



*Российская Академия Наук*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ  
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY  
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2001-02

Preprint IBRAE-2001-02

**А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, А.Д. Васильев, С.Ф. Крылов,  
В.А. Первичко, В.В. Чуданов**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ С  
УЧЕТОМ ПЕРЕИЗЛУЧЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ  
ПОЛОСТИ**

Москва  
2001

Moscow  
2001

УДК 536.24

Аксенова А.Е., Вабишевич П.Н., Васильев А.Д., Крылов С.Ф., Первичко В.А., Чуданов В.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ПЕРЕИЗЛУЧЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ПОЛОСТИ. Препринт № IBRAE-2001-02. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2001. 30 с.

#### Аннотация

В работе описывается решение задачи теплообмена с учетом излучения. Обсуждаются особенности численной реализации указанной задачи в двумерной постановке для неодносвязной полости. Основные выражения для угловых коэффициентов получены впервые. Приводятся результаты тестирования развитого подхода.

©ИБРАЭ РАН, 2001

Aksenova A.E., Vabishchevich P.N., Vasilev A.D., Krylov S.F., Pervichko V.A., Chudanov V.V. NUMERICAL SIMULATION OF THE THERMAL PROCESSES WITH TAKING INTO ACCOUNT OF RERADIATION ON THE CAVITY BOUNDARY (in Russian). Preprint № IBRAE-2001-02. Moscow: Nuclear Safety Institute RAS, January 2001. 30 p.

#### Abstract

The solution for the heat exchange problem with taking into account the reradiation in the cavity is described in this paper. The basic features of numerical realization of the 2D–problem for multiply connected region are discussed. The basic expressions for view factors are obtain for the first time. The test results of the approach developed are also presented.s

©Nuclear Safety Institute, 2001

# Моделирование тепловых процессов с учетом переизлучения на границе полости

*А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, А.Д. Васильев, С.Ф. Крылов,  
В.А. Первичко, В.В. Чуданов*

ИБРАЭ РАН, Б. Тульская 52, 113191 Москва

## Введение

Разработка новых атомных энергетических установок (станций) (АЭС), потребовала пристального внимания к вопросу запроектных тяжелых аварий, достаточно редких, но сопровождающихся разрушением активной зоны (АЗ) реактора и плавлением топлива.

Одной из возможных мер по прекращению такой аварии, является локализация и захлаживания расплава активной зоны после проплавления корпуса реактора в устройстве удержания (локализации) расплава (УЛР). Подобные конструкции получили также название кориумных ловушек, которые в настоящее время активно изучаются с целью включения их в проекты будущих АЭС.

Экспериментальные исследования процессов захлаживания расплава в кориумной ловушке, в условиях имитирующих аварийную ситуацию, характеризуются большой степенью неопределенности технологических параметров (сценарий аварии, режим подачи мощности, свойства материалов) и значительными затратами по их проведению. В связи с чем все больше возрастает роль численных исследований подобных процессов.

Для обоснования возможности удержания расплава в УЛР была разработана математическая модель для стадии захлаживания кориумной массы в ловушке вследствие излучения тепла с поверхности расплава.

В работе излагается особенности решения задачи теплообмена с учетом переизлучения при различных граничных условиях. Рассматривается редукция осесимметричной задачи к задаче с плоской кривой. Обсуждаются особенности численной реализации дискретной задачи и приводятся результаты тестирования развитого подхода. Представлены также примеры расчетов, выполненных в рамках совместных работ с АЭП, по оценке тепловых нагрузок в окружающих расплав конструкциях УЛР.

## 1. Граничная задача теплообмена с учетом излучения

Перенос тепла теплопроводностью в твердом теле, занимающем область  $D$ , при наличии объемного источника энергии, описывается уравнением

$$c_p(T)\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k(T)\operatorname{grad}(T)) + f(t), \quad x \in D \quad (1)$$

где  $T$  – температура,  $c_p(T)$  - удельная теплоемкость,  $\rho$  - плотность,  $k(T)$  - коэффициент теплопроводности,  $f(t)$  - скорость объемного тепловыделения.

Учитывая на границе  $\Gamma$  области  $D$  только собственное излучение и конвективный теплообмен с окружающей средой, граничные условия можно представить в виде:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_c) + \varepsilon \sigma T^4, \quad x \in \Gamma \quad (2)$$

где  $T_c$  - температура окружающей среды,  $\varepsilon(T)$  – коэффициент излучательной способности материала области  $D$ ,  $\sigma$  - постоянная Стефана - Больцмана,  $n$  – внешняя нормаль к  $\Gamma$ .

Граничное условие (2) выполняется, если окружающая среда является абсолютно прозрачной и граница  $\Gamma$  выпукла, либо окружающая среда является абсолютно черным телом и не излучает, т.е. находится при низкой температуре  $T_c$ .

Рассмотрим граничные условия для следующих важных случаев:

1. прозрачной внешней среды и невыпуклой границы (или когда область  $D$  не является связной),
2. непрозрачной внешней среды при неидеальном тепловом контакте с телом.

Чтобы вместо (2) поставить граничные условия для указанных случаев, необходимо воспользоваться законом сохранения энергии.

## 1.1 Граничные условия на невыпуклой границе

Рассмотрим первый случай. Если граница  $\Gamma$  невыпукла (или когда область  $D$  не является связной и представляет собой несколько тел, ограниченных замкнутыми поверхностями), то она образует замкнутые и незамкнутые полости.

Для отдельных частей границы, из которых остальные участки границы невидимы, возможна постановка граничных условий в виде (2), когда излучение на границе зависит только от температуры в данной точке границы (локальные граничные условия).

Если же между элементами границы осуществляется перенос тепла излучением (переизлучение), то плотность теплового потока в данной точке границы будет зависеть от температуры всех элементов границы, видимых из данной точки (нелокальные граничные условия).

Обозначим через  $\Gamma_1$  ту часть границы, которая образует полости, и на которой происходит переизлучение. Пренебрегая излучением окружающей среды, для части границы  $\Gamma_1$ , граничные условия запишем в виде

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_c) + q(x), \quad x \in \Gamma_1 \quad (3)$$

Радиационный поток в (3) определяется соотношением:

$$q(x) = q^-(x) - q^+(x) \quad (4)$$

где  $q^-(x)$  - плотность потока энергии излучения, исходящего от поверхности,  $q^+(x)$  - плотность потока излучения, падающего от остальных частей поверхности,  $q(x)$  - плотность результирующего потока.

Будем считать излучение от элемента поверхности изотропным, т.е., что угловая плотность потока с единицы площади поверхности с точкой  $\xi$  в единицу телесного угла не зависит от направления излучения, определяемого углом  $\theta_\xi$  между нормалью к излучающей площадке и направлением излучения (закон Ламберта):  $I_{\theta_\xi} = I(\xi)$ . Тогда плотность потока излучения, исходящего от единичной площадки с нормалью в точке  $\xi$  в направлении этой нормали, равна:

$$q^-(\xi) = \int_{2\pi} I_{\theta_\xi} \cos(\theta_\xi) d\Omega = I(\xi)\pi$$

Откуда  $I(\xi) = q^-(\xi)/\pi$ .

Падающий на единичную площадку с точкой  $x$  поток  $dq^+(x)$  из направления, перпендикулярного этой площадке, и определяемого точкой  $\xi$  и элементом телесного угла  $d\Omega$ , под которым виден из точки  $x$  элемент излучающей поверхности, равен:  $dq^+(x) = I(\xi) d\Omega = q^-(\xi)/\pi d\Omega$ . Если единичная площадка не перпендикулярна направлению  $\xi$ , то на нее упадет поток  $dq^+(x) = q^-(\xi)/\pi d\Omega \cos\theta_x$ , где  $\theta_x$  – угол между нормалью к единичной площадке с точкой  $x$  и направлением  $\xi$ .

Падающий на единичную площадку поток  $q^+(x)$  находится интегрированием выражения  $q^-(\xi)/\pi d\Omega \cos\theta_x$  по всем направлениям, из которых падает излучение, с суммарным углом  $\Omega_l$ . Переходя к интегрированию по видимым из точки  $x$  поверхностям, будем иметь:

$$q^+(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1} \cos\theta_x q^-(\xi) d\Omega = \int_{\Gamma_1} \frac{\cos\theta_x \cos\theta_\xi}{\pi r^2} q^-(\xi) d\xi, \quad x \in \Gamma_1$$

где  $r$  – расстояние между точками  $x$  и  $\xi$ ,  $d\xi$  – элемент площади поверхности.

Будем считать, что поглощение и отражение происходит на поверхности и, кроме того, излучение не проходит через твердое тело. Тогда баланс энергии для падающего на поверхность потока имеет вид:  $q^+ = q^{noz} + q^{omp}$ . Поделив левую и правую часть на падающий поток, получим:  $1 = A + R$ , где  $A$  – коэффициент поглощения,  $R$  – коэффициент отражения. Если коэффициент поглощения известен, то  $q^{omp} = (1 - A) q^+$ . В равновесных системах по закону Кирхгофа коэффициент поглощения равен коэффициенту излучательной способности  $A = \varepsilon$ . Примем это значение для коэффициента поглощения. Тогда  $R = 1 - \varepsilon$ .

Таким образом, чтобы вычислить отраженный поток, нужно падающий поток умножить на  $(1 - \varepsilon)$ :  $q^{omp} = (1 - \varepsilon) q^+$ . Все потоки отнесены к единице площади поверхности.

Исходящий поток  $q^-(x)$  складывается из собственного потока  $\varepsilon\sigma T^4(x)$  и отраженного  $(1 - \varepsilon) q^+(x)$ . Следовательно, при известной температуре  $T$  на границе полости, исходящий поток  $q^-(x)$  определяется из интегрального уравнения

$$q^-(x) - (1 - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} G(x, \xi) q^-(\xi) d\xi = \varepsilon\sigma T^4 \quad x \in \Gamma_1 \quad (5)$$

где интегрирование проводится по площади поверхности полости. Ядро этого интегрального уравнения определяется выражением

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\pi r^2(x, \xi)} \cos(n(x), r) \cos(n(\xi), r) \quad (6)$$

где  $r(x, \xi)$  – расстояние между точками  $x$  и  $\xi$ , а  $\cos(n(x), r)$  – косинус угла между нормалью к  $\Gamma_1$  в точке  $x$  и отрезком, соединяющим точки  $x$  и  $\xi$ . Поток  $q^+$  определяется выражением

$$q^+(x) = \int_{\Gamma_1} G(x, \xi) q^-(\xi) d\xi \quad x \in \Gamma_1 \quad (7)$$

Задание начальных условий для температуры в области  $D$

$$T|_{t=0} = T^0 \quad (8)$$

завершает постановку задачи теплообмена (1)-(8) для случая прозрачной внешней среды с учетом переизлучения на границе, при условии, что все необходимые свойства материалов заданы.

Используем уравнение (5) для получения локальных граничных условий в случае непрозрачной внешней среды с излучательной способностью  $\varepsilon_c$  и температурой  $T_c$ .

## 1.2 Переизлучение в узком зазоре

Второй случай граничных условий можно получить из первого при помощи предельного перехода.

Если окружающая среда является твердым телом, то между телом  $D$  и окружающей средой, при отсутствии излучения, осуществляется неидеальный тепловой контакт с разрывом по температуре на краях зазора.

Считая, что зазор представляет собой плохо проводящую прослойку, толщина которой вместе с теплопроводностью стремится к нулю, можно показать [1], что условия контактного теплообмена на участке границы  $\Gamma_2$  области  $D$  без учета излучения аналогичны условию конвективного теплообмена (3) при  $q = 0$  и имеют вид

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_c), \quad x \in \Gamma_2$$

где  $\alpha = \kappa_n / \delta$ ,  $\kappa_n$  – коэффициент теплопроводности прослойки,  $\delta$  – толщина прослойки. Тепловой поток непрерывен при переходе через зазор.

