границу*

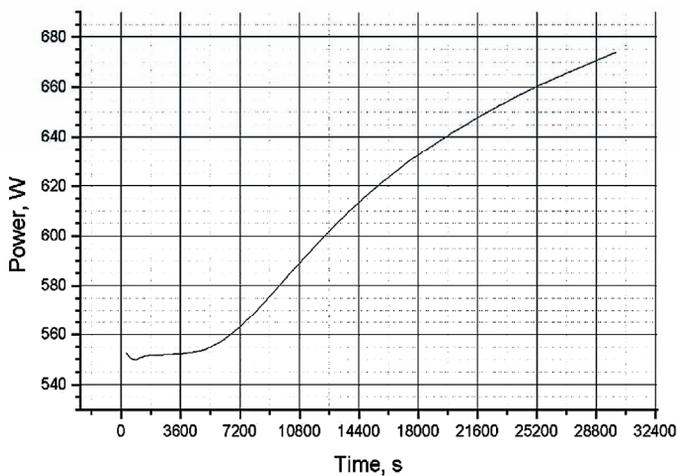


Рис. 3. Мощность, вкладываемая в вольфрам

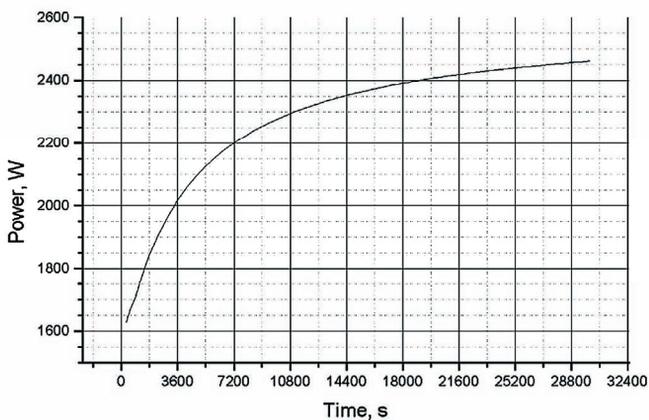
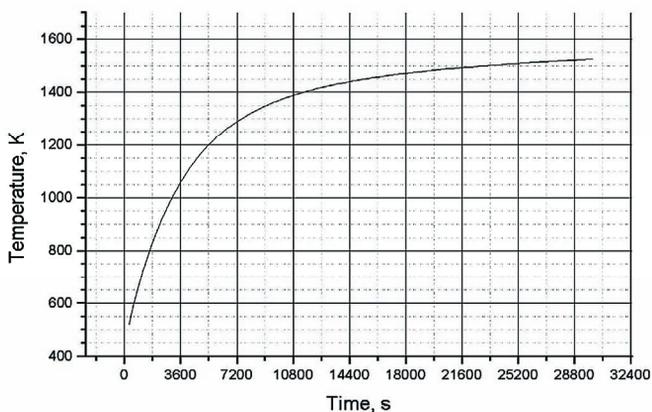
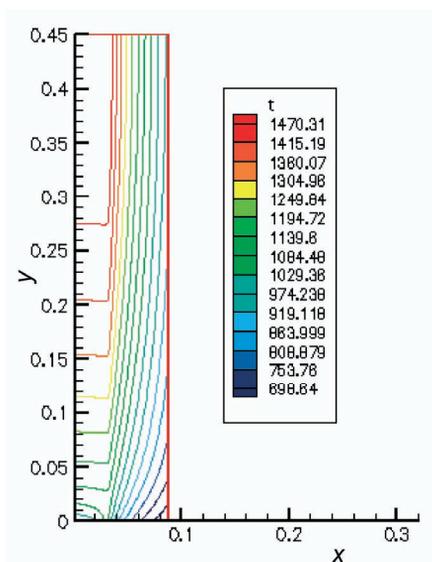


Рис. 4. Суммарная вкладываемая мощность



*Рис. 5. Максимальная температура*



*Рис. 6. Изотермы в диапазоне от минимума до максимума*

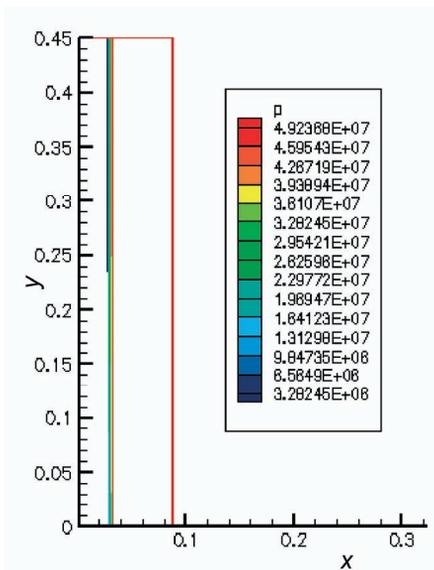


Рис. 7. Уровни тепловыделения вследствие индукционного нагрева корпуса

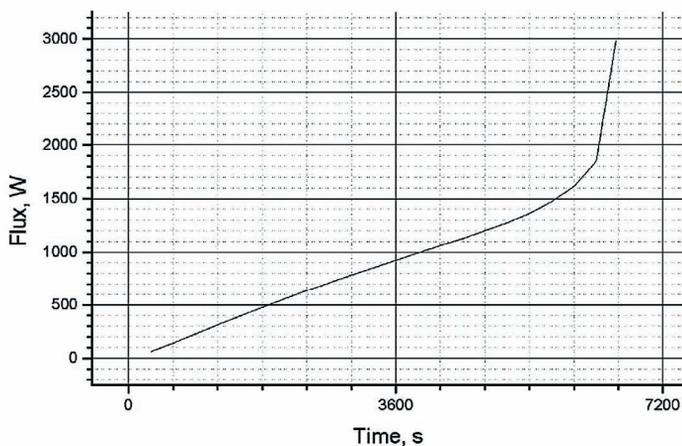
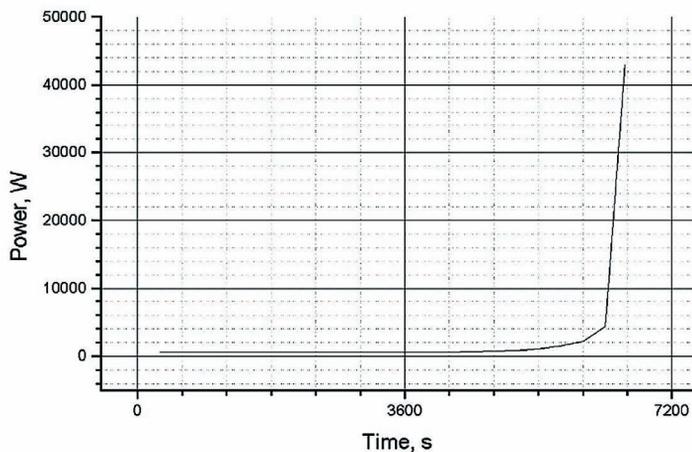
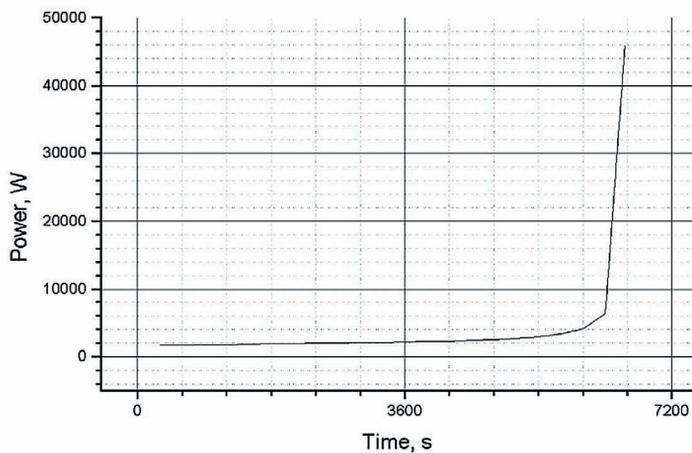


Рис. 8. Поток на правую границу



*Рис. 9. Мощность, вкладываемая в вольфрам*



*Рис. 10. Суммарная вкладываемая мощность*

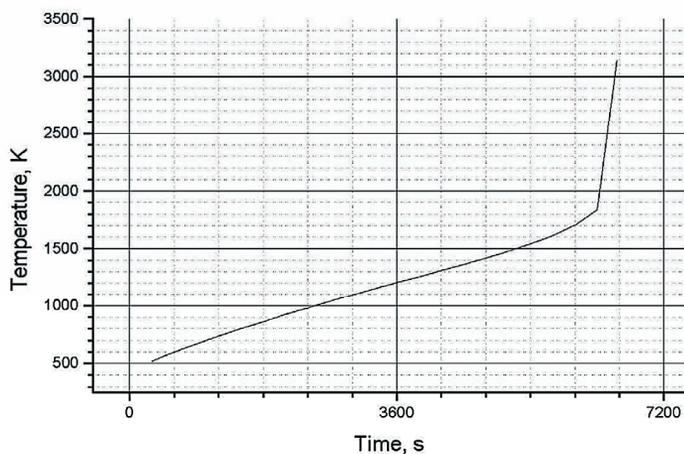


Рис. 11. Максимальная температура

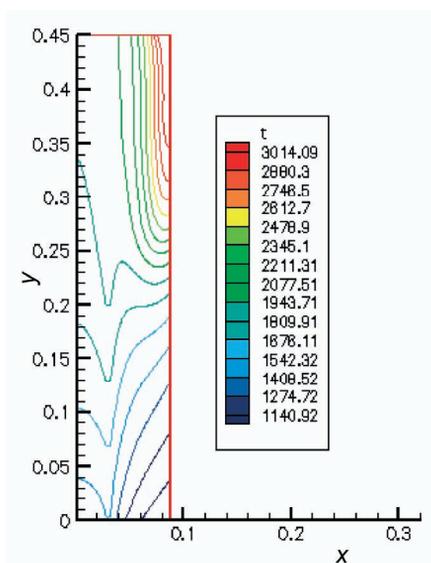
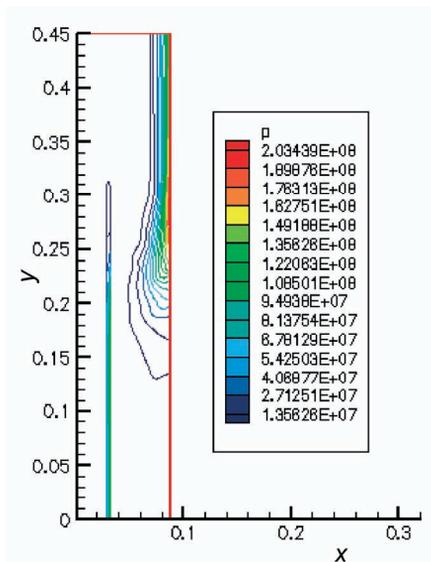


Рис. 12. Изотермы в диапазоне от минимума до максимума



*Рис. 13. Уровни тепловыделения вследствие индукционного нагрева кору́ма*

## **6. Заключение**

1. Разработана методика численного моделирования высокочастотной магнитной гидродинамики при разогреве и плавлении расплава топливных масс.
2. Методика тестирована на тестовой проблеме по индукционному нагреву цилиндра радиусом  $R$ , равным 0,1 м. Результаты расчетов хорошо согласуются с теорией.
3. Методика применена для численного моделирования высокочастотной магнитной гидродинамики при разогреве и плавлении топливных масс. Результаты моделирования говорят об адекватном выборе модели, а разработанные новые эффективные алгоритмы решения проблем вычислительной динамики жидкости позволяют ускорить численные расчеты в десятки раз по сравнению с общепринятыми методами.
4. Универсальный характер методики позволяет использовать ее для исследования технологических процессов в металлургии и машиностроении.

## Литература

1. Pfann W. G., Hagelbarger D. W. // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27, № 1.
2. Пфанн В. Зонная плавка. М.: Мир, 1970.
3. Ратников Д. Г. Бестигельная зонная плавка. М.: Metallurgy, 1976.
4. Фогель А. А. Индукционный метод удержания жидких металлов во взвешенном состоянии. Л.: Машиностроение, 1979.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966.
6. Повх И. Л., Капуста А. Б., Чекин Б. В. Магнитная гидродинамика в металлургии. М.: Metallurgy, 1974.
7. Сокунов Б. А., Кривонощенко И. А., Прудников Ю. С., Резин М. Г. Влияние электромагнитного перемешивания на структуру слитков при полунепрерывной отливке // Магнит. гидродинамика. 1977. № 3.
8. Гельфгат Ю. М., Лиелаусис О. А., Щербин Э. В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига: Зинатне, 1976.
9. Герцуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
10. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
11. Chudanov V. V., Aksenova A. E., Churbanov A. G. et al. Numerical Methods for Solving of Diffusion/Convection Problem with Regard of Melting Using a Fictitious Domain Procedure // Book of Abstracts of 16<sup>th</sup> Intern. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Arcachon, France, 6—10 July 1998.
12. Chudanov V. V., Churbanov A. G., Pavlov A. N., Vabishchevich P. N. Operator-splitting schemes for the incompressible Navier-Stokes equations with consistent approximation of operators // Book of Abstracts of Conf. on Computational Model. and Computing in Physics, 16—21 September, 1996. Russia, Dubna / Eds. E. P. Zhidkov et al. P. 54.
13. Chudanov V. V., Aksenova A. E., Pervichko V. A. et al. Current Status and Validation of CONV2D&3D code. Proc. OECD/CSNI WORKSHOP ON IN-VESSEL CORE DEBRIS RETENTION AND COOLABILITY, 3–6 March, 1998, Germany, Garching, Nuclear Energy Agency // NEA/CSNI/R (98) 1999. 18. P. 223—235.
14. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
15. Basu B., Date A. W. 1988. Numerical modeling of melting and solidification problems: A review // Sadhana. 1988. № 13. P. 169—213.
16. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. et al. Numerical simulation of convection/diffusion phase change problems : A review // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1993. № 36. P. 4095—4106.

*Х. Численное моделирование высокочастотной магнитной гидродинамики  
в задачах разогрева и плавления коруума*

*В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Н. Семенов, В. Ф. Стрижов*

---

17. *Brent A. D., Voller V. R., Reid K. J.* Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal // *Numerical Heat Transfer*. 1988. № 13. P. 297—318.
18. *Chudanov V., Pervichko V., Samarskii A., Vabishchevich P.* Non-linear regularized difference schemes for multidimensional advection equations // *J. of Computing Mathematics and Mathematical Physics*. 2000. 40 (6). P. 900—907.
19. *Дубровский И. М., Егоров Б. В., Рябошапка К. П.* Справочник по физике. Киев: Наук. думка, 1986.

# XI. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса в стратифицированном расплавленном пуле

*В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Ф. Стрижов*

## 1. Введение

В рамках проекта МАСКА была проведена серия экспериментов на солевой установке РАСПЛАВ с двухслойной жидкостью. Солевая установка РАСПЛАВ была сконструирована подобно коридорной установке и представляла собой слайс-геометрию с характерным радиусом полукруглого сечения 200 мм. Тестовая стенка толщиной 20 мм охлаждалась вторичной смесью солей и была снабжена термопарами, которые позволяли измерять температуру и поток тепла через нее. Кроме того, перемещающаяся рамка с многочисленными термопарами дала возможность измерять температуру по всему объему расплава и граничным слоям.