Поскольку окружающая среда непрозрачна, дополнительно будем предполагать, что прослойка прозрачна и процессы переизлучения протекают на примыкающих к прослойке поверхностях тела  $\Gamma_2$  и внешней среды  $\Gamma_c$ . Найдем радиационный поток  $q$  на краях зазора.

Включим в контур интегрирования в уравнении (5)  $\Gamma_2$  – границу раздела между телом  $D$  и тонкой прослойкой и границу  $\Gamma_c$  – границу раздела между прослойкой и внешней средой. Тогда для двух точек, лежащих на пересечении внешней нормали к  $\Gamma_2$  с границами  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_c$  уравнение (5) запишется в виде системы из двух уравнений:

$$\begin{aligned} q^- - (1 - \varepsilon) \left( \int_{\gamma} G(x, \xi) q^- d\xi + \int_{\gamma_c} G(x, \xi) q_c^- d\xi \right) &= \varepsilon \sigma T^4 \\ q_c^- - (1 - \varepsilon_c) \left( \int_{\gamma} G(x_c, \xi) q^- d\xi + \int_{\gamma_c} G(x_c, \xi) q_c^- d\xi \right) &= \varepsilon_c \sigma T_c^4 \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\gamma$  и  $\gamma_c$  – близко расположенные окрестности рассматриваемых точек, кривизной которых можно пренебречь. При стремлении расстояния между поверхностями к нулю остальные участки границ вклада в интегрирование не дают.

В первом уравнении системы (9) первый член в скобках и второй член в скобках во втором уравнении равны нулю, поскольку равен нулю угол, под которым видна собственная окрестность каждой точки. Переходя к интегрированию по телесному углу, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} q^- - (1 - \varepsilon) q_c^- &= \varepsilon \sigma T^4 \\ q_c^- - (1 - \varepsilon_c) q^- &= \varepsilon_c \sigma T_c^4 \end{aligned} \quad (10)$$

Решение системы (10) имеет вид:

$$q_c^- = \frac{\varepsilon_c \sigma T_c^4 + \varepsilon(1 - \varepsilon_c) \sigma T^4}{\varepsilon + \varepsilon_c - \varepsilon \varepsilon_c}, \quad q^- = \frac{\varepsilon \sigma T^4 + (1 - \varepsilon) \varepsilon_c \sigma T_c^4}{\varepsilon + \varepsilon_c - \varepsilon \varepsilon_c} \quad (11)$$

Результирующий поток излучения на  $\Gamma_2$ :

$$q = q^- - q^+ = q^- - q_c^- = \frac{\sigma(T^4 - T_c^4)}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_c} - 1} \quad (12)$$

Радиационный поток непрерывен на краях зазора, поскольку поток на  $\Gamma_c$  относительно выбранной нормали к  $\Gamma_2$  равен:  $-(q_c^- - q_c^+) = -(q_c^- - q^-) = q$ .

Выражения (11) – (12) совпадают с решением для задачи переизлучения на двух бесконечных параллельных плоскостях с различными температурами, где поток не зависит от расстояния между плоскостями.

Учитывая радиационный поток (12) и контактный теплообмен на краях зазора, получим локальное граничное условие на  $\Gamma_2$  для уравнения теплопроводности в следующем виде:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_c) + \frac{\sigma(T^4 - T_c^4)}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_c} - 1}, \quad x \in \Gamma_2 \quad (12')$$

Такое же выражение для теплового потока имеет место на другом краю зазора. Из чего следует, что тепловой поток непрерывен при переходе через зазор.

Граничное условие для жидкой окружающей среды будет иметь вид, аналогичный (12'). Действительно, если окружающая среда является непрозрачной жидкостью, то, без учета излучения, граничное условие имеет вид (3) при  $q = 0$  и является условием конвективного теплообмена. Если дополнительно предположить наличие тонкого прозрачного жидкого слоя на границе  $\Gamma_2$ , то граничное условие для уравнения теплопроводности на  $\Gamma_2$  будет иметь вид (3) с выражением для радиационного потока  $q$  в виде (12).

Таким образом, в случае непрозрачной внешней среды (жидкой или твердой) с прозрачным тонким слоем на участке границы  $\Gamma_2$ , граничные условия для уравнения теплопроводности можно представить в виде (12').

Если внешняя среда – охлаждающая жидкость и не является черным телом, то граничные условия в виде (12') использовать затруднительно из-за неопределенности коэффициента излучающей способности. В этом случае используют эффективный коэффициент теплопередачи, зависящий от температуры.

Рассмотрим предельные случаи граничного условия (12') на  $\Gamma_2$ .

Если, например, окружающая среда – черное тело  $\varepsilon_c = 1$  или  $\varepsilon_c \gg \varepsilon/(1+\varepsilon)$ , то граничное условие (3) имеет вид:

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_c) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_c^4), \quad x \in \Gamma_2 \quad (13)$$

Если при этом  $T_c^4 \ll T^4$ , то получим граничное условие в виде (2).

Это означает, что граничное условие (2) соответствует, например, условиям охлаждения твердого тела непрозрачной (черной) неизлучающей жидкостью. При этом потери тепловой энергии тела на излучение максимальны.

Граничное условие (2) соответствует также условиям охлаждения твердого тела с выпуклой границей в случае прозрачной внешней среды. Действительно, полагая в граничных условиях (3–5) для прозрачной внешней среды границу  $\Gamma_1$  выпуклой, получим, что падающий поток  $q^+$  равен нулю и полный поток равен собственному, следовательно, граничные условия имеют вид (2).

В силу непрерывности теплового потока выражение (12') является условием сопряжения на краях зазора для двух сред. Записанное в виде

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha[T] + \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} [T^4]$$

условие сопряжения можно использовать при решении уравнения теплопроводности в зазоре конечной ширины, используя значение эффективного коэффициента теплопроводности для учета излучения. Поток тепла через зазор обеспечивается скачком температуры.

В общем случае поглощение и излучение энергии происходит не только на поверхностях, но и в среде, заполняющей полость, и тогда это необходимо учитывать при постановке условий на границах полости.

## 2. Дискретизация двумерной области и уравнений

Для задания расчетной сетки двумерная область  $D$  разбивается на криволинейные четырехугольники либо граничащие между собой по полной стороне, либо вовсе не имеющие общих границ. В каждой четырехугольной подобласти строится четырехугольная сетка так, чтобы на общей границе двух подобластей граничные узлы одной подобласти совпадали с граничными узлами другой подобласти.

Такой подход обеспечивает простой способ задания четырехугольной расчетной сетки в областях сложной формы как набор сеточных блоков, состоящих из четырехугольных ячеек.

Граница области  $D$  аппроксимируется сторонами блоков. Те части границы, которые обращены друг к другу, могут образовывать как замкнутые, так и незамкнутые полости и на них задаются нелокальные граничные условия переизлучения, рассмотренные выше.

В области  $D$  на основе вариационного принципа строится неявная разностная схема для уравнения (1). Условие минимума дискретного аналога функционала, полученного умножением уравнения (1) на произвольную вариацию температуры и интегрированием по  $D$ , дает уравнения для нахождения сеточной функции температуры во внутренних узлах и тех граничных узлах, где заданы дискретные аналоги локальных граничных условий.

Не касаясь пока метода решения уравнения теплопроводности в области  $D$  отметим, что дискретизация области  $D$  автоматически приводит к дискретизации ее границы, хотя для решения уравнения (5) граница  $\Gamma_j$  может аппроксимироваться независимо.

Для согласованного решения уравнения теплопроводности на криволинейных сетках блочной структуры с уравнением для переизлучения на границе полости  $\Gamma_j$  необходимо аппроксимировать уравнение (5).

Аппроксимация интегрального уравнения (5) проводится на основе интегро – интерполяционного метода. В качестве точек разбиения границы  $\Gamma$  выберем граничные узлы расчетной сетки для уравнения теплопроводности.

Проинтегрируем уравнение (5) по каждому элементу границы  $\gamma_i$  – поверхности, образованной отрезком, соединяющим соседние граничные узлы на  $\Gamma_j$ :

$$\int_{\gamma_i} q^-(x) dx - \int_{\gamma_i} (1 - \varepsilon(x)) \int_{\Gamma_j} G(x, \xi) q^-(\xi) d\xi dx = \sigma \int_{\gamma_i} \varepsilon(x) T^4 dx$$

Будем аппроксимировать функции: излучательную способность, температуру и поток излучения на элементах границы постоянными значениями. В теории теплообмена излучением такой подход принято называть зональным методом. Тогда значение перечисленных функций в любой точке элемента  $\gamma_i$  будет

равно среднему значению по элементу:  $q_i^- = \frac{1}{mes \gamma_i} \int_{\gamma_i} q^-(\xi) d\xi$ . Узловые точки для сеточных функций

определим в серединах элементов.

В результате интегрирования, разделив обе части уравнения на площадь элемента, получим уравнение для сеточной функции средней плотности потока исходящего излучения:

$$q_i^- - (1 - \varepsilon_i) \sum_k \varphi_{ik} q_k^- = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (14)$$

где величины

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{mes \gamma_i} \int_{\gamma_j} dx \int_{\gamma_i} G(x, \xi) d\xi \quad (15)$$

называются угловыми коэффициентами и определяют условия теплообмена излучением между элементами поверхности  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$ .

Рассмотрим свойства уравнения (5) и полученной системы сеточных уравнений (14, 15).

Из неотрицательности  $G(x, \xi)$  следует неотрицательность угловых коэффициентов  $\varphi_{ij}$ .

Интегральное уравнение (5) при  $(1 - \varepsilon) > 0$  приводится заменой  $\tilde{q}^- = q^- / \sqrt{(1 - \varepsilon)}$  к так называемому уравнению с симметричным ядром и, кроме того, это ядро неотрицательно. Соответствующая преобразованному уравнению система алгебраических уравнений приводится к системе, матрица которой симметрична и положительна при условии  $0 < (1 - \varepsilon_i) < 1$ . Такое преобразование может быть полезно при выборе метода решения системы (14).



Отметим еще одно свойство ядра (6) и вытекающее из него свойство угловых коэффициентов. Проинтегрируем (6) по всей границе. Переходя к интегрированию по телесному углу, получим:

$$\int_{\Gamma_1} G(x, \xi) d\xi \leq 1, \quad x \in \Gamma_1,$$

причем равенство выполняется, если граница  $\Gamma_1$  замкнута.

Для угловых коэффициентов имеем:

$$\sum_j \varphi_{ij} = \frac{1}{mes \gamma_i} \int_{\gamma_i} dx \sum_j \int_{\gamma_j} G(x, \xi) d\xi = \int_{\Gamma_1} G(x, \xi) d\xi \leq 1$$

Покажем, что для системы (14) справедлив принцип максимума, из которого следует ее однозначная разрешимость при условии  $0 < (1 - \varepsilon_i) < 1$ .

Представим сеточные уравнения (14) в операторном виде:

$$\Lambda y(x) = F(x)$$

где оператор  $\Lambda$  действует в пространстве сеточных функций и задается выражением

$$\Lambda y(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}(x)} B(x, \xi)y(\xi)$$

$\mathcal{M}(x)$  – шаблон узла  $x$  без точки  $x = x_i$ .

Введем обозначение

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}(x)} B(x, \xi)$$

Условиями для справедливости принципа максимума являются неравенства:

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) \geq 0$$

Для системы (14) имеем

$$A(x) = 1 - (1 - \varepsilon_i)\varphi_{ii}, \quad B(x, \xi) = (1 - \varepsilon_i)\varphi_{ij}, \quad D(x) = 1 - (1 - \varepsilon_i)\sum_j \varphi_{ij}$$

Поскольку коэффициенты  $\varphi_{ij}$  неотрицательны и каждый элемент не является замкнутой поверхностью ( $\varphi_{ii} < 1$ ), то первое условие выполнено для всех  $i$ . Достаточно рассмотреть только второе и третье условие для принципа максимума. Второе удовлетворяется, если для всех  $i$  выполнено неравенство

$$(1 - \varepsilon_i) > 0,$$

и хотя бы для одного значения  $j$  при фиксированном  $i$  должно быть выполнено неравенство

$$\varphi_{ij} > 0.$$

Третье условие для принципа максимума должно быть выполнено хотя бы в одной точке и равносильно неравенству

$$(1 - \varepsilon_i) < 1.$$

Полученные условия однозначной разрешимости можно ослабить. Пусть для некоторых значений  $i$  при всех значениях  $j$  выполнено условие  $\varphi_{ij} = 0$  либо  $(1 - \varepsilon_i) = 0$ . Тогда у матрицы системы (14) в строке  $i$  все элементы равны нулю, кроме диагонального, который равен единице. Решение в данной точке единственно и совпадает с правой частью соответствующего уравнения системы. Для остальных точек выполнены условия однозначной разрешимости, которые фигурируют в принципе максимума.

Поскольку все возможные значения  $\varepsilon_i$  находятся на интервале  $[0, 1]$ , то это означает, что единственного решения может не быть лишь при  $\varepsilon_i = 0$  для всех  $i$ .

Таким образом, показано, что система (14) имеет единственное решение при любой правой части при условии  $(1 - \varepsilon_i) < 1$  хотя бы в одной точке.

При нарушении этого условия система становится однородной. Ее решением является нулевой поток на всех элементах поверхности. Это соответствует отсутствию собственного излучения на всех элементах поверхности при  $\varepsilon_i = 0$ . Если число  $1$  не является собственным значением матрицы  $\varphi_{ij}$ , то решение единственно и в случае  $(1 - \varepsilon_i) = 1$  для всех  $i$ . Иначе ненулевые решения есть. Теорема о неподвижной точке дает достаточные условия в виде незамкнутости поверхности полости:  $\sum_j \varphi_{ij} < 1$ .

Из принципа максимума следует также, что решение системы (14)  $q_i^- \geq 0$ , поскольку правая часть неотрицательна. Это следствие консервативного метода построения дискретной задачи.

### Излучение и поглощение среды, заполняющей полость

Если полость заполнена газом с температурой  $T_g$ , то вместо (14) уравнения для потоков на границе должно иметь вид [2,3]:

$$q_i^- - (1 - \varepsilon_i) \sum_k \varphi_{ik}^{\text{mod}} q_k^- = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) \sigma T_g^4 \sum_k \varepsilon_{gik} \varphi_{ik}$$

где

$$\varphi_{ik}^{\text{mod}} = \frac{1}{\text{mes} \gamma_i} \int_{\gamma_j} dx \int_{\gamma_i} G^{\text{mod}}(x, \xi) d\xi$$

$$G^{\text{mod}}(x, \xi) = G(x, \xi) \exp(-\lambda_g r(x, \xi))$$

Выражение для  $\varphi_{ik}^{\text{mod}}$  аппроксимируется следующим образом:

$$\varphi_{ik}^{\text{mod}} = \varphi_{ik} \exp(-\lambda_g r_{ik})$$

где  $r_{ik}$  – среднее расстояние между элементами поверхности  $\gamma_i, \gamma_k$ . Величина  $\varepsilon_{gik}$  имеет вид:

$$\varepsilon_{gik} = 1 - \exp(-\lambda_g r_{ik})$$

## 3. Редукция к задаче с плоской кривой

Несмотря на осевую или плоскую симметрию, в двумерной геометрии уравнение для переизлучения (14) и выражение для угловых коэффициентов (15) содержит поверхностное интегрирование. Чтобы свести задачу к задаче с плоской кривой, необходимо понизить порядок интегрирования в выражении (15).

В случае плоской симметрии замена криволинейных границ области  $D$  отрезками приводит к задаче переизлучения между плоскими полосами конечной ширины и бесконечной длины.

В осесимметричном случае после определения в области  $D$  расчетной сетки поверхность полости оказывается разбитой на концентрические кольца конической формы.

Если (15) не будет содержать кратных интегралов, то задача сведется к решению (14 – 15), где все действия относятся к элементам плоской кривой.

Итак, после дискретизации расчетной области излучающими элементами являются поверхности, сечениями которых в координатной плоскости  $(x, y)$  или  $(r, z)$  являются конечные отрезки. Но даже для

таких поверхностей в общем случае нет аналитических выражений для угловых коэффициентов, поэтому используются приближения тонких полос и тонких колец.

### 3.1 Приближение тонких полос. Точная формула для широких полос

Рассмотрим задачу переизлучения между двумя тонкими бесконечно длинными полосами, расположенными вдоль оси  $z$ , имеющими площади  $dS_i$  и  $dS_k$  (рис 1).

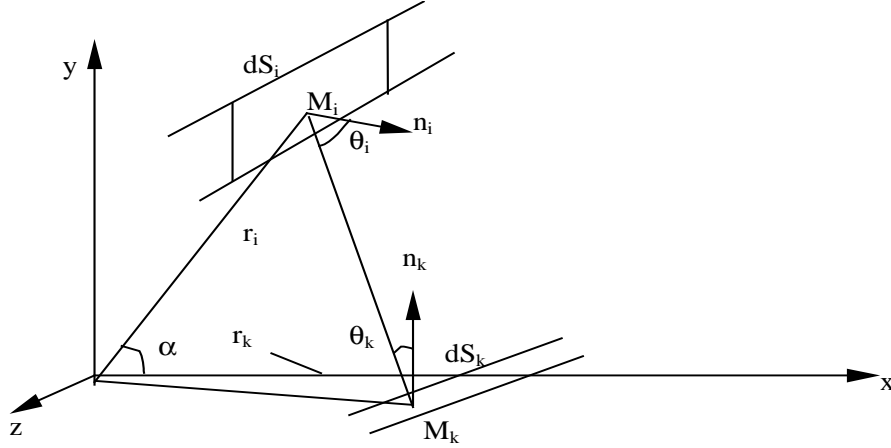


Рис. 1. Геометрические параметры для тонких полос

Угловой коэффициент для  $\delta_i, \delta_k \ll r_{ik}$  вычисляется по формуле:

$$\varphi_{ik} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\pi} \int_{-L}^L \frac{\cos \theta_i \cos \theta_k}{r_{ik}^2} dz \quad (16)$$

где  $\delta_k$  – ширина полосы. Координаты точек  $M_i = (r_i \cos \alpha, r_i \sin \alpha, 0)$ ,  $M_k = (r_k, 0, z)$ . Координаты нормалей  $n_i = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$ ,  $n_k = (0, 1, 0)$ . Координаты вектора  $M_i M_k = (r_k - r_i \cos \alpha, -r_i \sin \alpha, z)$ . Квадрат расстояния между полосами  $r_{ik0}^2 = r_i^2 + r_k^2 - 2r_i r_k \cos \alpha$ , квадрат расстояния между точками  $M_i$  и  $M_k$ :

$$r_{ik}^2 = r_{ik0}^2 + z^2. \text{ Тогда } \cos \theta_i = \frac{(r_k - r_i \cos \alpha) \sin \alpha + r_i \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{r_{ik0}^2 + z^2}} = \frac{r_k \sin \alpha}{r_{ik}}, \cos \theta_k = \frac{r_i \sin \alpha}{r_{ik}}.$$

Подставляя вычисленные величины в (16) получим:

$$\varphi_{ik} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\pi} r_i r_k \sin^2 \alpha \int_{-L}^L \frac{1}{(r_{ik0}^2 + z^2)^2} dz = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\pi} \frac{r_i r_k \sin^2 \alpha}{r_{ik0}^3} \int_{-L/r_{ik0}}^{L/r_{ik0}} \frac{1}{(1 + z^2)^2} dz$$

Интеграл справа равен  $\pi/2$ , следовательно

$$\varphi_{ik} = \delta_k \frac{\cos \theta_{i0} \cos \theta_{k0}}{2r_{ik0}} \quad (17)$$

где величины с индексом 0 вычислены при  $z = 0$ . Формула (17) справедлива при  $\delta_i, \delta_k \ll r_{ik0}$ . Выражение (15) в случае плоской симметрии для прямых полос бесконечной длины можно проинтегрировать и без этого допущения. Задача имеет точное решение, которое выражается формулой:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{m_{ik} + m_{ki}}{2} - \frac{l_{ik} + L_{ik}}{2} \right) \quad (18)$$

где используемые параметры поясняются на рис.2.

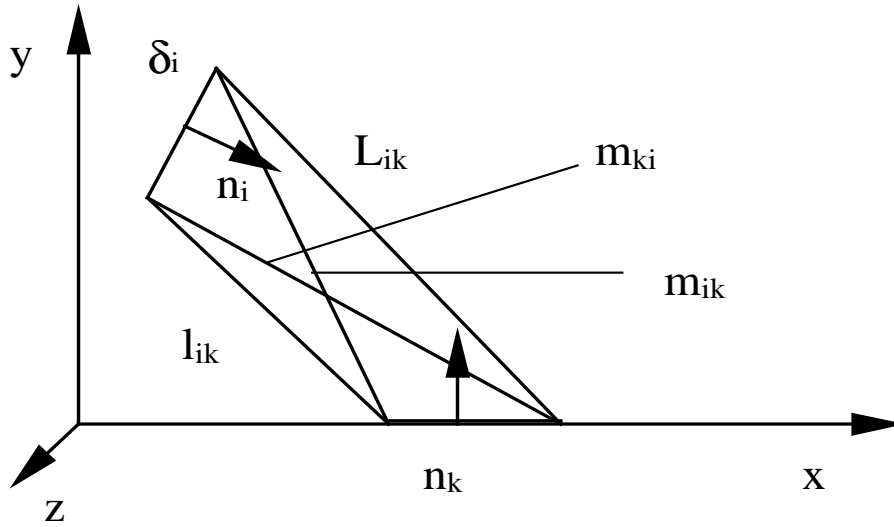


Рис. 2. Геометрические параметры для широких полос ( $n_i, n_k$  – внешние нормали), используемые для вычисления коэффициентов  $\varphi_{ik}$ .

Опуская выкладки, с помощью которых получена формула (18), сравним (17) и (18).

Формула (17) приближает (18) со вторым порядком точности при  $\delta_k/r_{ik} \rightarrow 0, \delta_i/r_{ik} \rightarrow 0$ . Формула (17) применима для близко расположенных полос при малых углах между ними, поскольку ошибка интегрирования уменьшается с уменьшением угла. Для границ с небольшим числом угловых точек формулу (17) применяют с увеличением точек разбиения границы в окрестности угловых точек. Формула (18) с такими ограничениями не связана.

Таким образом, если граница области для задачи с плоской симметрией представляет собой набор полос, образованных ломаными в плоскости  $(x, y)$ , то формула (18) дает точное выражение для коэффициентов переизлучения и позволяет найти потоки без погрешности, связанной с условием применимости формулы (17).