Цели экспериментов:

- Моделирование фокусинг-эффекта теплового потока, когда нагревание верхнего слоя происходит вследствие конвективного теплопереноса от основания объема. Рассматривались две возможные ситуации: с наличием и отсутствием верхней корки. Для первого случая конвективная картина в верхнем слое не была связана с конвекцией в нижнем слое. Второй случай демонстрировал согласованную конвекцию в обоих слоях.
- Изучение фокусинг-эффекта как функции безразмерных чисел, таких как число Био  $Bi$  и числа Нуссельта  $Nu_{up}$ ,  $Nu_{sd}$ .
- Проверка корреляций для восходящего и нисходящего теплопереноса при разных граничных условиях на верхней поверхности объема (от изотермических до почти адиабатических).

В статье приведены результаты посттестовых численных предсказаний для проекта МАСКА и их анализ.

## 2. Экспериментальные результаты

### 2.1. Тестовая матрица

Тестовая матрица включала в себя 17 различных квазистационарных режимов конвекции. Разные режимы достигались путем варьирования следующих параметров: мощности нагрева нижнего объема, температуры охлаждающей соли, температуры верхнего теплообменника.

Расплав соли, формирующий нижний объем, был представлен соединением LiF-NaF-ZrF<sub>4</sub> с температурой плавления 558°C, в то время как для верхнего объема использовалась соль LiF-NaF-KF с температурой плавления 454°C.

Разница в точках плавления обеих солей была достаточно велика (104°C), что позволяло моделировать особенности в теплообмене.

Матрица экспериментов приведена в табл. 1, где указано наличие корки на охлаждаемых поверхностях и границе раздела между нижним и верхним солевыми объемами.

Таблица 1. Экспериментальные режимы

Reg. #	$Q_{in}, W$	$T_{sd}, ^\circ C$	$T_{sur}, ^\circ C$	Lower pool crust		Upper pool crust	
				Top	Bottom	Top	Side
1	852,83	620	543	N	N	N	N
2	1767,60	597	503	N	N	N	N
3	1825,00	555	448	N	Partial	N	N
4	1142,30	529	422	N	Y	N	N
5	1096,80	483	347	Y	Y	N	N
6	894,30	430	313	Y	Y	Y	Y
7	819,87	436	305	Y	Y	Y	Y
8	1221,92	372	245	Y	Y	Y	Y
9	1211,49	374	307	Y	Y	Y	Y
10	1807,91	401	261	Y	Y	N	Y
11	1970,32	413	381	Y	Y	N	Y
12	2313,30	431	449	Y	Y	N	Y
13	2926,94	455	477	Y	Y	N	Y
14	4565,00	500	525	N	Y	N	N
15	3939,15	446	487	Y	Y	N	Y
16	3636,89	422	233	Y	Y	N	Y
17	5060,46	433	295	N	Y	N	N

## **2.2. Конвективный режим в нижнем объеме**

Эксперименты были выполнены при боковом нагреве нижнего объема в широком диапазоне характерных параметров, таких как число  $Ra'$  при условиях формирования корки на корпусе, моделирующем боковую стенку, и на верхней границе. Были реализованы следующие режимы конвекции:

- 1) режимы без корки на верхней и боковой границах (режимы 1 и 2);
- 2) режимы без корки наверху и с коркой на боковой границе (режимы 3 и 4);
- 3) режимы с коркой на обеих поверхностях (режимы 5—17).

Результаты теплообмена в нижнем объеме приведены в табл. 2. Из этих данных видно, что для режимов без корки на верхней и боковой границах (режимы 1—3) разделение общего количества тела, выделившегося в нижнем объеме, происходило следующим образом: примерно 40—45% тепла отводилось вверх и соответственно 60—55% — вниз. Когда на тестовой стенке сформировалась корка, это отношение изменилось: 33—38% тепла отводилось вверх. При изотермических граничных условиях этот показатель возрос приблизительно до 50%.

Было установлено, что теплообмен в нижнем объеме довольно близок к корреляциям Майингера, которые были получены в подобном диапазоне чисел Рэлея.

**Таблица 2. Режимы теплопереноса в нижнем объеме**

Reg. #	$Pr_1$	$Q_{tot}, W$	$Ra'$	$Q_{up}, W$	$Q_{dn}, W$	Partitioning	$Nu_{dn}$	$Nu_{up}$
1	23,6	1	$3,54 \cdot 10^{11}$	0,460	0,540	0,46	69,6	
2	25,7	1	$4,99 \cdot 10^{11}$	0,381	0,619	0,38	80,4	
3	33,5	1	$3,13 \cdot 10^{11}$	0,367	0,633	0,37	71,1	
4	37,5	1	$1,25 \cdot 10^{11}$	0,503	0,497	0,50	59,2	
5	39,3	1	$5,40 \cdot 10^{11}$	0,566	0,434	0,57	78,7	161,5
6	39,4	1	$2,91 \cdot 10^{10}$	0,500	0,500	0,50	78,6	123,6
7	39,1	1	$2,27 \cdot 10^{10}$	0,551	0,449	0,55	55,9	107,9
8	38,9	1	$2,84 \cdot 10^{10}$	0,445	0,555	0,45	83,5	105,3
9	38,9	1	$2,73 \cdot 10^{10}$	0,443	0,557	0,44	81,1	100,9
10	38,4	1	$4,07 \cdot 10^{10}$	0,513	0,487	0,51	77,3	128,0
11	38,4	1	$4,19 \cdot 10^{10}$	0,490	0,510	0,49	81,3	123,1

**Таблица 2. (окончание)**

Reg. #	Pr <sub>1</sub>	Q <sub>tot</sub> , W	Ra'	Q <sub>up</sub> , W	Q <sub>dn</sub> , W	Partitioning	Nu <sub>dn</sub>	Nu <sub>up</sub>
12	39,1	1	5,02·10 <sup>10</sup>	0,462	0,538	0,46	84,5	114,1
13	37,1	1	7,34·10 <sup>10</sup>	0,462	0,538	0,46	77,3	104,6
14	33,0	1	2,19·10 <sup>11</sup>	0,378	0,622	0,38	70,1	
15	36,8	1	1,40·10 <sup>10</sup>	0,453	0,547	0,45	101,2	131,6
16	36,9	1	1,41·10 <sup>11</sup>	0,513	0,487	0,51	93,4	155,0
17	29,6	1	4,69·10 <sup>11</sup>	0,339	0,661	0,34	74,4	

### 2.3. Фокусировка теплового потока

В табл. 3 представлены данные, полученные для фокусировки теплового потока и соответствующих чисел Био. Для анализа экспериментальных данных использовалась OD-модель [1]. Аналитические значения были рассчитаны с использованием корреляции в форме  $Nu = C Ra^\alpha$ , экспериментальные данные рассчитывались с использованием формулы  $Nu = qH / \lambda (T_2 - T_1)$ , где  $(T_2 - T_1)$  — разность температур ванны и соответствующей границы.

Из данных таблицы видно, что числа Рэлея для восходящего теплообмена для всех режимов находятся в диапазоне  $(2 - 5) \cdot 10^7$ . Следовательно, теплообмен турбулентный, и число Нуссельта может быть рассчитано по формуле  $Nu_{up} = C_{up} Ra^{1/3}$ , где  $C_{up} = 0,1$ .

При теплообмене к боковой стенке числа Рэлея изменяются в диапазоне  $(2 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^8)$ . Эти значения соответствуют переходному режиму теплообмена от ламинарного к турбулентному. Были выполнены две серии вычислений:

$$Nu_{sd} = C_{sdt} Ra^{1/3}, \text{ где } C_{sdt} = 0,15 \text{ для турбулентного теплообмена;}$$

$$Nu_{sd} = C_{sdl} Ra^{1/3}, \text{ где } C_{sdl} = 0,66 \text{ для ламинарного теплообмена.}$$

Значение  $C_{up}$  соответствует выражению Кутателадзе [2] для конвекции в горизонтальных слоях  $Nu_{up} = 0,07 Ra^{1/3} Pr^{0,074}$ .

Таблица 3. Экспериментальные данные по теплообмену в верхнем слое  
в сравнении с модельными предсказаниями

Reg. #	$Q_{in}(W)$	$Q_{up}(W)$	$Q_{set}(W)$	$Ra_{id}$	$Nu_{id}$	$Ra_{up}$	$Nu_{up}$	Bio	F
1	405,7	334,1	71,6	$2,91 \cdot 10^7$	48,47	$4,01 \cdot 10^7$	34,23	7,67	0,84
	405,7	341,7	63,4	$2,12 \cdot 10^7$	66,08	$3,42 \cdot 10^7$	39,91	7,36	0,74
2	598,5	416,7	181,9	$5,88 \cdot 10^7$	57,79	$4,60 \cdot 10^7$	35,83	7,02	1,45
	598,5	413,6	184,7	$5,49 \cdot 10^7$	61,71	$4,28 \cdot 10^7$	38,35	6,53	1,47
3	589,9	403,0	186,9	$5,35 \cdot 10^7$	56,44	$4,03 \cdot 10^7$	34,29	6,04	1,51
	589,9	412,1	178,3	$6,15 \cdot 10^7$	49,41	$4,12 \cdot 10^7$	34,03	5,66	1,44
4	516,3	359,6	156,7	$4,26 \cdot 10^7$	53,31	$3,41 \cdot 10^7$	32,42	5,55	1,45
	516,3	376,9	136,4	$4,26 \cdot 10^7$	53,32	$3,37 \cdot 10^7$	32,77	5,52	1,26
5	537,1	363,7	173,4	$4,02 \cdot 10^7$	52,54	$2,98 \cdot 10^7$	30,99	4,49	1,54
	537,1	374,0	162,8	$4,36 \cdot 10^7$	48,27	$2,89 \cdot 10^7$	32,34	4,34	1,45
6	409,9	307,7	102,2	$2,77 \cdot 10^7$	47,86	$2,77 \cdot 10^7$	0,24	3,94	1,20
	409,9	308,0	105,2	$3,43 \cdot 10^7$	38,37	$3,43 \cdot 10^7$	24,31	3,84	1,22
7	423,7	318,2	105,5	$2,82 \cdot 10^7$	48,09	$2,82 \cdot 10^7$	30,44	3,86	1,19
	423,7	331,5	91,4	$3,41 \cdot 10^7$	39,55	$3,41 \cdot 10^7$	25,15	3,96	1,03
8	467,3	351,5	115,8	$2,62 \cdot 10^7$	47,20	$2,62 \cdot 10^7$	29,69	3,10	1,21
	467,3	340,3	127,5	$2,92 \cdot 10^7$	42,14	$2,92 \cdot 10^7$	28,05	2,91	1,29
9	445,6	324,4	121,2	$3,19 \cdot 10^7$	49,59	$2,89 \cdot 10^7$	30,69	3,92	1,30
	445,6	308,0	137,7	$4,08 \cdot 10^7$	38,50	$3,76 \cdot 10^7$	23,43	3,59	1,47

*XI. Численное моделирование процессов тепло и массопереноса в  
стратифицированном расплавленном пуле*  
*В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Ф. Стрижов*

10	701,9	428,2	273,8	$6,02 \cdot 10^7$	58,14	$3,47 \cdot 10^7$	32,60	3,63	1,86
	701,9	406,3	296,3	$6,22 \cdot 10^7$	56,23	$3,06 \cdot 10^7$	36,67	3,27	2,00
11	679,1	291,4	387,7	$7,87 \cdot 10^7$	62,16	$2,53 \cdot 10^7$	29,37	4,81	2,72
	679,1	294,8	386,2	$7,27 \cdot 10^7$	67,60	$3,03 \cdot 10^7$	24,82	5,00	2,70
12	683,2	180,5	502,7	$9,59 \cdot 10^7$	65,31	$1,83 \cdot 10^7$	26,35	5,67	3,50
	683,2	149,6	533,0	$9,34 \cdot 10^7$	67,18	$2,34 \cdot 10^7$	20,25	4,92	3,72
13	848,6	166,2	682,4	$1,20 \cdot 10^8$	69,14	$1,83 \cdot 10^7$	26,36	6,14	3,83
	848,6	121,7	726,7	$1,19 \cdot 10^8$	69,89	$1,58 \cdot 10^7$	30,59	4,20	4,10
14	1120,8	229,4	891,5	$1,74 \cdot 10^8$	75,81	$2,75 \cdot 10^7$	30,19	7,16	3,79
	1120,8	105,6	1014,2	$1,48 \cdot 10^8$	87,23	$1,75 \cdot 10^7$	45,95	3,58	4,31
15	1129,0	206,2	922,8	$1,55 \cdot 10^8$	73,59	$2,29 \cdot 10^7$	28,38	6,39	3,89
	1129,0	206,8	922,4	$1,31 \cdot 10^8$	85,64	$2,51 \cdot 10^7$	24,32	8,45	3,89
16	1217,8	568,2	649,6	$1,16 \cdot 10^8$	68,54	$4,42 \cdot 10^7$	35,36	3,62	2,54
	1217,8	574,9	731,3	$1,17 \cdot 10^8$	68,36	$4,60 \cdot 10^7$	33,92	3,56	2,66
17	1306,5	538,9	767,6	$1,32 \cdot 10^8$	70,70	$4,42 \cdot 10^7$	35,34	4,19	2,80
	1306,5	1198,3	864,7	$2,62 \cdot 10^8$	40,38	$3,11 \cdot 10^7$	65,45	6,71	3,20

*Примечание.* Для каждого режима в верхней строке приведены вычисленные величины для ламинарного теплопереноса, а в нижней строке — экспериментальные данные.

Для соли использовалось значение числа Прандтля из диапазона от 20 до 40. Коэффициенты  $C_{sdt}$  и  $C_{sdl}$  также соответствует выражению Кутателадзе в пределах 20%.

Фактически в диапазоне чисел Рэлея, характерных для экспериментальных условий, разность между ламинарными и турбулентными значениями мала. Этот факт демонстрируется на рис. 1.

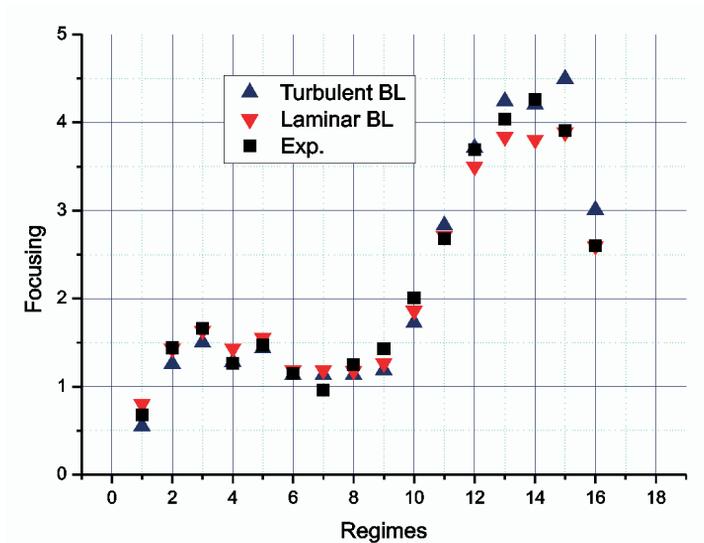


Рис. 1. Сравнение фокусировки теплового потока, измеренного и вычисленного на основании разных моделей для вертикального граничного слоя

### 2.3.1. Изотермические режимы $T_{up} = T_{sd}$ (с 6-го по 9-й)

В этих режимах существуют обе корки, поэтому граничные температуры равны. Таким образом, отношение вертикальных и горизонтальных потоков тепла определяется отношением соответствующих чисел Нуссельта, так как температурные разности равны. В случае  $Bi \rightarrow \infty$  фокусировка не зависит от граничных условий (или зависимость от числа Рэлея очень слаба, например, если теплообмен через граничный слой ламинарный, то  $Nu_{up}/Nu_{sd} \sim (T_m - T_{sd})^{1/12}$ ). Если теплообмен турбулентный, фокусировка определяется аспектным отношением и отношением коэффициентов  $C_{up}/C_{sd}$  для чисел Нуссельта. В табл. 4 приведены измеренные значения фокусировки в сравнении с расчетными значениями. Результаты приве-

дены для двух предположений о теплообмене через граничный слой с использованием нуль-мерной модели [1]. Как можно видеть из табл. 4, ламинарная граничная модель слоя лучше соответствует экспериментальным данным. Максимальное отклонение значений в этом случае не превышает 20%.