### 3.2 Случай осевой симметрии

Рассмотрим аксиально симметричную задачу о переизлучении между двумя кольцевыми поверхностями  $i$  и  $k$ . Ориентация поверхностей задана нормальными, в переизлучении участвуют только внешние стороны поверхностей (рис. 3). Излучающая поверхность кольца с площадью  $S_i$  имеет радиус  $R$  и толщину  $\delta_i$ , нормаль к поверхности составляет угол  $\beta$  с осью  $z$ . Для излучающей поверхности кольца с площадью  $S_k$  те же параметры обозначены как  $r, \delta_k$  и  $\alpha$ . Смещение между кольцами по оси  $z$  равно  $L$  и отсчитывается от кольца  $i$ .

Точную формулу для коэффициента переизлучения при условии полной видимости излучающей поверхности  $k$  из любой точки излучающей поверхности кольца  $i$  можно записать следующим образом:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{\pi(R\delta_i + 0.5 \cos(\beta)\delta_i^2)} \int_0^{\delta_i} y d\xi \int_0^{\delta_k} x d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{(A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi + C)}{[y^2 + 2yx \cos \varphi + x^2 + l^2]^2} f_\lambda d\varphi \quad (19)$$

где входящие в формулу параметры определяются ниже:

$$\begin{aligned} x &= r + \zeta \cos \alpha, & y &= R + \xi \cos \beta, \\ l &= L + \zeta \sin \alpha - \xi \sin \beta, & A &= yx \sin \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

$$B = y \sin \alpha (y \sin \beta + l \cos \beta) + x \sin \beta (x \sin \alpha - l \cos \alpha),$$

$$C = (x \sin \alpha - l \cos \alpha)(y \sin \beta + l \cos \beta),$$

функция  $f_\lambda$  учитывает поглощение излучения в среде, в которой находятся поверхности.

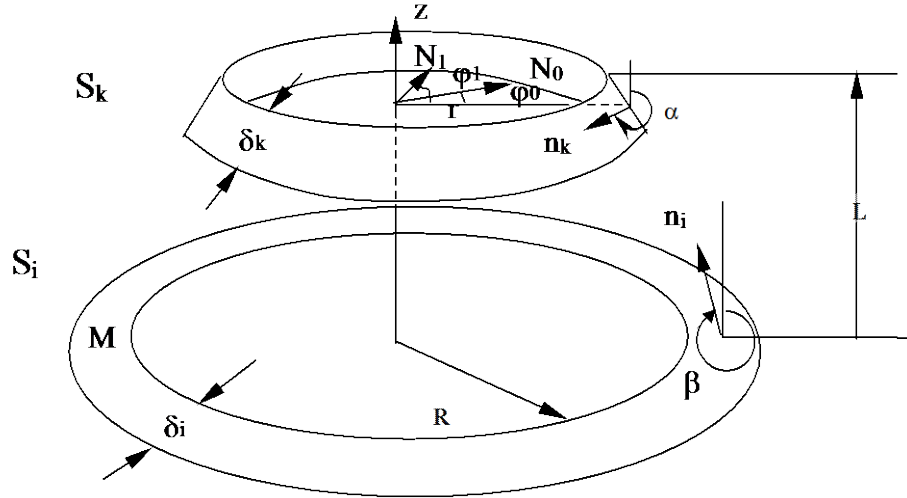


Рис. 3. Обозначения параметров задачи с аксиальной симметрией

Далее коэффициент поглощения принимается равным нулю, так что параметр  $f_\lambda$  тождественно равен единице, что соответствует отсутствию поглощения.

В случае неполной видимости пределы интегрирования в (19) изменяются в зависимости от угла видимости элементов кольцевой поверхности.

Формула (19) является следствием общей формулы для расчета коэффициента диффузного переизлучения между двумя поверхностями, записывающейся в виде:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{\pi S_i} \iint_{S_i, S_k} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_k}{r_{ik}^2} \exp(-\lambda r_{ik}) ds_i ds_k,$$

где  $\theta_i$  и  $\theta_k$  представляют собой углы между нормалью к поверхности и направлением, определяемым отрезком, соединяющим две произвольные точки поверхностей, а интегрирование ведется по площади каждой поверхности.  $\lambda$  – коэффициент поглощения.

Отметим, что для коэффициентов переизлучения выполняется свойство взаимности:

$$\varphi_{ik} S_i = \varphi_{ki} S_k. \quad (20)$$

Поскольку вычисление угловых коэффициентов между кольцами конечной толщины равносильно тройному интегрированию, в случае неполной видимости пределы интегрирования по углу в выражении для угловых коэффициентов будут зависеть от координат точки интегрирования. Чтобы упростить вычисления, будем рассматривать приближение тонких колец.

### 3.2.1 Приближение тонких колец. Полная видимость

Будем предполагать, что  $r_{ik} \gg \delta_i, \delta_k$ . Данное условие означает, что толщины обоих колец намного меньше расстояния между любыми двумя точками, одна из которых принадлежит поверхности с площадью  $S_i$ , а другая – поверхности с площадью  $S_k$ . Отсюда следует, что, вообще говоря, примыкающие кольца не могут рассматриваться как тонкие.

Однако, при небольшой разнице углов наклона колец (гладкая граница) и большом, по сравнению с толщиной колец, радиусе можно пользоваться формулами, полученными в предположении выполнения условий для тонких колец, т.к. ошибка интегрирования уменьшается с уменьшением разницы углов

наклона колец. Покажем это на примере двух колец, расположенных на цилиндрической поверхности радиуса  $r$ .

Вспользуемся известной формулой [2] для углового коэффициента между тонкими кольцами  $i$  и  $k$ , расстояние между которыми  $L$  и которые находятся на цилиндрической поверхности радиуса  $r$ , и вычислим с помощью нее угловой коэффициент между тонким и толстым кольцом:

$$\varphi_{dS_i, S_k} = \int_{\frac{L-\delta_k}{2r}}^{\frac{L}{2r}} \left( 1 - \frac{2X^3 + 3X}{2(X^2 + 1)^{3/2}} \right) dX, \quad X = \frac{x}{2r}$$

$$\varphi_{dS_i, S_k} = \frac{\delta_k}{2r} - \left[ \frac{L^2}{4r^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{(L-\delta_k)^2}{4r^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \left[ \frac{L^2}{4r^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2 \left[ \frac{(L-\delta_k)^2}{4r^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Используя разложения до второго порядка включительно

$$\left( \frac{(L-\delta_k)^2}{4r^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cong \left( 1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{\delta_k^2 - 2L\delta_k}{8r^2 \left( 1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)} \right)$$

$$\left( \frac{(L-\delta_k)^2}{4r^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \cong \left( 1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{\delta_k^2 - 2L\delta_k}{8r^2 \left( 1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)} \right)$$

получим с точностью до второго порядка угловой коэффициент между тонкими кольцами:

$$\varphi_{dS_i, S_k} \cong \left[ 1 - \frac{2 \left( \frac{L}{2r} \right)^3 + 3 \frac{L}{2r}}{2 \left[ \left( \frac{L}{2r} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{\delta_k}{2r} - \frac{2 \left( \frac{L}{2r} \right)^3 + 3 \frac{L}{2r}}{2 \left[ \left( \frac{L}{2r} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \frac{\delta_k}{2r} \frac{\delta_k}{2L}$$

Первый член совпадает с подынтегральным выражением, второй, после сокращения на  $L$ , вообще не зависит от отношения  $\frac{\delta_k}{L}$ . Следовательно, единственным параметром, определяющим условие тонких

колец, является отношение  $\frac{\delta_k}{2r}$ . Так же обстоит дело с кольцами, лежащими на одном конусе. Это дает основание применять для гладких границ приближение тонких колец.

Если примыкающие кольца имеют большой относительный наклон и обращены друг к другу (угловая точка на поверхности), то доля площадей таких колец в общей излучающей площади всегда может быть уменьшена за счет увеличения точек разбиения границы в окрестности угловых точек. Ошибка при вычислении потоков уменьшается с уменьшением длин отрезков, образующих кольца.

Для колец конечных размеров в частных случаях ниже будут получены точные формулы для коэффициентов переизлучения. Это дает возможность рассчитывать потоки в точках нарушения гладкости границы без дробления сетки.

Покажем, что угловые коэффициенты для двух различных колец  $i$  и  $k$ , в предположении, что толщина колец много меньше их радиуса и расстояния между ними, при условии их полной взаимной видимости, определяются выражением

$$\varphi_{ik} = \frac{2\delta_k r}{\pi D^4} \int_0^\pi d\varphi \frac{A \cos^2 \varphi - B \cos \varphi + C}{(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^2} e^{-\lambda D(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{1/2}} \quad (21)$$

Здесь  $\delta_k$  - толщина,  $r$  - радиус  $k$ -го кольца,  $\lambda$  - коэффициент поглощения среды, заполняющей полость. Остальные параметры, входящие в выражение (21), определяются радиусами колец, расстоянием между ними и углами наклона нормалей к оси.

Из выражения (19) для тонких колец следует:

$$\varphi_{ik} = \frac{\delta_k r}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi + C)}{(R^2 + 2Rr \cos \varphi + r^2 + L^2)^2} \exp\left[-\lambda(R^2 + 2Rr \cos \varphi + r^2 + L^2)^{1/2}\right]$$

где

$$\begin{aligned} A &= Rr \sin \alpha \sin \beta, \\ B &= R \sin \alpha (R \sin \beta + L \cos \beta) + r \sin \beta (r \sin \alpha - L \cos \alpha), \\ C &= (r \sin \alpha - L \cos \alpha)(R \sin \beta + L \cos \beta). \end{aligned}$$

Отметим, что интеграл в последнем выражении можно брать от  $-\pi$  до  $\pi$  с одновременным изменением знака перед  $\cos$  на противоположный (это является следствием замены  $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ ).

Представим знаменатель в подынтегральном выражении в виде:

$$R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2 + L^2 = D^2(1 - 2a \cos \varphi + a^2),$$

где

$$a = \frac{R^2 + r^2 + L^2 - \sqrt{[(R+r)^2 + L^2][(R-r)^2 + L^2]}}{2Rr}, \quad D^2 = Rr/a.$$

Тогда выражение для коэффициента переизлучения примет следующий вид:

$$\varphi_{ik} = \frac{2\delta_k r}{\pi D^4} \int_0^\pi d\varphi \frac{(A \cos^2 \varphi - B \cos \varphi + C)}{(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^2} \exp\left[-\lambda D(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{1/2}\right],$$

который совпадает с (21). При выводе последней формулы мы учли, что

$$\int_{-\pi}^0 F[\cos \varphi] d\varphi = \int_0^\pi F[\cos \varphi] d\varphi.$$

Диагональные элементы матрицы  $\varphi_{ik}$ , в случае полной видимости, имеют вид

$$\varphi_{kk} = \frac{\delta_k \sin^2 \alpha}{2\pi r} \int_0^\pi d\varphi e^{-\lambda r[2(1 - \cos \varphi)]^{1/2}} \quad (22)$$

Интегралы вида  $\int_0^\pi d\varphi \frac{\cos^n \varphi}{(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^m}$ , где  $n$  и  $m$  - целые числа, являются табличными.

Если поглощение отсутствует, то  $\lambda = 0$  и (21)-(22) можно проинтегрировать аналитически.

Выполнив интегрирования в (21), окончательно получим:

$$\varphi_{ik} = \frac{2\delta_k r a^2}{D^4 (1-a^2)^3} \left[ A \frac{a^2+1}{2a^2} + A \frac{3-a^2}{2} - B \frac{2}{a} + C \frac{a^2+1}{a^2} \right] \quad (23)$$

### 3.2.2 Приближение тонких колец. Учет затенения

При неполной видимости тонкого кольца  $k$  из точки наблюдения, которая находится на тонком кольце  $i$ , значения пределов интегрирования зависят от наклона колец и от расположения других колец, затеняющих кольцо  $k$ . Другими словами существует две причины ограничения видимости.

Первая обусловлена наклоном двух рассматриваемых колец, вследствие чего отдельные участки колец могут не просматриваться.

На рис.3 изображены границы видимости поверхности  $k$  из точки  $M$  на поверхности  $i$ , отмеченные углами  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Найдем их из условия ортогональности векторов:  $MN_0 \perp n_{N_0}$  и  $MN_1 \perp n_M$ .

Декартовы координаты точек:  $M = (-R, 0, z_i)$ ,  $N_0 = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z_k)$ . Координаты векторов:  $MN_0 = (R + r \cos \varphi, r \sin \varphi, z_k - z_i)$ ,  $n_M = (-\sin \beta, 0, \cos \beta)$ ,  $n_{N_0} = (\sin \alpha \cos \varphi_0, \sin \alpha \sin \varphi_0, \cos \alpha)$ .

Условие ортогональности:

$$MN_0 \cdot n_{N_0} = (R + r \cos \varphi) \sin \alpha \cos \varphi + r \sin^2 \varphi \sin \alpha + (z_k - z_i) \cos \alpha = 0.$$

Откуда граничный угол видимости  $\varphi_0$ , обусловленный наклоном кольца  $k$ , если он существует, определяется из равенства

$$\cos \varphi_0 = \frac{(z_i - z_k) \cos \alpha}{R \sin \alpha} - \frac{r}{R} = -\frac{L \cos \alpha}{R \sin \alpha} - \frac{r}{R} \quad (24)$$

Аналогично найдем второй граничный угол видимости, обусловленный наклоном кольца  $i$ :

$$\cos \varphi_1 = \frac{L \cos \beta}{r \sin \beta} - \frac{R}{r} \quad (25)$$

Скалярное произведение  $MN_0 \cdot n_{N_0}$  является монотонной функцией от угла  $\varphi$  при  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Следовательно, видимый участок, ограниченный наклоном кольца  $k$ , можно определить по знаку скалярного произведения в точках  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$ .

Если знаки скалярного произведения в этих точках противоположные, то  $\varphi_0$  существует. Область видимости при этом:  $(\varphi_0, \pi)$ , если  $MN_0 \cdot n_{N_0} < 0$  при  $\varphi = \pi$ , и  $(0, \varphi_0)$ , если  $MN_0 \cdot n_{N_0} < 0$  при  $\varphi = 0$ .

Если знаки скалярного произведения одинаковы, то  $\varphi_0$  не существует и весь интервал  $(0, \pi)$  включается в область видимости при  $MN_0 \cdot n_{N_0} < 0$  или, в противном случае, исключается из области видимости кольца  $k$ .

Аналогично, рассматривая скалярное произведение  $MN_1 \cdot n_M$ , найдем область видимости, которая ограничена наклоном кольца  $i$ : если  $MN_1 \cdot n_M > 0$  при  $\varphi = 0, \pi$  то кольцо  $i$  не ограничивает видимости кольца  $k$ .

При разных знаках скалярного произведения в точках  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  область видимости  $(\varphi_1, \pi)$ , если  $MN_1 \cdot n_M > 0$  при  $\varphi = \pi$ , и  $(0, \varphi_1)$ , если  $MN_1 \cdot n_M > 0$  при  $\varphi = 0$ .

Пересечение областей видимости, связанной с углами  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  дает пределы интегрирования в выражении (21) для нахождения угловых коэффициентов.

Это либо интервал с концами  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , либо интервал  $(\max(\varphi_0, \varphi_1), \pi)$ , либо интервал  $(0, \min(\varphi_0, \varphi_1))$ , либо интервал видимости отсутствует и тогда угловой коэффициент равен нулю.



Если один из углов  $\varphi_0$  или  $\varphi_1$  не существует, его следует положить равным 0 при вычислении  $\max(\varphi_0, \varphi_1)$  и положить равным  $\pi$  при вычислении  $\min(\varphi_0, \varphi_1)$ .

Вторая причина ограничения видимости состоит в том, что между двумя кольцами находится третье, которое частично или полностью затеняет одно кольцо от другого. Затенение определяется углами  $\varphi_2(j)$ , которые являются концами интервалов затенения.

Для нахождения пределов интегрирования, в общем случае необходимо построить центральные проекции всех колец, затеняющих кольцо  $k$  от кольца  $i$ , на плоскость кольца  $k$  и взять объединение областей с тенью от каждой проекции. При этом затеняющие кольца нельзя считать тонкими.

Дополнение области тени до интервала  $(0, \pi)$  определяет пределы интегрирования, связанные с концами интервалов видимости – углами  $\varphi_2(j)$ , где  $j$  – порядковый номер конечной точки интервала.

Пусть после объединения областей с тенью образуется  $n$  непересекающихся угловых интервалов с упорядоченными по возрастанию конечными точками  $(\varphi_2(2j-1), \varphi_2(2j))$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда переходя к интегрированию в (21) по дополнению указанных интервалов до интервала  $(0, \pi)$  имеем:

$$\int_0^{\pi - \varphi_2(2n)} + \sum_{i=2}^n \int_{\pi - \varphi_2(2i-1)}^{\pi - \varphi_2(2i-1)} + \int_{\pi - \varphi_2(1)}^{\pi} = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\pi - \varphi_2(2i-1)}^{\pi - \varphi_2(2i-1)}, \quad \varphi_2(0) = 0, \varphi_2(2n+1) = \pi \quad (26)$$

Окончательно пределы интегрирования определяются как пересечение интервалов видимости, связанных с углами  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2(j)$ .

Добавляя в рассмотрение (их может быть один или два) теневые интервалы, определенные для  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , и объединяя их с теневыми интервалами  $\varphi_2(j)$ , получим выражение, имеющее вид (26), где  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , если они присутствуют, упорядочены с  $\varphi_2(j)$  и переобозначены.

Перейдем к определению интервала затенения от одного кольца. Пусть между тонкими кольцами с радиусами  $R_i$  и  $R_k$  расположено третье кольцо с нижним и верхним краем, как изображено на рис.4. Существуют различные соотношения между параметрами колец, при которых из точки наблюдения на кольце  $i$  будет видна не вся поверхность кольца  $k$ .

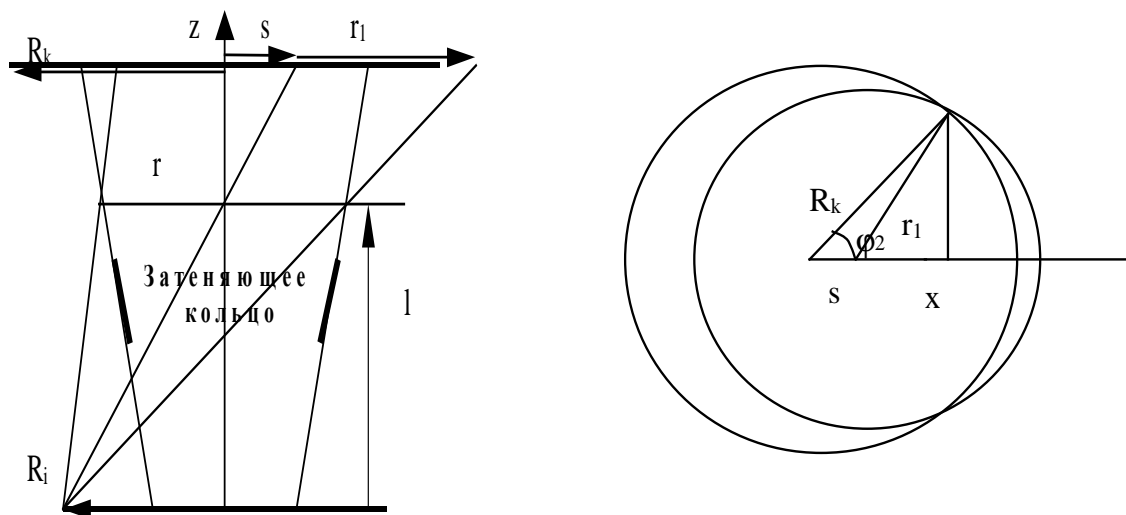


Рис. 4. К расчету верхней границы  $\varphi_2$  углового интервала затенения

Центральные проекции нижнего и верхнего края затеняющего кольца на плоскость кольца  $k$  дают две окружности.

Если они обе пересекут окружность  $k$ , то тем самым отсекут две дуги. Однако теневой интервал может не совпадать с отсеченными дугами, потому что максимальный угол затенения может достигаться не на краях затеняющего кольца.

Если только одна из спроектированных окружностей пересекает окружность  $k$ , то второй конец углового интервала затенения необходимо определять по наличию препятствия для видимости ближайшей или наиболее удаленной точки кольца  $k$  от кольца  $i$ .

Если ни одна из спроектированных окружностей не пересекает окружность  $k$ , то либо кольцо между  $i$  и  $k$  полностью затеняет кольцо  $k$ , либо тень от него отсутствует.

Рассмотрим подробнее нахождение верхней границы интервала затенения. Для этого продолжим образующую затеняющего кольца до пересечения с плоскостями колец  $i$  и  $k$  и рассмотрим на ней кольцо радиуса  $r$ , отстоящее на  $l$  от кольца  $i$  (рис.4). Спроектируем это кольцо как центральную проекцию из точки наблюдения кольца  $i$  на плоскость кольца  $k$ .

Пусть  $s = R_i(L/l - 1)$  – координата проекции центра,  $r_l = r(L/l)$  – радиус проекции. Тогда, если проекция пересекает кольцо  $k$ , то угол  $\varphi_2$ , при котором пересекаются окружности, является функцией  $l$  и можно найти ее максимум.

Точка пересечения окружностей находится из уравнений

$$x^2 + y^2 = R_k^2$$

$$(x - s)^2 + y^2 = r_l^2$$

$$\text{Угол, пересечения } \varphi_2 = \arccos \frac{R_k^2 - r_l^2 + s^2}{2sR_k}.$$

Максимальное значение его достигается при  $l = L/(1 + \sqrt{\varepsilon})$ ,  $\varepsilon = \frac{R_k^2 - u_k^2}{R_i^2 - u_i^2}$  и равно

$$\varphi_{2\max} = \arccos \frac{1}{2} \left[ \frac{R_k}{R_i \sqrt{\varepsilon}} - \frac{(u_k - u_i + (1 + \sqrt{\varepsilon})u_i)^2}{R_i R_k \sqrt{\varepsilon}} + \frac{R_i \sqrt{\varepsilon}}{R_k} \right] \quad (27)$$

при условии  $R_k \geq u_k$ ,  $R_i \geq u_i$ , где  $u_i$ ,  $u_k$  – радиусы пересечений образующей с плоскостями колец  $i$  и  $k$ .

Максимум в данном случае находится из условия равенства нулю производной от функции  $\varphi_2(l)$ . Это именно максимум, поскольку функция  $\varphi_2(l)$  – значение угла пересечения, неотрицательна и нулевое значение для максимального угла пересечения является решением, если окружности  $R_k$  и  $r_l$  пересекаются в одной точке.

Если максимальное значение угла пересечения достигается при значении  $l$  между верхним и нижним краем затеняющего кольца, то это и есть верхняя граница интервала затенения.

Нижняя граница находится как минимум из двух значений, которые находятся из пересечения проекций для верхнего и нижнего края затеняющего кольца с кольцом  $k$ .