**Таблица 4. Сравнение значений фокусинг-эффекта, измеренных и вычисленных с разными моделями для теплопереноса через граничный слой**

Regime	F measured	F calculated, laminar BL	F calculated, turbulent BL
6	1,22	1,20	1,14
7	1,03	1,19	1,14
8	1,29	1,21	1,14
9	1,47	1,30	1,14

### 2.3.2. Прототипичные режимы $T_{sur} \geq T_{sd}$

При анализе реакторного случая обычно предполагается, что граничная температура для верхнего объема и температуры окружения близки друг другу. В случае же анализа конвекции в экспериментальной установке для режимов без верхней корки нужно учитывать разность температур между окружающей температурой, используемой для радиационного теплообмена, и температурой боковой стенки.

В режимах 12—15 эти различия относительно малы и уменьшают радиационный отвод тепла от верхней поверхности. Для этих режимов характерные числа Био находятся в диапазоне между 4 и 8, что соответствует реакторному случаю. Фокусинг-эффект, измеренный для этих режимов, приблизительно равен 4. Нуль-мерная модель, используемая для анализа, обеспечивает подобные результаты. Как можно видеть из табл. 2.4, максимальная разность между расчетными и измеренными данными составляет примерно 15%.

Когда отвод тепла от верхней поверхности относительно мал, распределение теплового потока вверх не однородно. Плотность потока теплоты в центральной части близка к нулю и максимальна на периферии. Этот эффект не зависит от существования корки на тестовой стенке, примыкающей к верхнему объему, и на корке на верхней границе нижнего объема.

### 2.3.3. Режимы $T_{\text{sur}} < T_{\text{sd}}$

Для режимов 1—5, 10, 11, 16 и 17 окружающая температура значительно ниже, чем температура верхней поверхности объема. Для режимов такого вида относительный отвод тепла больше, чем для реакторного случая. В этой ситуации фокусировка меньше по сравнению с реакторным случаем, когда  $T_{\text{sur}} = T_{\text{sd}}$  для подобных чисел Био, которые рассчитываются по формуле  $Bi = (qH) / [(T_{\text{up}} - T_{\text{sur}})\lambda]$ . Из данных табл. 4 можно видеть, что 0-мерная модель с учетом разности температур  $T_{\text{sur}}$  и  $T_{\text{sd}}$  разумно соответствует экспериментальным значениям числа Био и фокусинг-эффекта. Распределение тепловых потоков на верхней поверхности для этих режимов более однородно, однако неоднородность все еще существует, и поток тепла в центральных областях меньше, чем на периферии.

## 3. Численные результаты

Для численного моделирования теплообмена в стратифицированной системе кориум — металл была предложена модель, в которой течение тепловыделяющей вязкой жидкости в поле силы тяжести с учетом выталкивающей силы рассматривается в приближении Буссинеска. Течение описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии.

Уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  — скорость;  $t$  — время. Течения рассматриваются в простейшей расчетной области:

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 < x_1 < L, \quad 0 < x_2 < D, \quad 0 < x_3 < H \}.$$

Для уравнения движения в приближении Буссинеска имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} = \beta g \mathbf{e} (T - T_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

где  $p$  — нормированное на плотность давление;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\beta$  — коэффициент объемного расширения;  $g$  — ускорение свободного падения; вектор  $\mathbf{e} = (0, 0, -1)$  определяет направление силы тяжести;  $T$  — температура;  $T_0$  — температура верхней и нижней граней параллелепипеда.

С учетом объемного тепловыделения уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + C(\mathbf{v})T - a \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{q}{c\rho}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

где  $a = k / (c\rho)$  — коэффициент температуропроводности;  $k$  — теплопроводность;  $c$  — теплоемкость;  $\rho$  — плотность. Мощность равномерного объемного тепловыделения определяется величиной  $q$  в правой части уравнения теплопроводности (3.3).

Для проведения расчетов были использованы новые эффективные разностные схемы для решения нестационарных уравнений Навье — Стокса в естественных переменных скорость — давление [3]. Особенностью этих схем является то, что в них применяются специальные аппроксимации с целью получения разностных операторов, наследующих основные свойства исходных дифференциальных операторов. Операторы, аппроксимирующие вязкие члены, являются самосопряженными и положительными, что определяет диссипацию кинетической энергии. Подробные результаты тестирования развитой модели и вычислительного алгоритма ее решения можно найти в [4].

Расчетная программа, включающая в себя представленную выше модель, а также новые эффективные разностные схемы решения нестационарных уравнений Навье — Стокса в естественных переменных, представляет собой код CONV [3] в многоблочной реализации. Для моделирования стратификации в код были внесены изменения, позволившие задавать различные свойства для верхнего и нижнего слоев. Кроме того, стали возможны перераспределение источника тепловыделения и дополнительная поправка коэффициентов теплопроводности в зависимости от слоя. Был доработан блок формирования граничных условий для постановки внутреннего граничного условия на границе слоев и переизлучения на верхней границе.

Ниже представлены результаты моделирования стратификации с помощью модифицированной версии кода CONV.

В табл. 5 приведены результаты численного предсказания долей теплового потока (partitioning), приходящихся на верхнюю и боковую границы кориума и боковую и нижнюю границы металлического слоя для различных режимов, а также оценка величины фокусинг-эффекта.

**Таблица 5. Результаты предсказаний солевых экспериментов  
с помощью кода CONV**

Reg. #	Кориум (верх)	Кориум (бок)	Металличе- ский слой (правая)	Металличе- ский слой (низ)	Фоку- синг- эффект
1	0,253	0,740	0,042	0,227	0,92
2	0,275	0,720	0,049	0,246	0,99
3	0,246	0,750	0,044	0,243	0,90
4	0,360	0,640	0,044	0,340	0,64
5	0,450	0,550	0,057	0,390	0,75
6	0,410	0,590	0,079	0,380	1,04
7	0,410	0,590	0,082	0,384	1,06
8	0,380	0,620	0,089	0,337	1,32
9	0,380	0,620	0,112	0,358	1,42
10	0,380	0,620	0,114	0,337	1,69
11	0,380	0,630	0,197	0,347	2,83
12	0,380	0,630	0,270	0,348	3,87
13	0,310	0,690	0,204	0,274	3,70
14	0,210	0,790	0,140	0,186	3,76
15	0,295	0,705	0,210	0,255	4,11
16	0,358	0,640	0,174	0,335	2,60
17	0,229	0,740	0,075	0,213	1,78

На рис. 2—4 представлены 2D-поля температур в виде изотермы в диапазоне от 723 до 823 К для режимов 5, 10 и 15 соответственно. Наконец, на рис. 5 приведено сравнение результатов предсказанных величин фокусинг-эффекта с экспериментом и данными, полученными с помощью 0D-модели [1].

XI. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса в стратифицированном расплавленном пуле  
В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Ф. Стрижов

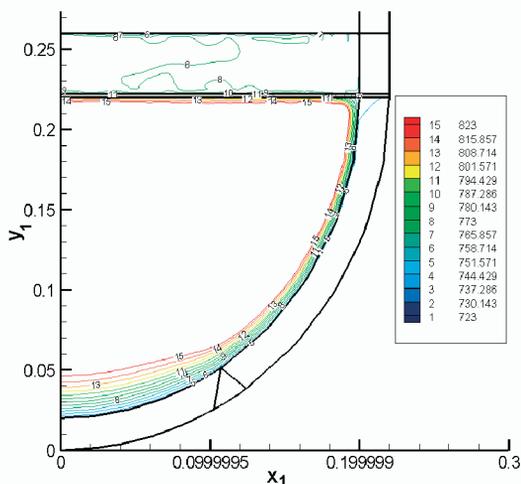


Рис. 2. Изотермы в диапазоне от 723 до 823 К для режима 5

Полученные результаты позволяют говорить об адекватном моделировании явлений стратификации с помощью предложенной модели. А модифицированная версия кода CONV может быть использована для предсказаний разрушения и плавления активной зоны реактора.

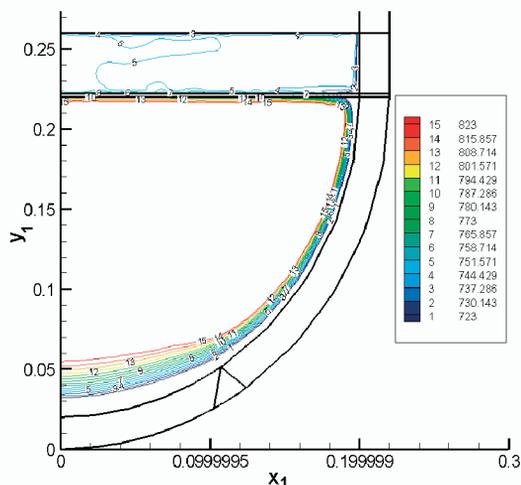


Рис. 3. Изотермы в диапазоне от 723 до 823 К для режима 10

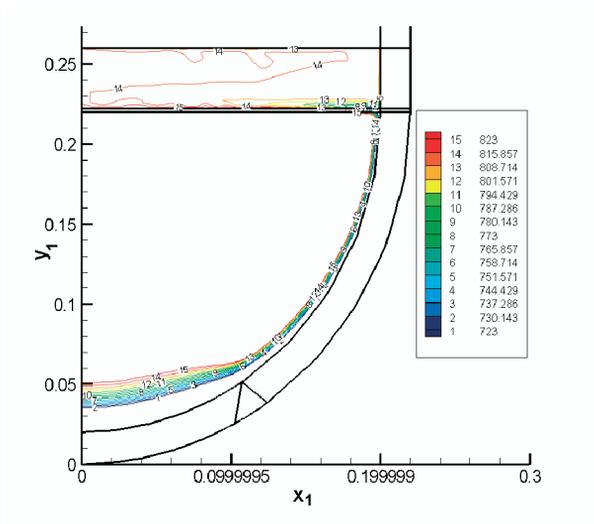


Рис. 4. Изотермы в диапазоне от 723 до 823 К для режима 15

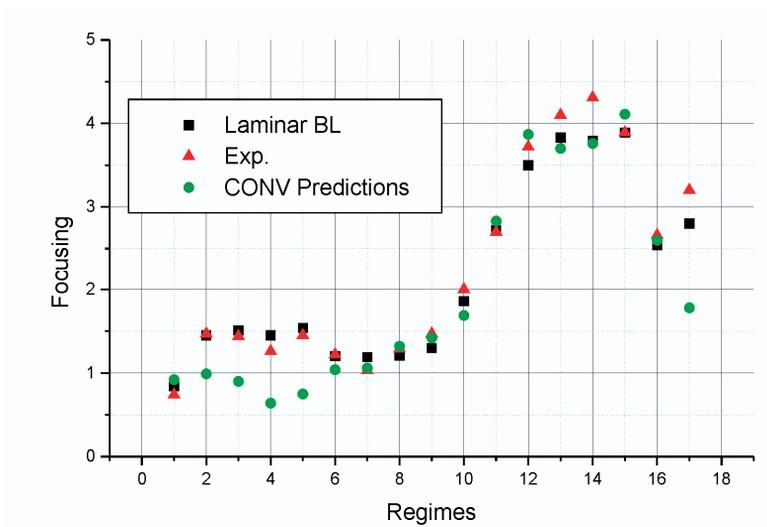


Рис. 5. Сравнение фокусировки теплового потока, измеренного, вычисленного на основании OD-модели и предсказанного кодом CONV для вертикального граничного слоя

#### **4. Заключение**

1. Для численного моделирования тепло- и массообменных процессов в стратифицированном объеме была разработана и включена в код CONV двухжидкостная модель. С ее помощью были промоделированы солевые эксперименты в рамках проекта МАСКА, и во всех случаях получено разумное совпадение с экспериментами.
2. В соответствии с тестовой матрицей были исследованы 17 режимов конвекции. Эксперименты были выполнены при боковом нагреве нижнего объема в широком диапазоне характерных параметров типа числа  $Ra'$  при условиях формирования корки на корпусе, моделирующей стенную поверхность, и на верхней границе. Было установлено, что теплообмен в нижнем объеме довольно близок корреляциям Майнингера, которые были получены в подобном диапазоне чисел Рэлея.
3. Также были исследованы различные режимы конвекции в верхнем объеме. Граничные условия на верхней поверхности объема варьировались от изотермических условий с коркой на верхней границе до почти адиабатических условий. Полученные данные относительно теплообмена были проанализированы и сравнены с 0-мерной моделью, которая показала разумное совпадение с экспериментальными данными.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-17964-а).

#### **Литература**

1. *Asmolov V. G., Abalin S. S., Surenkov A. I.* et al. Study of thermal hydraulic processes in a stratified molten pool // МР-TR-13. 2003. Dec.
2. *Кутателадзе С. С.* Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справ. пособие. М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. *Aksenova A. E., Chudanov V. V., Pervichko V. A.* et al. Development and application of the CONV Codes // Proc. RASPLAV Seminar 2000, Munich, November 2000. (CD-disk. Session 3: Theoretical analysis. 18 p).
4. *Chudanov V. V., Aksenova A. E., Pervichko V. A.* Development of 3D unified computational tools to thermalhydraulic problems // Proc. 10th Intern. Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-10) Seoul, Korea, October 5—9, 2003. (CD-disk, paper E00003.pdf).

## **XII. CFD-подход для моделирования взаимодействия ЛТСМ с бетоном**

*В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко, В. Ф. Стрижов*

### **1. Введение**

Бетоны являются основным строительным материалом при сооружении объектов атомной энергетики. Они используются как биологическая защита, как конструкционный материал для фундамента и опорных плит реактора, для сооружения противоаварийных оболочек, защищающих окружающую среду от радиоактивных выбросов, а также как барьер, защищающий реактор от внешних воздействий. В результате тяжелых аварий на АЭС с плавлением активной зоны бетонные конструкции подвергаются интенсивному температурному и силовому воздействию. Поэтому исследованию поведения бетонных конструкций в экстремальных условиях высоких механических и тепловых нагрузок уделяется большое внимание.

В 1970—1980-х годах проблема взаимодействия расплава с бетоном интенсивно изучалась в сериях различных экспериментов SURC [1], ACE [2], BETA [3, 4]. Были разработаны компьютерные комплексы программ [5, 6], описывающие основные явления, происходящие при высокотемпературном взаимодействии с бетоном. Как правило, эти программы построены с использованием моделей прямого разложения бетона и соответствующих корреляций, описывающих процессы тепломассопереноса в расплаве. Проведенные верификационные расчеты по программе CORCON [7], разработанной Комиссией по ядерному регулированию, показали, что для описания экспериментов необходимо учитывать дополнительные процессы, такие как распределение объемного тепловыделения по расплаву и дополнительные потери энергии, связанные с теплопроводностью через отдельные элементы экспериментальной установки. Учет этих факторов позволил провести анализ энергетических балансов в установке и определить основные каналы потерь [7, 8].

Для изучения взаимодействия расплава активной зоны с бетоном была разработана математическая модель, основанная на решении уравнений Навье — Стокса и теплопроводности [9]. Проведенный анализ процессов, протекающих при взаимодействии с бетоном, позволил разработать модели для описания совокупности теплофизических процессов и физико-химических взаимодействий. В отличие от ранее разработанных кодов

использование многомерных моделей позволило проанализировать основные особенности экспериментов, проведенных в рамках программ SURC [10] и ACE [11]. В частности, одной из особенностей экспериментов SURC является индукционный нагрев, что приводит к неоднородному тепловыделению в расплаве металла и, соответственно, к неоднородному взаимодействию.