Для  $\varepsilon = 1$  из (27) получаем верхнюю границу интервала затенения при самооблучении цилиндра большого радиуса  $R$  в присутствии препятствия – цилиндра малого радиуса  $r$ . Значение угла совпадает с известной формулой:  $\varphi_{2\max} = 2 \arcsin(r/R)$  при  $l_{\max} = L/2$ , нижняя граница интервала затенения  $\varphi_2 = 0$ .

Раскроем неопределенность в (27) для важных предельных случаев.

Излучение с поверхности большого цилиндра  $i$  на малый  $k$ , расположенный соосно внутри большого:

$\varepsilon \rightarrow 0$ , верхняя граница интервала затенения  $\varphi_{2\max} = \arccos(-u_i/R_i)$  достигается при  $l_{\max} = L$ , нижняя граница интервала затенения  $\varphi_2 = 0$ ,  $u_i = R_k$ .

Излучение с поверхности малого цилиндра  $i$  на поверхность соосного большого  $k$ :

$\varepsilon \rightarrow \infty$ , верхняя граница интервала затенения  $\varphi_{2max} = \arccos(-u_k/R_k)$  достигается при  $l_{max} = 0$ , нижняя граница интервала затенения  $\varphi_2 = 0$ .  $u_k = R_i$ .

В случае, если максимальное значение теневого угла достигается при значениях  $l$  выше верхнего или ниже нижнего уровня затеняющего кольца, то границами теневого интервала будут являться углы, полученные из пересечения проекций для верхнего и нижнего края затеняющего кольца с кольцом  $k$ .

Если только лишь одна из проекций для верхнего или нижнего края затеняющего кольца пересекает окружность  $k$ , то это может быть как нижняя так и верхняя граница интервала затенения.

Второй конец углового интервала затенения необходимо определять по наличию препятствия для видимости ближайшей или наиболее удаленной точки кольца  $k$  от кольца  $i$ .

Если кольцо затенения является препятствием видимости для ближайшей точки кольца  $k$ , то препятствие определяет верхнюю границу затенения и интервал затенения равен  $(\varphi_2, \pi)$ .

Если кольцо затенения является препятствием видимости для наиболее удаленной точки кольца  $k$ , то препятствие определяет нижнюю границу затенения и интервал затенения равен  $(0, \varphi_2)$ .

Таким образом, для каждого затеняющего кольца, находящегося между кольцами  $i$  и  $k$  можно найти затеняющий интервал.

Объединив интервалы затенения, находим пределы интегрирования, как дополнение до  $(0, \pi)$ .

В случае, когда в плоскости  $(r, z)$  полость представляет собой односвязную область с замкнутой границей или когда часть замкнутой границы области удалена, но при этом не изменились интервалы затенения для оставшихся элементов поверхности, можно показать, что для любой пары колец найдется кольцо из всех остальных, затеняющих взаимную видимость первых двух, по которому можно найти верхнюю границу углового интервала затенения  $\varphi_2$ , общего для всех затеняющих колец.

Аналогичное утверждение справедливо и для нижней границы углового интервала затенения  $\varphi_2$ .

К рассмотрению случая односвязной области мы и переходим.

Действительно, для односвязной области с замкнутой границей центральные проекции всех колец, находящихся между парой тонких колец  $i$  и  $k$  из точки кольца  $i$  на плоскость кольца  $k$  составляют один непрерывный интервал по углу  $\varphi$  относительно кольца  $k$  в силу непрерывности границы, связывающей кольца  $i$  и  $k$ .

Этот общий интервал либо покрывает одну из крайних точек  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$  кольца  $k$  вместе с ее окрестностью, либо затенение отсутствует.

В этом важном случае односвязной области вместо объединения интервалов затенения можно вычислять максимальный и минимальный (по всем кольцам, которые находятся между кольцами  $i$  и  $k$ ) угол затенения.

Составим таблицу пределов интегрирования.

Для составления таблицы введем понятие прямой и обратной видимости.

Проведем отрезок в координатной плоскости  $(r, z)$ ,  $r \geq 0$ , соединяющий две точки принадлежащие кольцу  $i$  и кольцу  $k$ . Если нормали кольца  $i$  и кольца  $k$  составляют с отрезком острые углы (обращены друг к другу), то будем говорить, что между кольцами  $i$  и  $k$  существует прямая видимость по ориентации.

Если нормаль кольца  $k$  образует с отрезком тупой угол, то прямая видимость по ориентации отсутствует. Угол  $\varphi_0$  разделяет невидимую и видимую зоны кольца  $k$  вследствие наклона кольца  $k$ .

Если нормаль кольца  $i$  образует с отрезком тупой угол, то прямая видимость по ориентации также отсутствует. Угол  $\varphi_1$  разделяет невидимую и видимую зоны кольца  $k$  вследствие наклона кольца  $i$ .

Проведем теперь отрезок из точки кольца  $i$  в точку кольца  $k$ , отраженную относительно оси  $z$ . Отразим также нормаль, построенную в точке кольца  $k$ .

Если нормали к поверхностям в указанных точках обращены друг к другу, то будем говорить, что между кольцами  $i$  и  $k$  существует обратная видимость по ориентации.

Как и в случае отсутствия прямой видимости, если нормаль  $k$  образует с отрезком между указанными точками тупой угол, то отсутствие обратной видимости по ориентации ведет к появлению угла  $\varphi_0$ .

Отсутствие обратной видимости по ориентации из – за наклона нормали  $i$  ведет к появлению угла  $\varphi_l$ .

Аналогично вводится понятие прямой и обратной видимости по препятствию.

Если построенный в положительной полуплоскости отрезок, соединяющий две точки принадлежащие кольцу  $i$  и кольцу  $k$  не пересекается препятствием в виде одного или нескольких колец, то будем говорить, что между кольцами  $i$  и  $k$  существует прямая видимость по препятствию относительно одного или нескольких колец.

Если отрезок проведен к отраженной точке и не пересекается препятствием в виде одного или нескольких колец, то будем говорить, что между кольцами  $i$  и  $k$  существует обратная видимость по препятствию относительно одного или нескольких колец.

Видимость по препятствию относительно одного кольца использовалось в алгоритме поиска интервала затенения.

В приведенной ниже таблице используется понятие видимости по препятствию, представляющему из себя совокупность колец, расположенных между кольцами  $i$  и  $k$ .

В зависимости от наличия или отсутствия прямой (п) или обратной (о) видимости, а также соотношения между углами в таблице 1 представлены значения пределов интегрирования, которые нужно использовать при вычислении угловых коэффициентов.

Последняя колонка относится к случаю отсутствия прямой видимости из – за наклона кольца  $i$  и отсутствия обратной видимости из – за наклона кольца  $k$ .

Если нет прямой видимости из – за наклона кольца  $k$  и нет обратной видимости из – за кольца  $i$ , то в последней колонке нужно поменять местами  $\varphi_0$  и  $\varphi_l$ .

**Таблица 1.** Значения пределов интегрирования в угловых коэффициентах для односвязной  $(r, z)$  полости

		Видимость по ориентации			
		П +	+	–	–(i) –(k)
Видимость по препятствию	П +	+	+	–	–(i) –(k)
	+	+	$\int_0^{\pi} \dots$ $\varphi_0, \varphi_1 = 0,  \cos \varphi_0, \varphi_1  > 1$	$\int_{\pi - \min(\varphi_0, \varphi_1)^*}^{\pi} \dots, \varphi_1 > \varphi_0$ $\varphi_0, \varphi_1 = \pi,  \cos \varphi_0, \varphi_1  > 1$	$\int_{\pi - \varphi_1}^{\pi - \varphi_0} \dots, \varphi_1 > \varphi_0$ 0, $\varphi_1 \leq \varphi_0$ 0, $\exists \varphi_0$ или $\exists \varphi_1$
	+	–	$\int_0^{\pi - \varphi_2} \dots$ $\varphi_0, \varphi_1 = 0,  \cos \varphi_0, \varphi_1  > 1$	$\int_{\pi - \min(\varphi_0, \varphi_1)^*}^{\pi - \varphi_2} \dots, \varphi_1 > \max(\varphi_0, \varphi_1)$ $\varphi_0, \varphi_1 = \pi,  \cos \varphi_0, \varphi_1  > 1$ 0, $\varphi_2 \geq \min(\varphi_0, \varphi_1)^*$	$\int_{\pi - \varphi_1}^{\pi - \max(\varphi_0, \varphi_2)} \dots, \varphi_1 > \max(\varphi_0, \varphi_2)$ 0, $\varphi_1 \leq \max(\varphi_0, \varphi_1)$ 0, $\exists \varphi_0$ или $\exists \varphi_1$
	–	+	$\int_{\pi - \varphi_2}^{\pi} \dots, \varphi_2 > \max(\varphi_0, \varphi_1)^*$ $\varphi_0, \varphi_1 = 0,  \cos \varphi_0, \varphi_1  > 1$ 0, $\varphi_2 \leq \max(\varphi_0, \varphi_1)^*$	$\int_{\pi - \min(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)^*}^{\pi} \dots$ $\varphi_0, \varphi_1 = \pi,  \cos \varphi_0, \varphi_1  > 1$	$\int_{\pi - \min(\varphi_1, \varphi_2)}^{\pi - \varphi_0} \dots, \varphi_0 < \min(\varphi_1, \varphi_2)$ 0, $\varphi_0 \geq \min(\varphi_1, \varphi_2)$ 0, $\exists \varphi_0$ или $\exists \varphi_1$
–	–	0	0	0	0

$$\cos \varphi_0 = \frac{(z_i - z_k) \cos \alpha_k}{r_i \sin \alpha_k} - \frac{r_k}{r_i}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{(z_k - z_i) \cos \alpha_i}{r_k \sin \alpha_i} - \frac{r_i}{r_k}$$

## 4. Некоторые точные формулы для угловых коэффициентов

Поскольку формула (21) справедлива для тонких, по сравнению с расстоянием между ними, колец, в случае близко расположенных колец желательнее иметь точные выражения для угловых коэффициентов, даже если кольца тонкие по сравнению с радиусами.

В качестве практического примера приложения формулы (19) произведем расчет коэффициента переизлучения между кругом  $i$  радиуса  $R$  и кольцом конечной толщины  $\delta_k$  на боковой поверхности цилиндра, для которого данный круг служит основанием. Параметры для данной геометрии принимают следующие значения:  $\alpha = 3\pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $R = r$ .

Последовательно выполняя громоздкие интегрирования сначала по  $\xi$ , затем по  $\zeta$  и, наконец, по  $\varphi$ , окончательно получим следующее выражение для коэффициента переизлучения:

$$\varphi_{ik} = \frac{\sqrt{L^4 + 4L^2R^2} - L^2}{2R^2} - \frac{\sqrt{(L - \delta_k)^4 + 4(L - \delta_k)^2R^2}}{2R^2} \quad (28)$$

В работе [2] приводится коэффициент переизлучения между кругом радиуса  $R$  и единичной площадкой, лежащей на боковой поверхности образованного кругом правильного цилиндра и удаленной от круга на расстояние  $L$ :

$$\varphi_{ki} = \frac{L}{2R} \left[ \frac{L^2 + 2R^2}{\sqrt{(L^2 + 2R^2)^2 - 4R^4}} - 1 \right].$$

Данное выражение будет справедливо также в случае, если вместо единичной площадки рассматривается бесконечно узкое кольцо. Тогда, используя свойство взаимности, мы можем получить коэффициент  $\varphi_{ik}$ :

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ki} \frac{S_k}{S_i} = \frac{\delta_k L}{R^2} \left[ \frac{L^2 + 2R^2}{\sqrt{(L^2 + 2R^2)^2 - 4R^4}} - 1 \right]. \quad (29)$$

Очевидно, что более общее выражение (28) при малых  $\delta_k$  переходит в данную формулу.