В настоящее время разрабатываемое программное обеспечение представляет собой набор вычислительных модулей для расчета как отдельных явлений, сопровождающих взаимодействие расплава топлива с бетоном, так и всего процесса в целом.

Разрабатываемое программное обеспечение отвечает современному уровню развития вычислительной техники, учитывает всю феноменологию, используемую кодами-предшественниками, и позволяет моделировать следующие явления и процессы: многомерный теплоперенос в бетоне для моделирования переходных процессов промежуточного теплового потока к бетону; прямую эрозию бетона при квазистационарном режиме взаимодействия с расплавленными топливными массами; тепломассоперенос в кориуме и конвективное перемешивание в расплаве кориума с учетом стратификации последнего на слой металлических и оксидных составляющих; теплоперенос излучением в полости шахты реактора; изменение физических свойств кориума при разложении бетона и высвобождении в кориум его составляющих; изменение плотности, вязкости, теплопроводности, теплоемкости, температур солидуса и ликвидуса; выделение газов, включая водород, и их перенос через расплавленный кориум с учетом изменения теплопередачи; химические реакции окисления, сопровождающиеся выделением энергии и переносом массы; формирование корки и ее влияние на затвердевание/плавление кориума и теплообмен с окружающими конструкциями; явления абляции бетона.

Подобная организация программного обеспечения придает ему гибкость и позволяет учитывать новые достижения в области вычислительных алгоритмов, а также дополнять код новыми явлениями, поскольку исследования в области МССИ ведутся постоянно и с каждым экспериментом появляются новые гипотезы, объясняющие те или иные явления.

В работе изложены основные особенности некоторых развитых моделей и методов их решения, а также приведены результаты их практического применения на примере моделирования эксперимента SURC-4.

## 2. Математическая модель многокомпонентной среды и методы ее решения

Для изучения взаимодействия расплава активной зоны с бетоном была разработана математическая модель многокомпонентной среды, основанная на решении уравнений Навье — Стокса и теплопроводности [9]. Математическая формулировка модели многокомпонентной среды базируется на законах сохранения массы, импульса и энергии в приближении сплошной несжимаемой среды для описания поведения отдельных компонентов. Предполагается, что различные компоненты среды заполняют отдельные подобласти расчетной области и имеют четко выраженные границы раздела. Компоненты могут находиться в твердом или жидком состоянии в различных точках расчетной области. Каждый компонент многокомпонентной среды рассматривается как вещество с определенными физическими свойствами в жидком или твердом состоянии. Компоненты могут менять свое состояние в процессе плавления/затвердевания вследствие теплообменных процессов.

Система уравнений, описывающая тепло- и гидродинамику компонент, может быть представлена в виде уравнений движения, сохранения массы и энергии для непрерывной среды. Изменение фазового состояния вещества определяется в зависимости от процессов теплообмена и энерговыделения. Для описания многокомпонентной среды и задания свойств материалов введем объемную долю  $n$ -го компонента  $\varepsilon^n$ , принимающую значения в диапазоне от 0 до 1, причем сумма всех объемных долей в ячейке  $\sum_n \varepsilon^n(x, y, z) = 1$ .

Тогда плотность, коэффициент теплопроводности, давление, динамическая вязкость и эффективная теплоемкость компонента  $n$  будут определяться согласно выражениям

$$\rho^n(x, y, z) = \rho_0^n \varepsilon^n(x, y, z), \quad \lambda^n(x, y, z) = \lambda_0^n \varepsilon^n(x, y, z), \\ P^n(x, y, z) = P_0^n \varepsilon^n(x, y, z),$$

$$\mu^n(x, y, z) = \mu_0^n \varepsilon^n(x, y, z), \quad c_p^n(x, y, z) = c_{p0}^n \varepsilon^n(x, y, z).$$

Здесь  $\rho_0^n$ ,  $\lambda_0^n$ ,  $P_0^n$ ,  $\mu_0^n$ ,  $c_{p0}^n$  — свойства чистого материала, зависящие от температуры.

Суммируем уравнения для всех  $n$  компонентов и определим интегральные характеристики среды как средние по объему плотность, теплопроводность, вязкость и удельную теплоемкость:

$$\rho(x, y, z) = \sum_n \rho_0^n \varepsilon^n(x, y, z), \quad \lambda(x, y, z) = \sum_n \lambda_0^n \varepsilon^n(x, y, z),$$

$$\mu = \sum_n \mu_0^n \varepsilon^n(x, y, z), \quad c_p(x, y, z) = \sum_n c_{p0}^n \varepsilon^n(x, y, z).$$

Получаем следующую систему уравнений, описывающую поведение среды:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + g_i \frac{\tilde{\rho}(T)}{\rho} - \Lambda u_i, \quad (1)$$

где  $u_k$  — компонента скорости среды;  $\Lambda$  — коэффициент для описания твердого, жидкого или пористого состояния компонентов среды ( $\Lambda = 0$  для жидкого состояния,  $\Lambda = \infty$  для твердого состояния),

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho h u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} + q_v, \quad (3)$$

где  $h = \int_0^T c_p(T) dT$ ,  $c_p$  — эффективная удельная теплоемкость, которая

определяется согласно выражению

$$c_p = \begin{cases} c_{pl}^n & T \geq T_1^n \\ R^n / (T_s^n - T_1^n) + c_{pm}^n & T_s^n \leq T \leq T_1^n \\ c_{ps}^n & T \leq T_s^n \end{cases}$$

в котором  $T_s^n, T_1^n$  — температура солидуса и ликвидуса соответственно;  $R^n$  — удельная скрытая теплота плавления;  $c_{ps}^n, c_{pl}^n, c_{pm}^n$  — удельные теплоемкости материалов в твердом, жидком и промежуточном состоянии соответственно;  $q_v^n$  — объемное тепловыделение в компоненте.

Уравнение для переноса объемной доли имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon^n}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon^n u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} D^n \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_k}. \quad (4)$$

Особенности алгоритма решения предложенной модели (1)—(4) таковы (см., например, [12]). Вычислительная методика основана на современных с малой схемной диффузией алгоритмах, чьи дискретные приближения построены с использованием конечно-объемных методов и полностью разнесенных сеток [13].

При построении схемы для уравнения энергии его операторы расщепляются на две части, связанные с энтальпией и температурой соответственно. Результатом является следующая двухшаговая процедура:

$$\frac{h^{n+1/2} - h^n}{\tau} + \tilde{C}(u^n)h^{n+1/2} = 0, \quad \frac{h^{n+1} - h^{n+1/2}}{\tau} - \tilde{N}T^{n+1} = 0.$$

В уравнении движения операторы также расщепляются на две части. Первая часть связана со скоростным переносом конвекцией/диффузией, которая в линеаризованном виде записывается как  $A_1 = C(u^n) + N$ , где

$$N = \operatorname{div} \left( \frac{\mu}{\rho} \operatorname{grad} u \right).$$

Вторая часть связана с градиентом давления  $A_2 = \operatorname{grad}$ . Следует отметить, что операторы градиента и дивергенции являются сопряженными друг другу, т. е.  $A_2^* = -\operatorname{div}$ .

Анализируемая аддитивная схема расщепления имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 p^n &= f^n, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 p^{n+1} &= f^n, \\ A_2^* u^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Численная реализация этой схемы выполнена как предиктор-корректор-процедура, т. е. введение поправки давления  $\delta p = p^{n+1} - p^n$  в два последних уравнения (5) позволяет получить известное уравнение Пуассона и уравнение для коррекции скорости вида

$$\operatorname{div}_h \operatorname{grad}_h \delta p = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h u^{n+1/2}, \quad u^{n+1} = u^{n+1/2} - \tau \operatorname{grad}_h \delta p.$$

Для решения самосопряженной и самосогласованной сеточной эллиптической проблемы для давления применяются быстрые итерационные методы (быстрое преобразование Фурье), что позволяет достигать высокого быстродействия вычислительного алгоритма по сравнению со стандартными подходами.

В вычислительной математике существуют два варианта метода фиктивных областей: с продолжением по младшим и старшим производным, которые используются для предсказания динамики жидкости с учетом фазовых превращений. Здесь применяется первый вариант, который в физическом смысле можно трактовать как включение в уравнение движения модели пористой среды:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau} + C(\mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon - \operatorname{div} \left( \frac{\mu}{\rho} \operatorname{grad} \mathbf{u}_\varepsilon \right) + \operatorname{grad} p + c_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0, \quad (6)$$

где  $p$  — давление, нормализованное на плотность. Различные формулы параметра  $c_\varepsilon$  могут использоваться для термина сопротивления потока в вышеупомянутых уравнениях. Для уравнения (6) модифицированная предиктор-корректор-процедура с учетом метода фиктивных областей имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_\varepsilon^{n+1/2} - \mathbf{u}_\varepsilon^n}{\tau} + A_1 \mathbf{u}_\varepsilon^{n+1/2} + A_2 p_\varepsilon^n + c_\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon^{n+1/2} &= \mathbf{f}^n, \\ \operatorname{div}_h \left( \frac{1}{1 + \tau c_\varepsilon} \operatorname{grad}_h \delta p_\varepsilon \right) &= \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h \mathbf{u}_\varepsilon^{n+1/2}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon^{n+1} &= \mathbf{u}_\varepsilon^{n+1/2} - \frac{\tau}{1 + \tau c_\varepsilon} \operatorname{grad}_h \delta p_\varepsilon. \end{aligned}$$

Полностью неявная схема (обратные разности) используется для нестационарного уравнения теплопроводности.

Для решения задачи конвекции развита регуляризованная монотонная нелинейная операторная схема расщепления [14].

В уравнении движения используется специальная аппроксимация конвективных слагаемых  $C(\mathbf{u})$  для получения дискретного конвективного оператора, который является кососимметричным и не дает вклада в кинетическую энергию (т. е. является энергетически нейтральным):

$$C(\mathbf{u}) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{u}, \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \operatorname{div} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \right].$$

Схема обеспечивает второй порядок по пространству и первый по времени. Алгоритм устойчив при достаточно больших шагах интегрирования по времени. Сеточные эллиптические уравнения решаются на каждом временном слое итерационным методом сопряженных градиентов с предобуславливателем.

### 3. Моделирование плавления пористого тела с учетом скачка плотности

Для учета скачка плотности на интерфейсной границе между расплавом и пористым слоем обломков активной зоны был разработан следующий вычислительный алгоритм.

В области жидкого расплава полагалось:

$$\operatorname{div} u^n = 0, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

На поверхности раздела, в зоне плавления дегриза, где  $\rho_{\text{дегрис}} \rightarrow \rho_{\text{расплав}}$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0.$$

При получении уравнения давления для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} u^{n+1} = 0, \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} u^n.$$

Для скачка плотности на поверхности раздела расплав/дегрис

$$\operatorname{div} u^{n+1} = f, \begin{cases} f = 0 \\ f = \frac{1}{\tau} \frac{\Delta \rho}{\rho} \end{cases}, \quad \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\tau} \operatorname{div} u^n + f.$$

Пример использования в модельном расчете 3D-процесса плавления пористого тела с учетом скачка плотности показан на рис. 1.

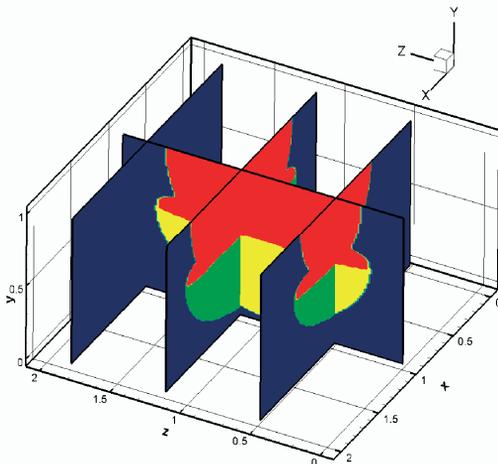


Рис. 1. 3D-поле температур с учетом скачка плотности

#### 4. Оптимальный алгоритм решения эллиптического уравнения для коррекции давления

При разработке многомерных гидродинамических моделей, составляющих основу многомерных теплогидродинамических кодов, возникают не только проблемы физического моделирования, но и задачи выбора оптимального численного метода. Критерий выбора оптимального метода [15] — эффективность и вычислительная устойчивость. Применительно к задачам гидродинамики жидкости с переменной плотностью критерием является доля времени, затрачиваемого центральным процессором (CPU) на один шаг по времени для решения уравнения давления. В частности, для решения уравнения Пуассона для оценки поправки давления  $\delta p$  вида

$$\operatorname{div}_h \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_h \delta p \right) = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1/2}$$

в задачах гидродинамики жидкости с переменной плотностью обычно используется метод сопряженных градиентов, который затрачивает на один расчетный шаг 90% процессорного времени. Поэтому актуально применение вычислительных алгоритмов, имеющих большую эффективность, т. е. позволяющих сократить временные затраты CPU на один расчетный шаг.

Для решения 3D разностных эллиптических задач применяются и прямые, и итерационные методы. Прямые методы в многомерном случае можно использовать для весьма специального класса задач, а именно для оператора Лапласа в параллелепипеде. Однако наличие прямых методов обращения оператора Лапласа в параллелепипеде в случае краевых условий Неймана позволяет использовать такие операторы в качестве оператора  $B$  для неявных итерационных схем решения вырожденных уравнений.

Смысл рассмотрения итерационных методов с вырожденным оператором  $B$  следующий. Если оператор  $B$  таков, что нахождение решения уравнения  $B y_{k+1} = B y_k - \tau_{k+1} (A y_k - f)$  осуществляется значительно проще, чем исходного операторного уравнения  $A y = f$ , а отношение  $\xi = \gamma_1 / \gamma_2$  не слишком мало, то такой способ поиска приближенного решения уравнения  $A y = f$  может оказаться целесообразным [15].

Применение метода, теоретические основы которого изложены в [15], к решению эллиптических уравнений с переменными коэффициентами, позволяет сократить количество времени центрального процессора на один вычислительный шаг до 10% CPU. Подобная производительность достигается:

- за счет особого способа расщепления переменных коэффициентов исходного эллиптического уравнения на две части: неявную — среднее значение коэффициента  $1/\rho$  в операторе  $\operatorname{div}((1/\rho)\operatorname{grad} \delta p)$  — и явную;
- за счет переноса явной части в правую часть уравнения для поправки давления и последующего решения уравнения Пуассона с модифицированной правой частью итерационным методом с чебышевским набором параметров с преобуславливателем и применением быстрого преобразования Фурье.

Преимущества метода показаны на примере решения задачи Неймана для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:  $0 < c_1 \leq c(x) \leq c_2$  в кубе со стороной  $l_\alpha = \pi$  на равномерной сетке:

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (c(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) = -\varphi(x), \quad x \in G,$$
$$-c \frac{\partial u}{\partial n} = g(x), \quad x \in \gamma,$$

где  $0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Точное решение для указанной задачи имеет вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3$$

и удовлетворяет условию  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  на границе куба.

Коэффициент  $c(x_1) = ax_1 + b$  задавался таким образом, чтобы отношение его значений на концах отрезка  $x_1 = \pi$  и  $x_1 = 0$  соответствовало различным значениям  $c_2/c_1 = (a\pi + b)/b$ .

Правая часть уравнения имела вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3(ax_1 + b) - a \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3.$$

В качестве критерия сходимости итерационного процесса была выбрана евклидова норма невязки в пространстве сеточных функций  $H$ .