Некоторое обобщение по сравнению с (28) получим, если радиус круга  $R \leq r$  в основании цилиндра, где  $r$  – радиус цилиндра. Тогда обозначая функцию от расстояния

$$f(z) = \sqrt{(z^2 - r^2 + R^2)^2 + 4z^2r^2} - z^2 \quad (30)$$

получим

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2R^2} [f(L) - f(L - \delta_k)], \quad \varphi_{ki} = \frac{1}{4r\delta_k} [f(L) - f(L - \delta_k)] \quad (31)$$

Еще более общее выражение, чем выражение (30 – 31), получим, если вместо круга в основании цилиндра возьмем кольцо с радиусом от  $(R - \delta_i)$  до  $R \leq r$ , где  $r$  – радиус цилиндра,  $\delta_i \leq R$ , так что в переизлучении участвует только внутренняя поверхность цилиндрического кольца от  $(L - \delta_k)$  до  $L$  толщиной  $\delta_k$ :

$$\varphi_{ik} = \frac{rR}{2 \left( R\delta_i - \frac{\delta_i^2}{2} \right)} \left[ \frac{\sqrt{A_1^2 - 1} - A_1 - \sqrt{A_2^2 - 1} + A_2}{R} - \frac{R - \delta_i}{R} \left( \sqrt{A_3^2 - 1} - A_3 \right) + \frac{R - \delta_i}{R} \left( \sqrt{A_4^2 - 1} - A_4 \right) \right] \quad (32)$$

$$A_1 = \frac{L^2 + R^2 + r^2}{2Rr}, \quad A_2 = \frac{(L - \delta_k)^2 + R^2 + r^2}{2Rr} \quad (33)$$

$$A_3 = \frac{L^2 + (R - \delta_i)^2 + r^2}{2(R - \delta_i)r}, \quad A_4 = \frac{(L - \delta_k)^2 + (R - \delta_i)^2 + r^2}{2(R - \delta_i)r} \quad (34)$$

Для углового интервала  $(\varphi_1, \varphi_2)$  (напомним, что интервалы видимости симметричны) формула (32) заменяется на следующую:

$$\varphi_{ik} = \frac{rR}{4\pi \left( R\delta_i - \frac{\delta_i^2}{2} \right)} 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [2I + EG] d\varphi \quad (35)$$

$$I = M(L - \delta_k, R - \delta_i) - M(L, R - \delta_i) - M(L - \delta_k, R) + M(L, R) \quad (36)$$

где

$$M(L, R) = \frac{L^2 + 2r^2 \sin^2 \varphi}{[L^2 + r^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} \cos \varphi \operatorname{arctg} \frac{R + r \cos \varphi}{[L^2 + r^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} \quad (37)$$

$$E = r \cos 2\varphi$$

$$G = \ln \left[ \frac{N(L, R)}{N(L - \delta_k, R)} \frac{N(L - \delta_k, R - \delta_i)}{N(L, R - \delta_i)} \right] \quad (38)$$

где

$$N(L, R) = L^2 + R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi \quad (39)$$

Пусть теперь на поверхности цилиндра радиуса  $r$  находятся два кольца толщиной  $\delta_i$  и  $\delta_k$ . Расстояние между кольцами  $L$ . Точные выражения для угловых коэффициентов указанной системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} = & \frac{\delta_k}{2r} - \frac{r}{\delta_i} \left[ \frac{L + \delta_i}{2r} \sqrt{\left( \frac{L + \delta_i}{2r} \right)^2 + 1} - \frac{L}{2r} \sqrt{\left( \frac{L}{2r} \right)^2 + 1} - \right. \\ & \left. - \frac{L + \delta_i - \delta_k}{2r} \sqrt{\left( \frac{L + \delta_i - \delta_k}{2r} \right)^2 + 1} + \frac{L_i - \delta_k}{2r} \sqrt{\left( \frac{L - \delta_k}{2r} \right)^2 + 1} \right] \quad (40) \end{aligned}$$

$$\varphi_{ii} = \frac{\delta_i}{2r} - \sqrt{1 + \left( \frac{\delta_i}{2r} \right)^2} + 1 \quad (41)$$

Отметим, что в формуле (19) вместо интегрирования по углу в пределах от  $0$  до  $2\pi$  можно использовать интегрирование в пределах от  $0$  до  $\pi$  с одновременным изменением знака перед  $\cos$  и удвоением результата.

Для нахождения коэффициентов переизлучения в случае ограниченной видимости между кольцами необходимо, чтобы интегрирование по углу производилось в самую последнюю очередь, т.к. в этом случае возможен учет затенения аналогично случаю тонких колец.

Для тестирования численных процедур приведем точную формулу для коэффициента переизлучения с цилиндра  $k$  радиуса  $R$  на соосный цилиндр  $i$  радиуса  $r < R$ . Цилиндры имеют одинаковую высоту  $L$  и находятся на одном уровне.  $\alpha = r/R$ ,  $\beta = L/R$

$$\varphi_{kk} = 1 - \alpha + \frac{\beta}{4} + \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\sqrt{1-\alpha^2}}{\beta} \right) + \frac{\beta}{2\pi} \arcsin(1-2\alpha^2) - \frac{\sqrt{\beta^2+4}}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2\alpha^2\beta^2}{\beta^2-4\alpha^2+4} \right) \right] \quad (42)$$

$$\varphi_{ki} = 1 - \varphi_{kk} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + 1} + \frac{\alpha^2 - 1}{2\beta} + \sqrt{\left( \frac{\beta^2}{4} + 1 \right) + \frac{\alpha^2 - 1}{2} + \left( \frac{\alpha^2 - 1}{2\beta} \right)^2} \quad (43)$$

$$\varphi_{ik} = \frac{\varphi_{ki}}{\alpha}, \quad \varphi_{ii} = 0 \quad (44)$$

Можно убедиться, что при

$$\beta \rightarrow \infty \quad \varphi_{ki} \sim \alpha, \quad \varphi_{ik} \sim 1, \quad \varphi_{kk} \sim 1 - \alpha. \quad (45)$$

## 5. Численная реализация дискретной задачи

Для решения разностного аналога самосогласованной задачи (1 – 8) применяется метод последовательных уточнений потерь на излучение. Вначале по известной температуре методом верхней релаксации решается линейная система уравнений (14) с заполненной матрицей, элементы которой вычисляются по изложенной методике для элементов границы, на которых происходит переизлучение. Вычисляются значения результирующих потоков на границе полости. Найденные потоки из середин элементов границы используются в граничных условиях (3). На остальной части границы граничные условия (12'–13) линеаризуются по методу Ньютона относительно предыдущей итерации.

Неявное разностное уравнение теплопроводности с аппроксимацией на девятиточечном шаблоне на многоблочной сетке представляет собой систему линейных уравнений с разреженной матрицей, которая решается итерационным методом сопряженных градиентов.

Таким образом, находится распределение температуры на следующем временном слое на первой итерации "поток – температура". Далее по найденной температуре вычисляются уточненные потоки на границах и итерационный процесс повторяется. Находится температура на следующей итерации.

После решения уравнения теплопроводности сравниваются значения температур на двух соседних итерациях на следующем временном слое.

Изложенный подход реализован в двумерном коде (HEATRAD), предназначенном для численного моделирования процессов теплопереноса с учетом излучения.

Для задания расчетной сетки во входном файле кода задается количество блоков сетки, размерность сетки в каждом блоке по двум направлениям и номера соседних блоков, примыкающих к сторонам данного блока. Номера отсутствующих соседних блоков необходимо задать нулем. Нумерация блоков – от единицы до значения, равного количеству блоков. Размещаться блоки могут произвольно. Размерность сетки в блоке должна быть согласована с размерностью сетки в соседних блоках –

количество узлов на общих сторонах блоков должно быть одинаковым. Задание блоков не должно повторяться.

Для заполнения карты материалов области используются примитивы в виде четырехугольных областей. Примитив, накрывая фрагмент сетки, помечает узлы заданным номером материала.

Из граничных условий (12') выбором коэффициентов можно скомбинировать их различные типы: заданная температура, конвективный теплообмен, заданный тепловой поток как функции температуры.

Граничные условия задаются на границах каждого блока. На общей границе двух блоков граничные условия игнорируются.

Чтобы задать тепловой поток в (12') как функцию температуры в данной точке (условия излучения на границах области), необходимо указать соответствующие стороны блоков, являющиеся границами области.

Чтобы задать граничные условия в виде (3, 5–7) (условия переизлучения на границах), необходимо указать границы полости, которые участвуют в переизлучении при помощи сторон блоков.

## 6. Тестирование и пример численного расчета

Тестирование кода HEATRAD для решения задачи (1–8) проводилось путем сравнения с известными аналитическими решениями. Рассмотрим задачу (5)–(7) с заданными температурами на границе.

### 6.1 Плоская симметрия

В качестве первого теста рассматривался случай плоской симметрии – два коаксиальных цилиндра бесконечной длины с радиусами излучающих поверхностей  $r_1=0.2\text{м}$  и  $r_2=0.5\text{м}$ , с соответствующими температурами  $T_1=782\text{К}$  и  $T_2=557.3\text{К}$  и излучательной способностью  $\varepsilon_1=0.9999$  и  $\varepsilon_2=1$ .

Поскольку для коаксиальных цилиндров плотность потока излучения равна

$$q_i = \frac{\sigma}{r_i} \frac{T_i^4 - T_k^4}{\frac{1}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2 r_2} - \frac{1}{r_2}}, \quad (41)$$

то полагая индексы  $i=1, k=2$  получим  $q_1=15732.65$ . Положим  $i=2, k=1$ , тогда  $q_2=-6293.7$ .

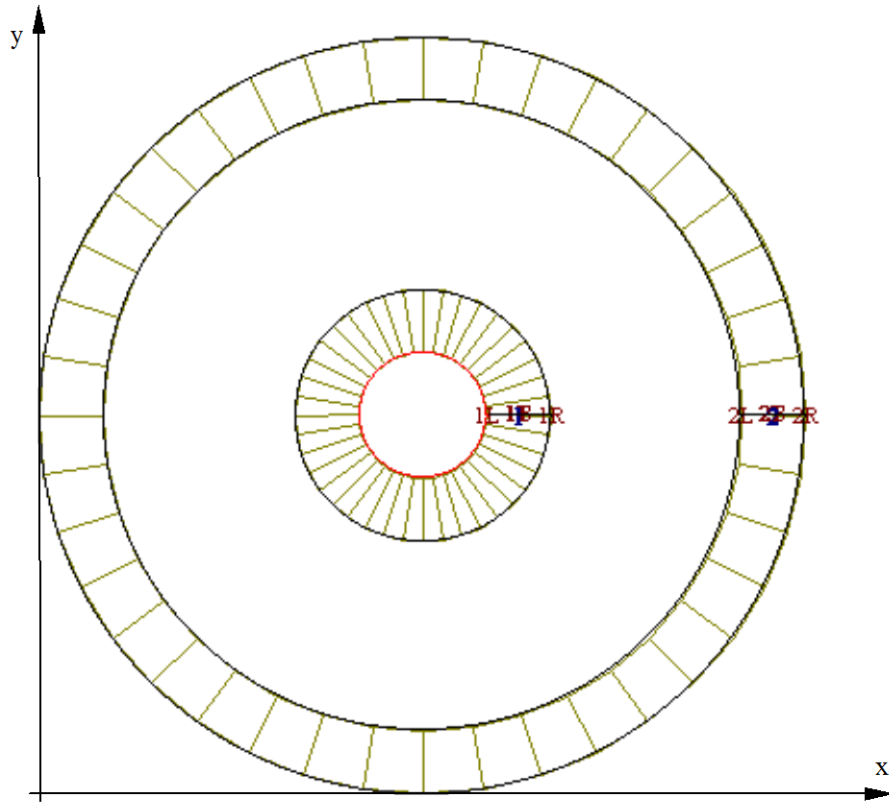
На рис. 5, 6 приведена расчетная сетка для плоской симметрии, состоящая из двух блоков. На рис. 5 в каждом блоке по 40 ячеек, на рис. 6 количество ячеек внешнего блока увеличено до 80.