Ниже приведены результаты сравнения метода сопряженных градиентов с методом простой итерации, двухслойным чебышевским методом и трехслойным чебышевским полуитерационным методом по количеству итераций (рис. 2). Количество итераций сравнивается при достижении неравенства  $\|Ay - f\| < \varepsilon$  для различных значений  $\varepsilon$  и размерностей сетки по первому направлению  $N$ .

Из рис. 2 следует, что метод сопряженных градиентов предпочтительнее для  $N=9$  при  $c_2/c_1 > 10$ , для  $N=17$  при  $c_2/c_1 > 40$ . Соответственно при увеличении количества точек значение отношения  $c_2/c_1$ , при котором предпочтительнее использовать метод сопряженных градиентов, будет расти. При  $N=33$   $c_2/c_1 > 200$ , при  $N=65$   $c_2/c_1 > 10^3$ .

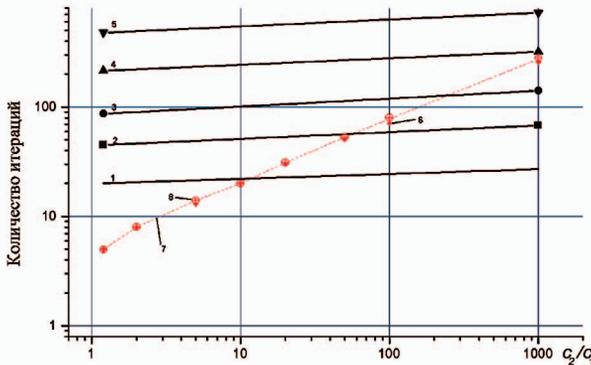


Рис. 2. Количество итераций для метода сопряженных градиентов при различных значениях  $N$  в сравнении с полуитерационным методом с чебышевским набором параметров с предобуславливателем для  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Метод сопряженных градиентов: 1 —  $n = 10$ , 2 —  $n = 20$ , 3 —  $n = 35$ , 4 —  $n = 70$ , 5 —  $n = 130$ . Полуитерационный метод с чебышевским набором параметров: 6 —  $n = 33$ , 7 —  $n = 65$ , 8 —  $n = 129$

Были проанализированы изменение числа итераций в зависимости от отношения  $c_2/c_1$  и размерности сетки. В методе сопряженных градиентов количество итераций слабо зависит от величины отношения  $c_2/c_1$  и в большей степени от размерности сетки, тогда как чебышевские методы в меньшей степени зависят от параметра  $N$  и в большей степени от величины отношения  $c_2/c_1$ .

В табл. 1—4 приведено для сравнения количество итераций в методе сопряженных градиентов, в методе простой итерации, в двухслойном чебышевском методе и в трехслойном полуитерационном чебышевском методе для  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Таблица 1.  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Метод сопряженных градиентов

	$N = 10$	$N = 20$	$N = 35$	$N = 70$	$N = 130$
$c_2/c_1 = 1,2$	20	45	87	215	478
$c_2/c_1 = 10^3$	27	68	141	320	727

**Таблица 2.  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Метод простой итерации**

	$c_2/c_1$							
	1,2	2	5	10	20	50	100	1000
$N = 9$	3	7	17	30	50	110	209	1987
$N = 17$	3	7	18	35	60	112	209	1838
$N = 33$	3	7	18	38	71	144	218	1754
$N = 65$	3	7	19	38	77	178	297	1702
$N = 129$	3	7	19	38	79	199	367	1680

**Таблица 3.  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Двухслойный чебышевский метод**

	$c_2/c_1$							
	1,2	2	5	10	20	50	100	1000
$N = 9$	4	6	12	20	32	48	76	256
$N = 17$	4	6	12	22	32	56	76	280
$N = 33$	4	6	12	22	32	56	80	304
$N = 65$	4	6	12	22	32	56	88	304
$N = 129$	4	6	12	22	32	56	88	320

**Таблица 4.  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Полуитерационный чебышевский метод**

	$c_2/c_1$							
	1,2	2	5	10	20	50	100	1000
$N = 9$	5	8	13	18	27	44	67	230
$N = 17$	5	8	13	19	29	45	70	251
$N = 33$	5	8	13	20	30	51	71	258
$N = 65$	5	8	14	20	31	53	78	274
$N = 129$	5	8	14	20	31	53	80	281

Из приведенных данных следует, что при большом количестве точек ( $N = 129$ ) и любом отношении  $c_2/c_1 \leq 10^3$  чебышевские методы на порядок эффективнее, чем метод сопряженных градиентов, причем при  $1,2 \leq c_2/c_1 \leq 2$  — эффективнее на два порядка. Эффективнее будет даже метод простой итерации, если  $c_2/c_1 \leq 220$ . Из табл. 1—4 также следует слабая зависимость чебышевских методов от параметра  $N$ .

Выше были изложены некоторые особенности вычислительных моделей и методов их решения, используемые в разрабатываемом программном обеспечении для моделирования взаимодействия расплава топлива с

бетоном. Далее представлены результаты применения программного обеспечения для моделирования эксперимента SURC-4.

## **5. Численное моделирование эксперимента SURC-4**

Для моделирования эксперимента SURC-4 был выбран сценарий, включающий не только стадию развитого взаимодействия расплава металла с бетоном, но было проведено также моделирование стадии разогрева и расплавления металлического цилиндра. Временной сценарий расчета приведен в табл. 5.

### **5.1. Теплофизические постоянные**

При моделировании процессов теплопроводности в расплаве необходимо задавать температурные зависимости коэффициента теплопроводности и теплоемкости для всех материалов, используемых в эксперименте.

**Таблица 5. Перечень событий в эксперименте SURC-4**

Время, с	Событие
0	Начало работы системы сбора информации
642	Подвод энергии 98 кВт к индуктору
2640	Увеличение подвода энергии до 200 кВт
4030	Увеличение подвода энергии до 245 кВт
6258	Расплавление термопары $C_{41}$ ( $r = 18,0$ см, $z = 0,0$ см)
6324 *	Расплавление термопары $C_1$ ( $r = 0,0$ см, $z = 0,0$ см)
6714	Расплавление термопары $C_{21}$ ( $r = 10,0$ см, $z = 0,0$ см)
7140	Добавление в расплав 20 кг циркония
7446	Выключение энергии
7902	Выключение энергии (245 кВт)
8688	Отключение энергии
8706	Выключение энергии (245 кВт)
9750	Отключение энергии
10656	Отключение системы сбора информации

\* Этот момент времени принимается за начало взаимодействия с бетоном.

## **5.2 Керамика на основе MgO**

Для изучения теплофизических характеристик керамики были проведены специальные эксперименты для их определения [16], в результате которых были предложены следующие значения для MgO:

плотность  $\rho_{\text{MgO}} = 278 \text{ г/см}^3$ ;

теплоемкость  $C_{\text{MgO}} = 1,25 \text{ Дж/(г·К)}$  (среднее значение);

теплопроводность (минимальная)  $(-5 \cdot 10^{-5} T + 0,082; 0,020) \text{ Вт/(см·К)}$ .

В табл. 6 приведены результаты исследования температурной зависимости теплоемкости и теплопроводности керамики вплоть до температуры 1200°C.

**Таблица 6. Температурная зависимость теплоемкости и коэффициента теплопроводности**

Температура, °С	Теплоемкость, Дж/(г·К)	Теплопроводность, Вт/(см·К)
22	0,885	0,08009
100	1,018	0,08082
200	1,123	0,07544
300	1,184	0,06869
400	1,211	0,06018
500	1,242	0,05379
600	1,268	0,04365
700	1,285	0,04281
800	1,300	0,03898
900	1,307	0,03665
1000	1,314	0,03465
1100	1,325	0,03347
1200	1,330	0,03249

## **5.3. Сталь**

Для цилиндра из стали марки 304 данные по теплоемкости были взяты из отчета [16]. Основные характеристики материалов, выбранные для расчетов, приведены в табл. 7. Коэффициент теплопроводности выбирался в зависимости от температуры, в соответствии с результатами калориметрических тестов [10].

Таблица 7. Теплоемкость стали и бетона в тесте SURC-4

Температура, °С	Теплоемкость, Дж/(г·К) *	Теплопроводность, Вт/(см·К) **
300	0,5100	0,7590
500	0,5368	1,0415
700	0,5640	1,1353
900	0,5908	1,1866
1100	0,6176	1,2227
1300	0,6448	1,2546
1500	0,6715	
1700	0,6987	
1700—3000	0,7950	

\* Данные, полученные из [16].

\*\* Расчетные данные из [5].

## 5.4. Бетон

Для состава бетона, приведенного в табл. 8, были проведены расчеты его теплофизических свойств с использованием соответствующих подпрограмм из кода CORCON. Температуры плавления  $T_{liq}$  и затвердевания  $T_{sol}$  задавались в соответствии с [1].

Термограмма для базальтового бетона, используемого в эксперименте, показала, что при разложении бетона выделяется примерно 1,5 весовых процента  $CO_2$  и около 5% паров воды. Свободная вода испаряется в диапазоне 50—100°C, а связанная вода — при 400—750°C и при температуре 700°C происходит разложение  $CaCO_3$  и выделение  $CO_2$ . Температура разложения бетона для программы CORCON составила 1500 К.

Поскольку по теплопроводности бетона в [1] не приведено никаких данных, эта величина варьировалась в расчетах в диапазоне 0,01—0,02 Вт/(см·К).

Таблица 8. Химический состав базальтового бетона для SURC-4

Оксид	Весовой процент
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	6,3
TiO <sub>2</sub>	1,1
K <sub>2</sub> O	5,4
Na <sub>2</sub> O	1,8
CaO	8,8
MgO	6,2
SiO <sub>2</sub>	55,2
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	8,3
CO <sub>2</sub>	2,5
H <sub>2</sub> O	4,2
SO <sub>2</sub>	0,2
<i>Всего</i>	<i>100,0</i>

### 5.5. Стадия разогрева расплава

Целью моделирования начальной стадии взаимодействия был выбор механизма теплопередачи на границе контакта сред металл-бетон, металл-керамика. Сравнение данных расчетов с экспериментальными показаниями термопар, вмонтированных в стальной цилиндр, керамику и бетон, позволило сделать вывод относительно тепловых потерь через боковую поверхность, контактирующую с керамикой, и нижнюю границу с бетоном.

На рис. 3 приведены расчетные и экспериментальные значения температур стального цилиндра в точке  $h = 5$  см и  $r = 18$  см. Расчетные значения температуры несколько ниже, что связано с большими потерями в керамику и бетон по сравнению с экспериментом. На это указывает поведение кривых на рис. 4, где приведено временное подведение показаний термопар, размещенных в керамике на расстоянии примерно 10 см от нижней границы стального цилиндра. Большие значения температуры получились также для показаний термопар в бетоне на различных глубинах (0, -1 и -3 см) (рис. 5).

Причиной такого отличия могли быть недиффузионные механизмы теплопередачи на контактных границах вследствие неполного и неплотного контакта соприкасающихся плоскостей. Как следует из рисунков, качественно картина соответствовала наблюдавшейся в эксперименте, однако

время начала и окончания плавления стали оказалось несколько больше наблюдавшихся.

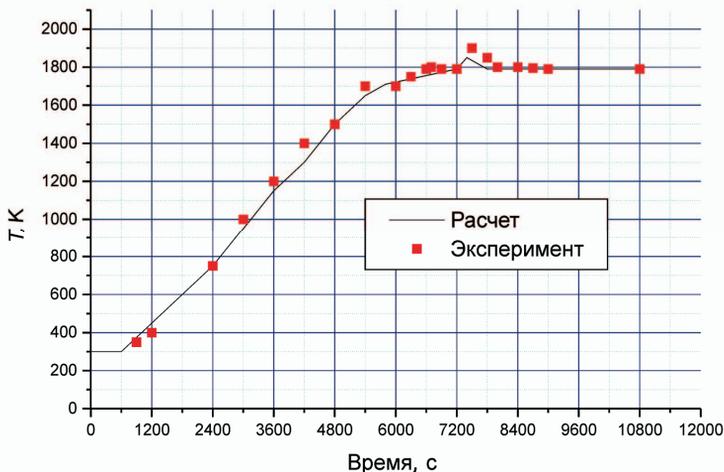


Рис. 3. Сравнение экспериментальных и измеренных температур в стали

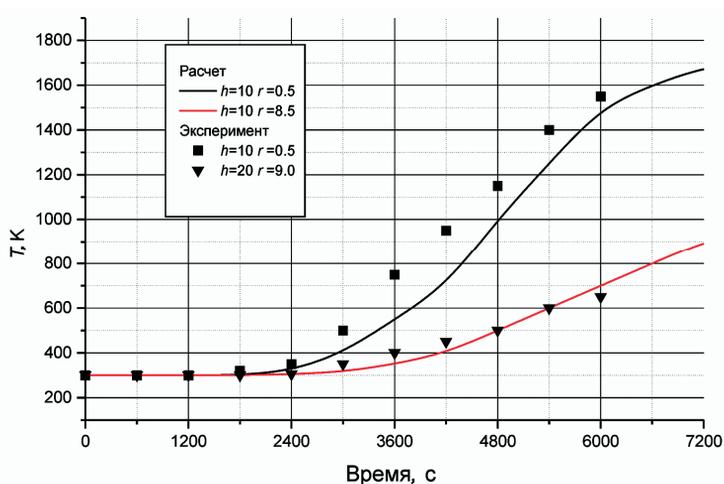


Рис. 4. Сравнение экспериментальных и измеренных температур в керамике на стадии предварительного разогрева

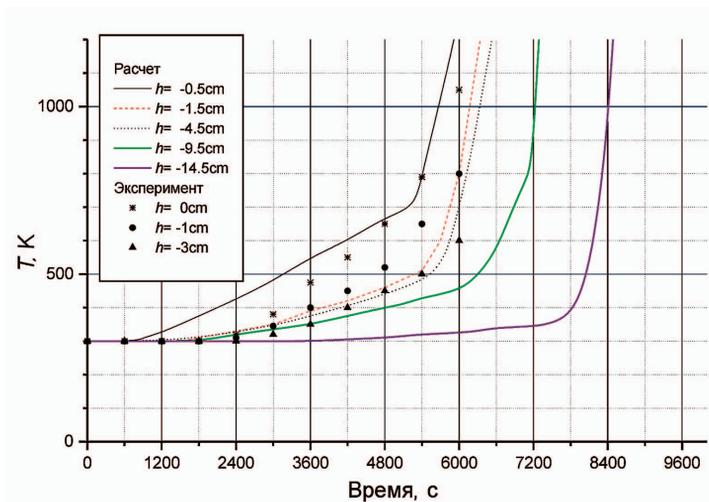


Рис. 5. Сравнение экспериментальных и измеренных температур в бетоне на стадии предварительного разогрева

## 5.6. Стадия развитого взаимодействия

На стадии развитого взаимодействия после полного расплавления стального цилиндра, по-видимому, можно считать, что передача тепла к керамической стенке будет диффузионной. По этой причине после расплавления использовалась модель теплопроводности. При этом также предполагалось, что газовая пленка на границе с керамикой отсутствует.

На рис. 6 приведена зависимость глубины разложения бетона от времени, рассчитанная по первой версии программы. Верхнее семейство точек соответствует экспериментальным данным для случая  $r = R_{\text{cylinder}}$ , нижнее соответствует случаю  $r = 0$ . Вычислительные результаты представлены сплошной линией. Процесс разложения начинается в момент времени 6000 с, что примерно соответствует эксперименту. Скорость разложения при движении фронта расплава по прогретому бетону хорошо согласуется с экспериментальными данными. В дальнейшем скорость несколько замедляется. В этот момент средняя температура расплава составляет 1750 К, что близко к экспериментальным значениям.

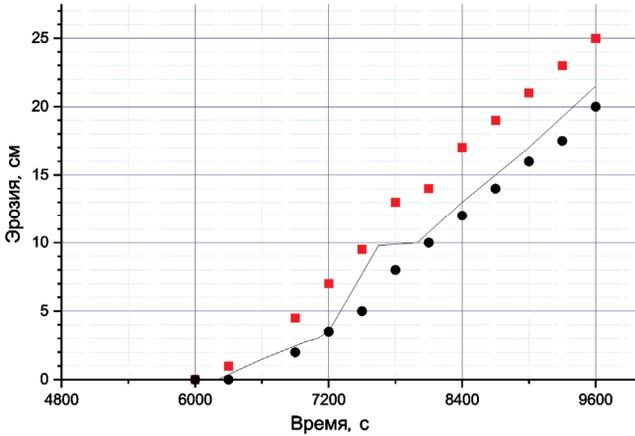


Рис. 6. Глубина эрозии бетона

Далее представлены результаты расчета, полученные по новой версии кода с учетом тепло- и гидродинамических моделей. На рис. 7 показаны максимальные и средние температуры, а также вкладываемая мощность. На рис. 8 показана форма расплавленной области на момент времени 7200 с.

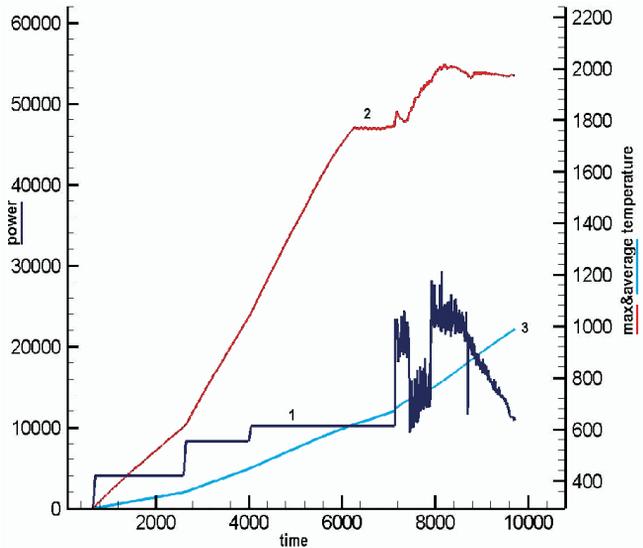


Рис. 7. Вкладываемая мощность (1), максимальная (2) и средняя (3) температура

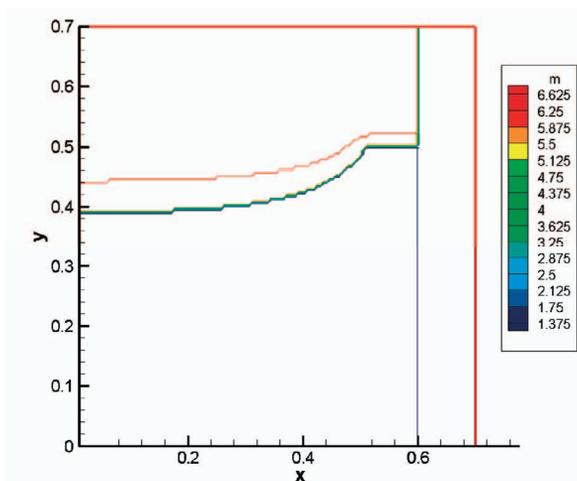


Рис. 8. Форма расплавленной области на момент времени 7200 с

На рис. 9 продемонстрирована эрозия в бетоне в зависимости от времени на радиусе  $R = 0,011$  м. Интегральное количество выделившейся воды в результате разложения бетона показано на рис. 10. Интегральное количество выделившегося углекислого газа в результате разложения бетона показано на рис. 11.

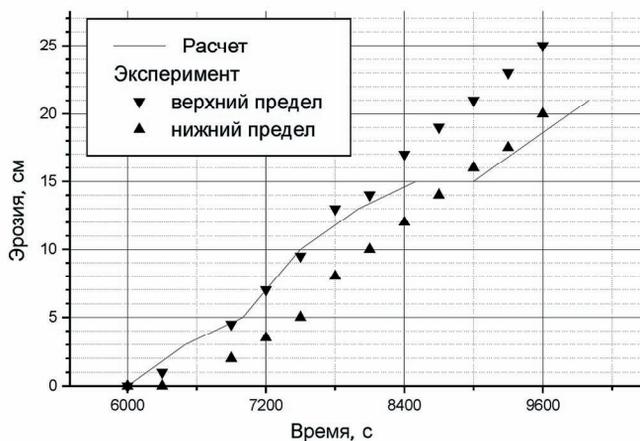


Рис. 9. Эрозия в бетоне.  $R = 0,011$  м

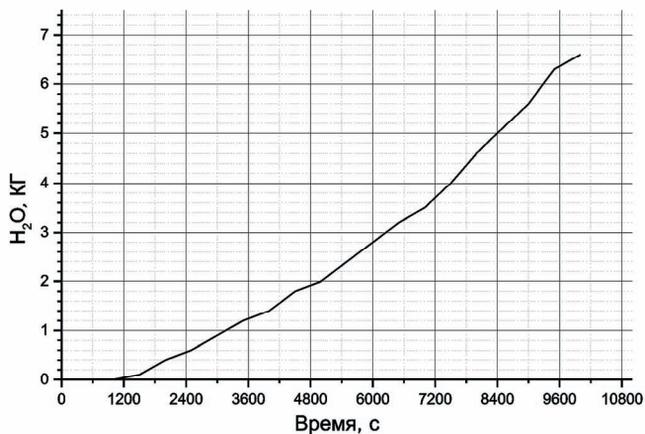


Рис. 10. Интегральное количество выделившейся  $H_2O$

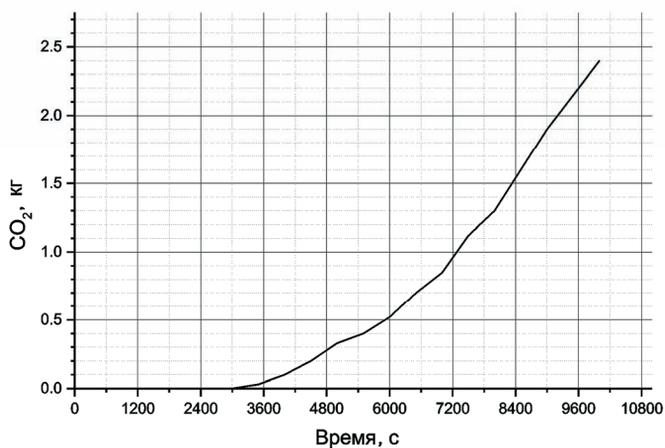


Рис. 11. Интегральное количество выделившегося газа  $CO_2$

## **6. Заключение**

1. Для изучения взаимодействия расплавленных кориюмных масс с бетоном разработаны новая, более общая математическая модель и программное обеспечение, позволяющие моделировать широкий спектр тепло- и массообменных процессов при взаимодействии расплава топлива с бетоном.
2. Базовая 3D математическая модель включает в себя решение уравнений Навье — Стокса с переменными свойствами с учетом скачка плотности при плавлении бетона совместно с уравнением теплопроводности.
3. Разрабатываемое программное обеспечение отвечает современному уровню развития вычислительной техники и учитывает всю феноменологию, используемую кодами-предшественниками. В отличие от ранее разработанных кодов использование многомерных моделей позволяет проанализировать особенности экспериментов, которые невозможно было в полной мере промоделировать ранее, в частности эксперимент SURC-4.
4. В результате предварительного численного моделирования эксперимента SURC-4 были получены качественно согласованные с экспериментом результаты по моделированию теплового баланса расплава и форме расплавленной области. Количественное совпадение с экспериментом было получено по глубине эрозии бетона и количеству продуктов разложения бетона, в частности  $H_2O$  и  $CO_2$ .

## **Литература**

1. *Copus E. R., Powers D. A.* The SURC Test Series // Second OECD — CSNI Specialist meeting on Molten Core Debris-Concrete Interactions, Karlsruhe, Germany, 1—3 April, 1992. P. 51—66.
2. *Thompson D. H., Fink J. K. et al.* Thermal hydraulic aspects of the large-scale integral MCCI test in the ACE Program // Second OECD (NEA) CSNI Specialist Meeting on Molten Core Debris-Concrete Interactions, Karlsruhe, Germany, 1—3 April, 1992.
3. *Alsmeyer H.* Melt-Concrete Interaction during Severe Light Water Reactor Accidents // *Kemtechnik*. 1988. 53. P. 30—37.
4. *Alsmeyer H., Adelhelm C. et al.* BETA-Experiments on Zirconium Oxidation and Aerosol Release During Melt-Concrete Interaction // Second OECD — CSNI Specialist meeting on Molten Core Debris-Concrete Interactions, Karlsruhe, Germany, 1—3 April, 1992. P. 67—82.

5. Gardner D. R., Bradley D. R. CORCON-Mod3: An Integrated Computer Model for Analysis of Molten Core-Concrete Interactions: Users manual / NUREG/CR-5843, SAND92-0167, Sandia National Laboratories. Albuquerque, NM, 1993. P. 87185.
6. Reinmann M., Tiefel S. WECHSL-Mod2 Code: A Computer Program for the Interaction of a Core Melt with Concrete including the Long Term Behaviour // KfK. 1989. P. 4477.
7. Akseonov E., Kamukova V., Nikulshin V. et al. An Assessment of the CORCON-MOD3 Code. Pt. 1: Thermal-Hydraulic Calculations NUREG/IA-0129 / U.S.Nuclear Regulatory Commission. Washington, DC, 1996.
8. Strizhov V., Ptacek J., Corradini M. Energy modeling of the ACE MCCI Experiment L6 // Proc. of Second OECD-CSNI Specialist Meeting on Core Debris Concrete Interaction. Karlsruhe, 1992. P. 195—209.
9. Аксенова А. Е., Васильев А. Д., Варенков В. В. и др. Комплекс программ для численного моделирования экспериментов по взаимодействию высокотемпературных расплавов металлов с диоксициркониевым бетоном. М., 1997. (Препринт / ИБРАЭ РАН; № 97-19).
10. Arutyunyan R. V., Bolshov L. A., Chudanov V. V. et al. Modeling of SURC-4 Experiment Thermohydraulics. Moscow, 1991. (Preprint / IBRAE; 17).
11. Чуданов В. В., Попков А. Г., Стрижов В. Ф. Численное моделирование экспериментов ACE MCCI L6-7 // Проблемы безопасного развития атомной энергетики. М.: Наука, 1993. С. 110—116.
12. Чуданов В. В. Интегральный подход к решению задач вычислительной теплогидродинамики в сложных областях // Изв. РАН. 1999. № 6. С. 126—135.
13. Akseonova A. E., Chudanov V. V., Pervichko V. A. et al. A multi-block orthogonal grid generation using CAD system // Proc. 8th International Meshing Roundtable. Lake Tahoe, USA. Sandia report SAND 99-2288. [S. 1.], 1999. P. 179—189.
14. Чуданов В. и др. Нелинейные регуляризованные разностные схемы для многомерных уравнений адвекции // Вычисл. математика и мат. физика. 2001. Т. 40. № 6. С. 900—907.
15. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
16. Cole R. K., Kelly D. P., Ellis M. A. CORCON-MOD2: A Computer Program for Analysis of Molten-Core-Concrete Interactions // Sandia Report NUREG/CR-3920 / Sandia National Laboratories. [S. 1.], August 1984.

### **XIII. Термодинамическая модель системы U-Zr-Fe-O**

*В. Д. Озрин, О. В. Тарасов*

#### **1. Введение**

При проектировании ядерного реактора важнейшей задачей является изучение происходящих в корпусе реактора явлений в случае тяжелой аварии с разрушением активной зоны. При ее плавлении в реакторе типа ВВЭР образуется сложный многокомпонентный расплав, называемый кориумом, в который входит материал топлива ( $UO_2$ ), оболочек ТВЭЛов (Zr), нержавеющая сталь конструкций (Fe, Ni, Cr), контрольные стержни ( $B_4C$ ) и продукты деления (Ba, La, Ru, Sr). При стекании кориума на днище реактора он начинает взаимодействовать с бетоном (Al, Ca, Mg, Si, Fe).

Для описания хода тяжелой аварии необходимо знать свойства образующейся сложной смеси, в первую очередь — оценивать возможность образования нескольких фаз и определять их состав. Как известно [1, 2], в жидкой системе U-O существует область несмешиваемости, т. е. жидкий расплав расслаивается на более легкую оксидную и более тяжелую металлическую фазы. При добавлении в кориум других веществ сохраняется возможность расслоения на оксидную и металлическую фазы. Образующиеся при этом фазы обладают различными свойствами. В частности, в оксидной фазе значительно интенсивнее остаточное тепловыделение. Ее теплопроводность ниже, а температура плавления выше, чем у металлической фазы. Знание составов этих фаз — важная задача при описании хода тяжелой аварии.

В литературе существует ряд моделей систем O-U и O-U-Zr — на основе регулярных, ионных растворов, решеточных моделей и т. д. Как правило, моделируется потенциал Гиббса системы во всех возможных фазах, условие минимальности которого и определяет состояние системы. Так, в статье Шевалье и Фишера [3] предложена термодинамическая модель, описывающая кориум O-U-Zr. При ее построении использовались экспериментальные данные из многих источников о бинарных системах O-U, O-Zr, U-Zr, псевдобинарной системе  $UO_2$ - $ZrO_2$  и сравнительно небольшой объем экспериментальной информации о тройной системе. Большая часть данных относилась к температурам более низким, чем возникающие при тяжелой аварии на реакторе (~2500 K). Свойства жидкой фазы и область

несмешиваемости в известной мере являются экстраполяцией экспериментальных данных, относящихся к более низким температурам (в первую очередь это кривые солидуса и ликвидуса).

С точки зрения предсказания хода тяжелой аварии большой интерес представляет изучение свойств системы O-U-Zr-Fe, позволяющее описать ряд важных эффектов, наблюдаемых при попадании в кориум стали. В первую очередь интересна форма границ растворимости стали в однородном кориуме. Экспериментальные данные о фазовых диаграммах для более простых подсистем (O-Fe, U-Fe и т. д.) собраны, например, в документации THERMOCALC о термодинамической базе NUCLEA [4]. Важно также и соотношение плотностей жидкой оксидной и металлической фаз: основу металлической фазы составляет сравнительно легкое железо, и ее плотность может оказаться ниже, чем у оксидной фазы. Соответственно может возникнуть прямое (оксидная фаза над металлической) или инверсное расположение фаз на днище реактора при расплавлении активной зоны, что весьма важно для описания хода аварии.

С целью исследования свойств систем O-U-Zr и O-U-Zr-Fe был проведен ряд экспериментов в рамках международных проектов RASPLAV [5] и MASCA [6]. Основным наблюдаемым эффектом заключался в следующем. Возникающий при плавлении ТВЭЛов кориум ( $UO_2+Zr$ ) в жидком состоянии всегда однороден, расслоения на фазы не возникает. Однако при добавлении сравнительно небольшого количества железа или стали возможно выделение весьма массивной металлической фазы.

Данная статья посвящена термодинамической модели кориума O-U-Zr-Fe, описывающей имеющиеся экспериментальные данные и позволяющей предсказывать свойства кориума при различных концентрациях компонентов и при различных температурах. Наиболее важной задачей являлось моделирование свойств жидкого кориума. Однако для более полного использования имеющихся экспериментальных данных о фазовых диаграммах, в первую очередь — о кривых ликвидуса и солидуса в бинарных и псевдобинарных подсистемах, модель описывает также твердую фазу с двумя возможными кристаллическими решетками: кубической гранецентрированной (для оксидных смесей) и кубической объемноцентрированной (для металлических смесей).

## **2. Эксперименты MASCA**

Для изучения поведения расплавленного кориума на днище реактора были проведены экспериментальные исследования в рамках проекта MASCA. В этих экспериментах основное внимание уделялось изучению взаимодействия расплавленного кориума (O-U-Zr) с элементами конструкций

реактора, в первую очередь с железом. Особое внимание уделялось возможному расслоению кориума на оксидную и металлическую фазы, их составам и свойствам. В частности, исследовалось распределение продуктов распада между ними.

Для проведения экспериментов была разработана технология плавления кориума в холодном тигле. Достоинство этого метода в минимизации нежелательных взаимодействий расплавленного вещества со стенками сосуда. Тигель образовывался набором водоохлаждаемых вертикальных трубок, отделенных от кориума слоем тугоплавкого  $UO_2$  или  $ZrO_2$ . В него клались кольца кориума, а во внутреннюю полость, ими образованную, устанавливалась вольфрамовая трубка для первичного разогревания индукционным током. Производилось медленное разогревание кориума до требуемой температуры (2500—2600°C), после чего трубка вынималась. Далее в кориум добавлялись железо и прочие добавки, а температура поддерживалась при помощи высокочастотного индукционного генератора. После выдержки в течение некоторого времени (10—60 мин) кориум медленно охлаждался до температуры ~1800°C, далее генератор выключался, и кориум быстро остывал до комнатной температуры. Образовавшиеся слитки оксидной и металлической фаз взвешивались, для различных их частей определялись плотность и состав методами химического и рентгеноструктурного анализа.

Изучению взаимодействия кориума со сталью было посвящено 15 малых экспериментов STFM (с загружаемой массой ~ 500 г) и 4 средних МА (~2 кг). Варьировались:

- молярное соотношение урана и циркония в кориуме  $U/Zr = 1,29—1,60$ ;
- степень окисления циркония в кориуме  $c = 30—100\%$ ;
- масса погружаемого в него железа — 2...20%;
- время выдержки — 10—60 мин.

Кроме того, были проведены также эксперименты с добавлением продуктов распада для изучения их распределения между фазами: 4 малых эксперимента FP и 2 средних МА. Наконец, был проведен один большой эксперимент RCW (с загружаемой массой ~100 кг) с целью исследовать возможные крупномасштабные эффекты, возможные при тяжелой аварии на реакторе.

Согласно более ранним экспериментам, в рамках проекта RASPLAV полностью расплавленный кориум, возникающий при тяжелой аварии, без добавления в него примесей стали однороден. Однако эксперименты MASCA показали, что при попадании в него даже сравнительно небольшого количества железа возникает расслоение на оксидную и металлическую фазы. Металлическую фазу образует железо, практически не растворяющееся в кориуме. Она насыщается также другими металлами, содержащимися в кориуме. Добавление примесей Ni, Cr и продуктов распада принципиально

картину не меняет: возникает то же расслоение на фазы. Компоненты стали Ni и Cr распределяются по фазам сходным образом с Fe: большая их часть попадает в металлическую фазу. Продукты распада распределяются между фазами следующим образом: в металлическую фазу попадают Mo и Ru, в оксидную — Sr, Ba, Ce, La. Таким образом, анализ модельного кориума O-U-Zr-Fe может дать представление и о более реалистичных системах, когда вместо чистого железа в кориум попадает сталь, наряду с U входит Pu (с похожими химическими свойствами), а также имеются в незначительных количествах продукты деления.

Несмотря на то что в топливе уран существует только в виде  $UO_2$ , при смешивании с недоокисленным цирконием кислород переходит к цирконию. В результате образуется металлический уран, способный частично перейти после добавления железа в металлическую фазу. Это существенным образом влияет на плотность металлической фазы: в большинстве экспериментов она оказывалась выше, чем у оксидной фазы, что соответствует инверсному расположению слоев кориума на днище реактора. Явное измерение плотностей проводилось в застывших слитках. При комнатной температуре металлическая фаза в большинстве экспериментов также оказывалась несколько тяжелее оксидной. Высокая плотность металлической фазы может быть объяснена сравнительно малым количеством погружаемого железа, что ведет к достаточно высокой концентрации в этой фазе металлического урана. Однако при большем количестве железа, погружаемого в кориум (>25% по массе), металлическая фаза большей частью состоит из железа и может оказаться более легкой, чем оксидная.

В “большом” эксперименте RCW-100 наблюдалась более сложная картина, чем в экспериментах MA и STFM. Как и в малых экспериментах, оксидная фаза оказалась однородной по высоте, плотность после затвердевания — 9,0—9,2 т/м<sup>3</sup>. Однако металлическая фаза за счет гравитационного эффекта образовалась в виде 15 отдельных вкраплений. Их плотность, измеренная после затвердевания, менялась от слитка к слитку от 9,17 до 10,69 т/м<sup>3</sup>. Наименее плотные металлические слитки наблюдались на поверхности расплава (2,44 кг), наиболее плотные — на дне (4,3 кг), в центральной части было обнаружено 735 г металлической фазы. Распределение продуктов распада по фазам наблюдалось то же, что и в малых экспериментах.

### **3. Модель: функциональная форма**

Для предсказания расслоения кориума на фазы, массы, составы и свойства этих фаз была разработана следующая феноменологическая модель жидкого недоокисленного кориума. Кориум может произвольным образом

раслаиваться на фазы. Каждая фаза представляется в виде однородного раствора молекул U, Zr, Fe, UO<sub>2</sub> и ZrO<sub>2</sub>. Распределение атомов по молекулам, распределение молекул по фазам и количество фаз определяются из условия минимальности потенциала Гиббса системы. Его функциональная форма взята из статьи Шевалье и Фишера [3].

С целью явного задания потенциала Гиббса используем следующие обозначения: верхний индекс  $p = 1, 2$  задает фазу (оксидная или металлическая); нижний индекс  $i, j = 1...5$  нумерует перечисленные выше типы молекул;  $M_i^{(p)}$  — количество молей молекулы  $i$  в фазе  $p$ ;  $M^{(p)}$  — общее число молей молекул в фазе  $p$ ;  $x_i^{(p)} = M_i^{(p)} / M^{(p)}$  — мольная концентрация  $i$ -й молекулы в фазе  $p$ ;  $\mu_i(T)$  — химический потенциал молекулы  $i$  в жидкой фазе при температуре  $T$ ;  $R$  — универсальная газовая постоянная. Потенциал Гиббса системы равен сумме потенциалов фаз:  $G = G^{(1)} + G^{(2)}$ . Потенциал Гиббса фазы  $p$  представляется в виде  $G^{(p)} = G_{id}^{(p)} + G_{ex}^{(p)}$ . Первое слагаемое

$$G_{id}^{(p)} = \sum_i M_i^{(p)} (\mu_i(T) + RT \ln x_i^{(p)}) \quad (1)$$

описывает потенциал идеального раствора. Химические потенциалы чистых веществ  $\mu_i(T)$  брались из термодинамической базы IVTAN THERMO. Второе слагаемое

$$G_{ex}^{(p)} = M^{(p)} \left( \sum_{i,j} x_i^{(p)} x_j^{(p)} L_{ij}(x_i^{(p)}, x_j^{(p)}) + \sum_{i,j,k} x_i^{(p)} x_j^{(p)} x_k^{(p)} L_{ijk}(x_i^{(p)}, x_j^{(p)}, x_k^{(p)}) + \dots \right) \quad (2)$$

является избыточным потенциалом в форме Редлиха — Кистера [7], описывающим отклонения системы от идеальности. Здесь  $L_{ij}(x)$ ,  $L_{ijk}(x)$ , ... — многочлены по концентрациям молекул, коэффициенты которых являются параметрами модели. Избыточный потенциал существенным образом влияет на фазовую диаграмму системы и ответствен, в частности, за возможность расслоения кориума на несмешивающиеся жидкие фазы. В данной модели он содержит 12 отличных от нуля параметров, которые подгонялись под фазовые диаграммы для бинарных и тернарных систем [4], а также под данные из экспериментов STFM 1-16 [8].

Плотности фаз определяются при помощи упрощенной модели, согласно которой объем молекулярного раствора равен сумме объемов составляющих его веществ в чистом виде, а объемы чистых веществ аппроксимируются линейной зависимостью температуры. Модель плотности содержит соответственно 10 параметров. Экспериментальные данные, используемые для их определения, брались из [8, 9].

С целью более полного использования имеющейся экспериментальной информации модель описывает также некоторые твердые фазы сплавов: металлическую с объемно-центрированной решеткой bcc\_A2 и оксидную с гранецентрированной решеткой fcc\_C1. Это потребовало введения еще 12 модельных параметров для потенциала Гиббса и 10 параметров для описания плотности. Описание твердых фаз достаточно упрощенное, поскольку основная цель их введения — лучшее использование экспериментальной информации о жидкой фазе.

Следует подчеркнуть, что данная модель чисто термодинамическая и не описывает явления переноса, испарения железа, неоднородности кориума ввиду гравитационного эффекта и т. п.

#### **4. Модель: реализация**

Для реализации модели был написан код в среде COMPAQ VISUAL FORTRAN. Входными данными являются атомные концентрации каждого химического элемента (O, U, Zr, Fe) и температура. Программа производит поиск глобального условного минимума потенциала Гиббса по массам фаз и концентрациям в них веществ при фиксированном общем количестве молей атомов каждого типа. Минимизация осуществляется методом случайного поиска с последующим нахождением точного минимума пошаговым спуском. Время поиска глобального минимума — порядка 10 с. На выходе выдается количество фаз (одна или две), их составы, массы и плотности. Модель описывает только недоокисленный кориум, который представляется как смесь Fe и  $(U,Zr)O_x$  при  $x = 0 \dots 2$ .

Параметры модели оптимизировались под максимально точное описание результатов экспериментов MASCA и фазовых диаграмм бинарных и псевдобинарных подсистем: O-U, O-Zr, U-Zr,  $UO_2$ -Zr $O_2$ , Fe-U, Fe-Zr. Ввиду противоречивости результатов ряда экспериментов, посвященных бинарным и псевдобинарным системам, эти данные требуют критической оценки с дальнейшим отсеком некоторых из них. Лишь после этой процедуры, требующей знания деталей техники экспериментов, возможна параметризация модели под набор непротиворечивых данных. Такого рода исследование выходит за рамки настоящей статьи. Критическая оценка была проделана в [4], откуда и брались данные для параметризации модели.

“Тройные” параметры (влияющие на вид фазовых диаграмм тернарных подсистем, но не (псевдо)бинарных) в большинстве случаев полагались равными нулю, поскольку экспериментальных данных по многокомпонентным системам достаточно мало. Отличные от нуля параметры подгонялись под эксперименты MASCA.

На рис. 1 показана фазовая диаграмма, иллюстрирующая результаты подгонки параметров модели под экспериментальные данные на примере бинарной системы O-U. Крестиками обозначены отобранные в [4] экспериментальные данные о границах растворимостей. Сплошной линией показаны границы области нестворимости, которые строит параметризованная модель. Как видно, экспериментальные данные описываются удовлетворительно. Однако следует отметить, что перед процедурой параметризации в [2, 4] были по ряду соображений отброшены экспериментальные данные, в которых наблюдалась гораздо более узкая область нествориваемости жидких фаз ( $L_1 + L_2$ ). На этой же диаграмме видно, что высокотемпературных данных о жидкой фазе очень мало и большинство экспериментальной информации относится к кривым солидуса и ликвидуса ( $L_1 - fcc\_C1 + L_1$  и т. д.). По этим данным определялись коэффициенты избыточного взаимодействия U-UO<sub>2</sub>.

Отметим, что в низкотемпературной области реальная фазовая диаграмма имеет более сложный вид, поскольку возможен ряд не описываемых моделью кристаллических решеток. Кроме того, настоящая модель не описывает область  $x_0 > 2/3$  с возможными в ней нестехиометричным UO<sub>2+x</sub> и соединениями U<sub>3</sub>O<sub>8</sub>, U<sub>4</sub>O<sub>9</sub> и т. д.

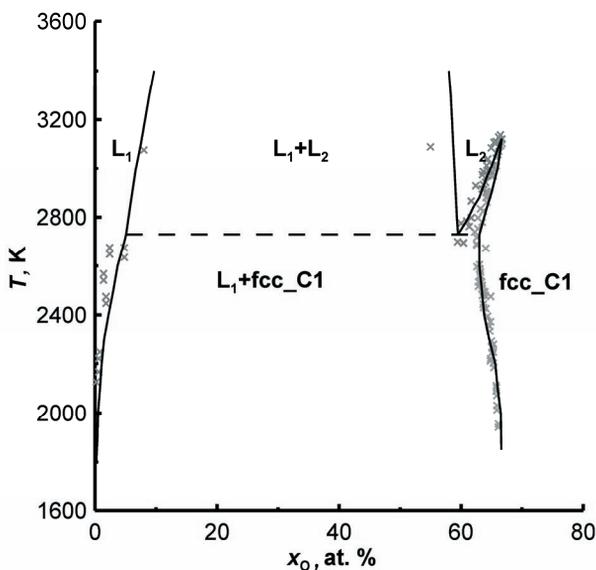


Рис. 1. Фазовая диаграмма системы O-U

Аналогичная оптимизация параметров была проведена и для остальных (псевдо)бинарных систем.

На рис. 2 приведена расчетная тройная диаграмма для системы O-U-Zr при температуре 2773 К. Наиболее важна область L+L, в которой сосуществуют несмешивающиеся оксидная и металлическая жидкие фазы. «Топология» этой области определяется границами растворимости для системы O-U и отсутствием таковой для системы O-Zr. Однако ее протяженность в направлении Zr варьируется «тройными» параметрами  $L_{U-ZrO_2}$  и  $L_{Zr-UO_2}$ . Эти параметры были выбраны таким образом, чтобы при максимально точном описании экспериментов MASCA обеспечить наблюдавшуюся однородность кориумов вида  $UO_2+Zr$ .

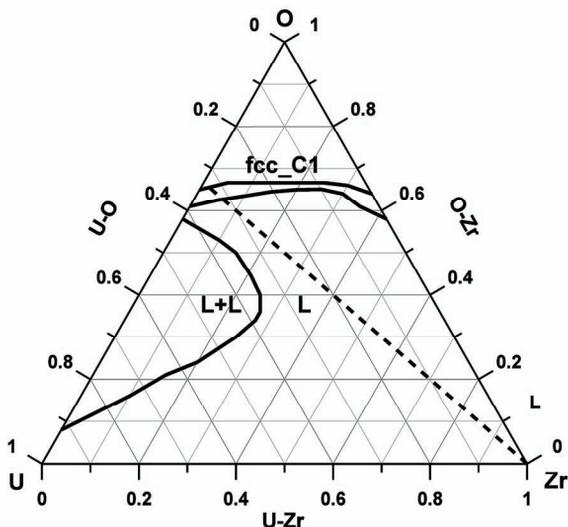


Рис. 2. Тройная диаграмма для системы O-U-Zr при температуре 2773 К

На рис. 3 изображена тройная диаграмма четверной системы O-U-Zr-Fe. Ввиду того, что система при фиксированной температуре имеет три степени свободы, одна из них для изображения на двумерном графике должна быть зафиксирована. Наиболее логично зафиксировать ту степень свободы, которая оказывает наименьшее влияние на вид фазовой диаграммы. Целесообразной в этом отношении представляется фиксация соотношения U/Zr, поскольку, во-первых, они в некоторой степени близки по химическим свойствам и взаимодействию с железом, а во-вторых, соотношение U/Zr в активной зоне известно (и близко к 1 в атомных процентах). Таким образом, по осям диаграммы откладывается количество кислорода, железа и суммарное количество урана и циркония. Пунктирная прямая ограничивает область применимости модели: концентрации элементов левее нее нельзя описать как смесь молекул U,  $UO_2$ , Zr,  $ZrO_2$  и Fe.

На графике изображены составы фаз, наблюдавшиеся в экспериментах MASCA (серые крестики), где температуры изменялись в сравнительно небольшом диапазоне от 2773 до 2923 К, а соотношение  $U/Zr$  — от 0,9 до 1,2. Сплошные линии изображают рассчитанные с помощью модели границы растворимости жидких фаз при  $U/Zr = 0,9$  и  $U/Zr = 1,2$ . Как видно, различие между этими кривыми незначительно (что подтверждает достаточно плавную зависимость фазовой диаграммы от соотношения  $U/Zr$ ), и экспериментально наблюдавшиеся составы фаз близки к модельной границе растворимости, что свидетельствует об удовлетворительном согласии с экспериментом.

Помимо фазовой диаграммы модель со средней точностью 3 атомных процента воспроизводит наблюдавшиеся в эксперименте составы фаз и с точностью 2% — их массы. Воспроизводится также наблюдавшийся в эксперименте эффект образования достаточно массивной металлической фазы при погружении в кориум сравнительно небольшого количества железа. В этом случае в металлической фазе основную массу составляют уран и цирконий. Благодаря указанному эффекту при погружении малого количества железа металлическая фаза может оказаться тяжелее оксидной, что может привести к инверсному расположению слоев кориума при аварии.

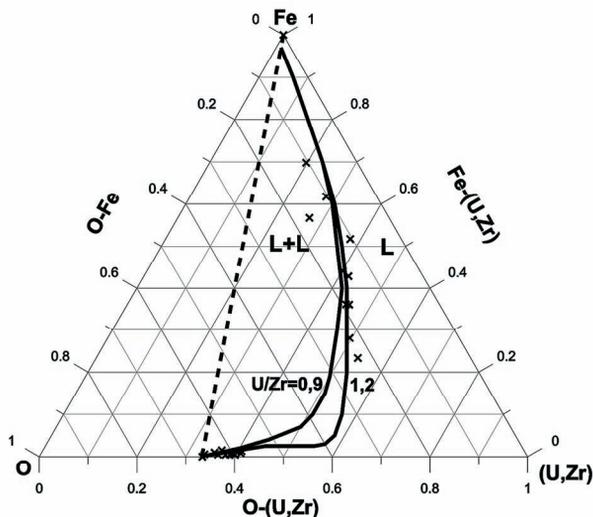


Рис. 3. Система O-U-Zr-Fe: сравнение модели с экспериментами MASCA

## 5. Определение плотностей фаз

Как указывалось выше, плотность кориума  $\rho$  определялась в рамках аддитивной модели:  $\rho = M/V$ , где  $M = \sum M_i x_i$ ,  $V = \sum V_i x_i$ , а индекс  $i = U, UO_2, \dots$  нумерует компоненты. Объем  $i$ -й молекулы описывался линейной функцией температуры:  $V_i = a_i + b_i T$ , где  $a_i, b_i$  — параметры модели, подгонявшиеся под описание плотностей чистых веществ и кориумов из [8, 9]. Для твердой и жидкой фаз использовались различные наборы параметров, поскольку линейная формула не способна воспроизвести скачок объема при фазовом переходе.

Точность определения плотностей фаз определить затруднительно из-за недостатка экспериментальных данных о плотностях расплавов. Для оценки погрешностей был проведен расчет плотностей фаз в застывшем состоянии при комнатной температуре, которые измерялись в экспериментах STFМ. Погрешность модели складывается из двух составляющих: погрешности определения состава фаз  $\Delta\rho_1$  и погрешности определения плотности при заданном составе  $\Delta\rho_2$ . Это позволяет получить представление о погрешностях в определении плотностей. Для холодных фаз средние значения погрешностей таковы:  $\langle \Delta\rho_1 \rangle = 0,14 \text{ т/м}^3$ ,  $\langle \Delta\rho_2 \rangle = 0,18 \text{ т/м}^3$ .

Полные отклонения плотностей холодных фаз, предсказанных моделью, изображены на рис. 4. По оси абсцисс отложены плотности застывших слитков фаз, наблюдавшиеся в эксперименте, по оси ординат — предсказания модели. Крестики соответствуют плотностям оксидных и металлических фаз. Пунктирная прямая соответствует идеальному согласию модели с экспериментом.

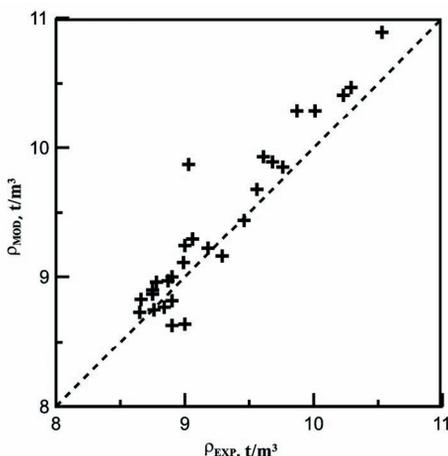


Рис. 4. Плотности остывших фаз — сравнение модели с экспериментом

Для фаз в расплавленном состоянии известны лишь погрешности за счет неточного определения состава:  $\langle \Delta\rho_1 \rangle = 0,12 \text{ т/м}^3$ . Естественно предположить, что  $\langle \Delta\rho_2 \rangle$  примерно того же порядка, поскольку такая ситуация имела место для плотностей холодных фаз.

Другой способ оценки точности вычисления плотностей жидких фаз — априорная оценка возможных отклонений плотностей от предсказаний линейной модели. Как известно, объем идеального раствора описывается линейной моделью, и отклонения — следствие неидеальности. Отклонение молярного объема можно оценивать по формуле  $\Delta V \sim \beta G_{ex}$  [10], где  $\beta$  — изотермический коэффициент объемного сжатия жидкого кориума. Расчеты показали, что  $G_{ex}$  не превосходит 10 кДж/моль, что согласуется с оценкой величины максимальной избыточной энергии  $RT/2$ . Оценивая сверху  $\beta < 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ , получаем  $\Delta V < 1 \text{ см}^3/\text{моль}$ . С учетом того, что молярный объем жидкого кориума  $V \sim 20 \text{ см}^3/\text{моль}$ , получаем погрешность  $\sim 5\%$ , т. е.  $0,4 \text{ т/м}^3$ .

В случае, когда плотности фаз оксидной и металлической фаз достаточно близки ( $\Delta\rho < 0,5 \text{ т/м}^3$ ), эти погрешности могут повлиять на определение более тяжелой фазы. Соответствующая проверка для плотностей твердых фаз показала, что только в одном из 15 экспериментов, используемых для тестирования модели, соотношение плотностей затвердевших фаз при комнатной температуре было предсказано неправильно. Аналогичная картина ожидается и для фаз расплавленного кориума.

## **6. Инверсное расположение слоев**

При попадании расплава на днище корпуса реактора важную роль играет взаимное расположение оксидной и металлической фаз, определяемое соотношением их плотностей. “Нормальному” расположению слоев соответствует ситуация, когда внизу расположена оксидная фаза, а наверху — металлическая. Однако в некоторых случаях, в основном при небольшом количестве стали, возможна ситуация, когда металлическая фаза оказывается более тяжелой и попадает на дно.

Вопрос о составе слоев и возможности их инверсного расположения весьма сложен. Для моделирования этих свойств слоев был сделан ряд допущений. Предполагалось, что система находится в состоянии термодинамического равновесия: все части кориума имеют одну и ту же температуру, а внутри каждой из фаз состав также меняется от точки к точке. Обе фазы предполагались жидкими. Сталь моделировалась как железо.

В рамках данных упрощающих предположений взаимное расположение фаз определяется общим составом кориума и его температурой, т. е. четырьмя независимыми переменными. Однако зависимость составов фаз и соотношения их плотностей от температуры незначительны, а количество циркония и оксида урана фиксированно. Зависимость соотношения плотностей от двух оставшихся переменных (степени окисления циркония и количества железа) можно изобразить графически.

На рис. 5 показана диаграмма при  $T = 2550^\circ\text{C}$  и атомном соотношении  $\text{U}/\text{Zr} = 1$  (это соответствует 79 т  $\text{UO}_2$  и 27 т  $\text{Zr}$ ). По оси абсцисс отложен массовый процент железа в кориуме, по оси ординат — молекулярная доля окисленного циркония (в предположении, что весь уран окислен). Сплошная линия соответствует составам кориума, при которых плотности фаз совпадают. Область справа от нее соответствует нормальному соотношению плотностей ( $\Delta\rho = \rho_{\text{ок}} - \rho_{\text{мет}} > 0$ ), область слева — инверсному. Штриховые линии ограничивают области, где разница плотностей не превышает 5% от плотности  $\text{C30}$   $\rho_0 = 7,5 \text{ т/м}^3$ . Достаточно большой размер этой области показывает, что плотности фаз во многих случаях оказываются весьма близкими и возможно их взаимное проникновение друг в друга. Кроме того, эти линии дают представление о степени точности определения кривой, вдоль которой плотности фаз в точности совпадают.

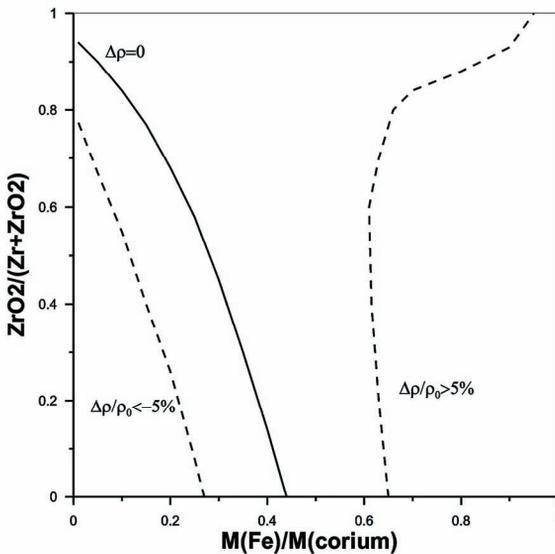


Рис. 5. Соотношение плотностей фаз в зависимости от окисленности Zr и количества Fe

Качественное объяснение возможности инверсного расположения слоев следующее. При попадании в кориум небольшого количества железа оно играет роль катализатора образования металлической фазы. В самой металлической фазе процент железа оказывается в этом случае невысоким (~20%). В основном эта фаза будет состоять из металлического урана и циркония, которые значительно тяжелее своих оксидов, содержащихся в оксидной фазе. При погружении в кориум большого количества железа металлическая фаза должна состоять в основном из железа, которое легче, чем оксид урана. В результате наблюдается нормальное расположение слоев. Для кориума данного состава существует некоторое критическое количество железа, при котором плотности образующихся фаз будут одинаковы. При погружении в него большего количества железа легче оказывается металлическая фаза, при погружении меньшего количества — оксидная.

## **7. Заключение**

Практической целью данной работы было изучение взаимодействия жидкого кориума со сталью при температурах 2800—3000 К, что весьма актуально для описания хода тяжелой аварии с расплавлением активной зоны на реакторе. Характерным эффектом для такой системы в жидком состоянии является расслоение на несмешивающиеся оксидную и металлическую фазы. С целью моделирования этого эффекта была построена термодинамическая модель четырехкомпонентной системы O-U-Zr-Fe. Параметризация модели проводилась на основании результатов экспериментальных исследований в рамках проекта MASCA и известных экспериментальных данных о фазовых диаграммах для бинарных и псевдобинарных подсистем.

Модель воспроизводит наблюдавшиеся в экспериментах эффекты: погружение небольшого количества железа в однородный достаточно сильно окисленный кориум O-U-Zr приводит к выделению металлической фазы. Ее масса может значительно (в 5—10 раз) превосходить массу железа, которое составляет лишь небольшую часть металлической фазы. С помощью модели были построены фазовые диаграммы, позволяющие определять границы растворимости фаз.

Практически важным является вопрос о плотностях фаз, поскольку от того, будет ли более тяжелой оксидная фаза или металлическая, зависят их расположение на днище реактора и сценарий развития событий при аварии. В рамках упрощенной (линейной) модели плотностей было показано, что ситуация с инверсным расположением слоев вполне возможна: при погружении малого количества железа металлическая фаза оказывается тяжелее

оксидной. Кроме того, предсказывается сравнительно широкая область составов системы, при которых плотности фаз будут весьма близкими, что приводит к неопределенности в описании гидродинамики расплава.

Следует отметить, что модель дает лишь некоторое представление о реальной системе. Более глубокого изучения заслуживают возможные эффекты, возникающие при “замене” железа на сталь. Фазы могут оказаться неоднородными вследствие гравитационного эффекта. Термодинамическое равновесие существует лишь теоретически, поскольку в оксидной фазе происходит тепловыделение при сравнительно невысокой теплопроводности. Кроме того, при описываемых температурах возможно интенсивное испарение железа из кориума. Исследование этих и ряда других эффектов планируется на будущее.

Авторы благодарны В. Ф. Стрижову и А. С. Филиппову за плодотворные дискуссии и помощь в работе.

## Литература

1. *Gueneau G., Baichi M., Labroche L.* et al. Thermodynamic assessment of the uranium-oxygen system // J. of Nuclear Materials. 2002. 304. P. 161.
2. *Chevallier P. Y., Fischer E., Cheynet B.* Progress in the thermodynamic modeling of the O-U binary system // J. of Nuclear Materials. 2002. 303. P. 1.
3. *Chevallier P. Y., Fischer E.* Thermodynamic modeling of the O-U-Zr system // J. of Nuclear Materials. 1998. 257. P. 213.
4. *Cheyne B. Chaud P., Chevallier P. Y.* et al. Thermodata documentation. [S. l.], 2005.
5. RASPLAV Application Report // QECD RASPLAV SEMINAR, Munich. [S. l.], 2000.
6. Main Results of the First Phase of MASCA Project: Integrated report. [S. l.], 2004.
7. *Redlich O., Kister A.* // Ind. Eng. Chem. 1948. 40. P. 345.
8. *Вишневецкий В. Ю., Загряжкин В. Н.* и др. Протокол экспериментов STFM Fe №2-16. [Б. м.], 2001.
9. *Strizhov V. F.* et al. Development of a database for thermo-physical properties of corium: pure components: Report on the Project 3078p, Task 1,1. [S. l.], 2006.
10. *Шахпаронов М. И.* Введение в молекулярную теорию растворов. [Б. м.]: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956.

Научное издание

**Труды ИБРАЭ РАН**

*Под общей редакцией чл.-кор. РАН Л. А. Большова*

Выпуск 8

**СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ И  
ТЕПЛОТДАЧА ЖИДКОСТИ  
С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА**

*Утверждено к печати Ученым советом  
Института проблем безопасного развития атомной энергетики  
Российской академии наук*

Редактор *А. И. Иоффе*

Издательство «Наука»  
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90  
Зав. редакцией *М. В. Грачева*

Оригинал-макет подготовлен издательством ООО «Комтехпринт»  
Иллюстрации приведены в авторской редакции

Сдано в набор 17 октября 2008 г. Подписано в печать 17 ноября 2008 г.

Формат 60 x 90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная 80 г/м<sup>2</sup>

Печать офсетная. Гарнитура «Офисина»

Уч.-изд. л. 23. Тираж 500. Заказ 18076

Заказное

Отпечатано с готовых диапозитивов типографией ООО «Инфолио-Принт»