Результат решения уравнений (5)–(7) с заданными температурами для разных значений количества ячеек представлены в таблице 2 и позволяют говорить о хорошем совпадении с тестовыми данными, полученными из соотношения (41).

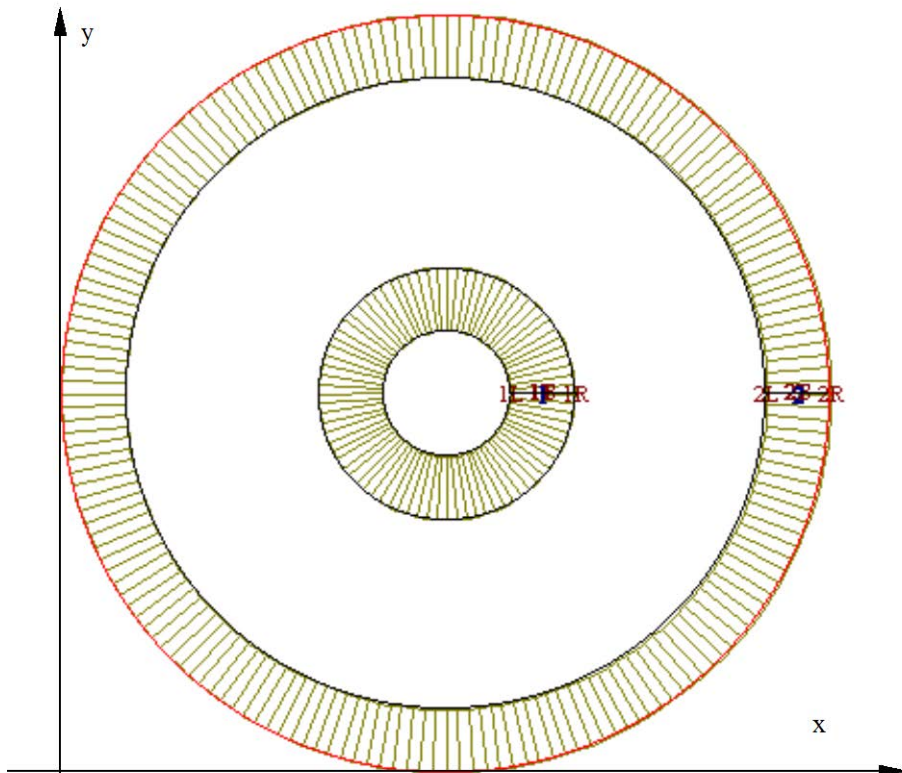
**Таблица 2.** Результаты расчетов для первого теста

Формула (41)	$q_1=15732.65$	$q_2=-6293.7$
Расчет при 40 ячейках:	$q_1=15733.75$	$q_2=-6182.7$
Расчет при 80 ячейках:	$q_1=15733.75$	$q_2=-6285.7$





*Puc. 5*



*Puc. 6*

## 6.2 Аксиальная симметрия

В качестве второго теста рассмотрим случай аксиальной симметрии. Возьмем ограниченные по высоте  $L=1м$  цилиндры (рис.7).

Остальные данные возьмем из первого теста:  
радиусы излучающих поверхностей цилиндров  $r_1=0.2м$  и  $r_2=0.5м$ , соответствующие температуры поверхностей  $T_1=782K$  и  $T_2=557.3K$ , коэффициенты излучательной способности  $\varepsilon_1=.9999$  и  $\varepsilon_2=1$ .

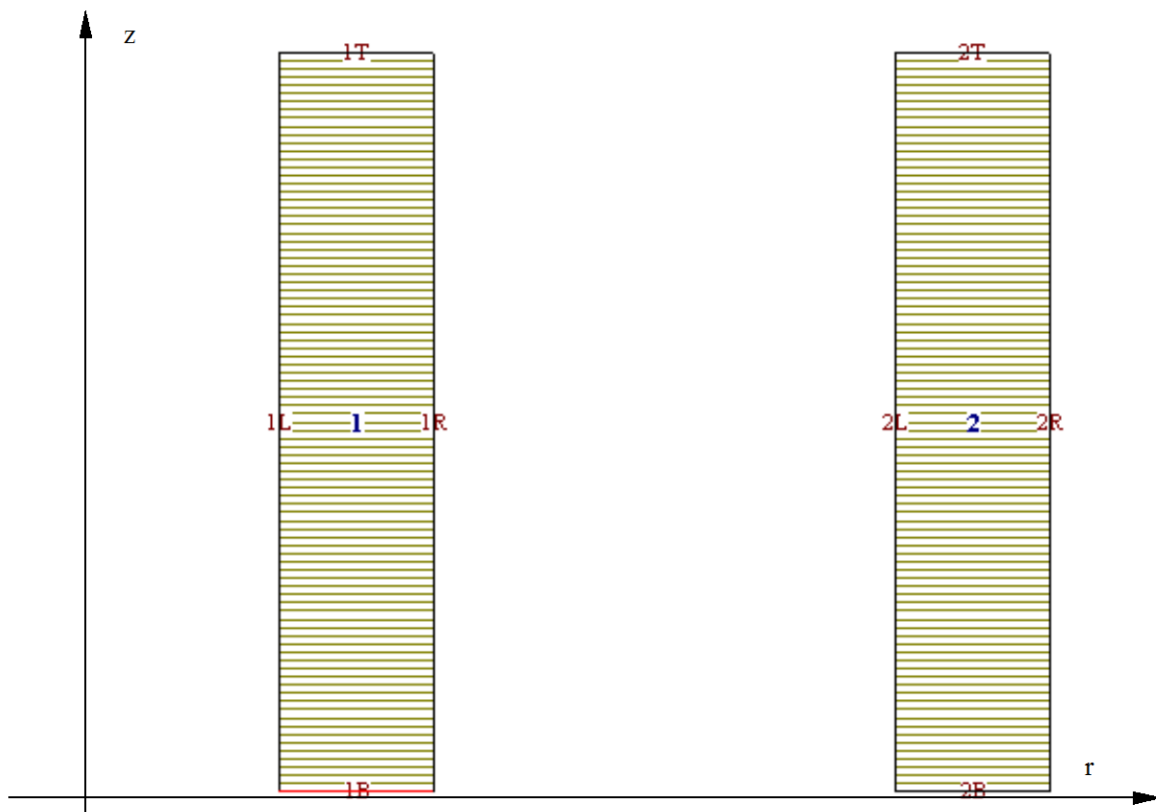


Рис. 7

Для варианта с 90 ячееками в каждом блоке искомые потоки равны: в узлах на половине высоты цилиндра  $q_1=15733.3$   $q_2=-6300.66$ ; значения  $q_1$  в пяти концевых узлах по направлению к краю цилиндра: от  $q_1=15740.3$  до  $q_1=15874.5$ ; значения  $q_2$  для десяти концевых узлов от  $q_2=-6107.6$  до  $q_2=-1563.2$ .

Таким образом, концевой эффект больше проявляется на поверхности с большим радиусом и меньшей температурой.

Если температуры поменять местами и положить  $T_2=782K$  и  $T_1=557.3K$ , то аналитические значения потоков для цилиндров бесконечной длины останутся прежними по модулю, но их знаки изменятся на противоположные.

Искомые потоки для новых температур равны: в узлах на половине высоты цилиндра  $q_1=-15728.026$   $q_2=6311.4$ ; значения  $q_1$  в пяти концевых узлах по направлению к краю цилиндра: от  $q_1=-15728.026$  до  $q_1=-15728.023$ ; значения  $q_2$  для пяти концевых узлов от  $q_2=6310.91$  до  $q_2=6310.86$ .

Таким образом, концевой эффект не проявляется. Ошибки для потоков, вычисленных на половине высоты не превышают 0.3%.

### 6.3 Сферические поверхности

В третьем тесте рассматривались две сферических поверхности (рис.8). Радиусы излучающих поверхностей  $r_1=0.2\text{м}$  и  $r_2=0.5\text{м}$ , с соответствующими температурами  $T_1= 782\text{K}$  и  $T_2= 557.3\text{K}$  и излучательной способностью  $\epsilon_1=.9999$  и  $\epsilon_2=1$ .

Для сфер поток излучения определяется из соотношения:

$$q_i = \frac{\sigma}{r_i^2} \frac{T_i^4 - T_k^4}{\frac{1}{\epsilon_1 r_1^2} + \frac{1}{\epsilon_2 r_2^2} - \frac{1}{r_2^2}}. \quad (42)$$

Поэтому, полагая индексы  $i = 1, k=2$  получим поток на сфере радиуса  $r_1$ :  $q_1=15732.65$ . Положив  $i=2, k=1$ , для второй сферы будем иметь  $q_2= - 2517.47$ .

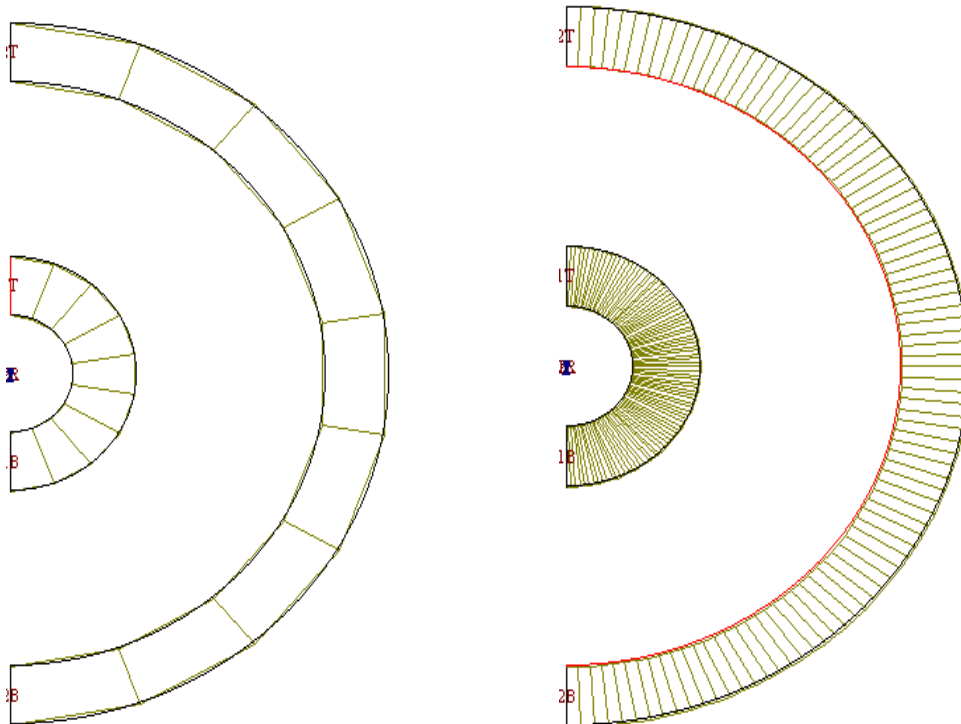


Рис. 8

Описанная численная схема решения интегрального уравнения использовалась совместно с решением уравнения теплопроводности на неортогональных расчетных сетках с блочной структурой.

Пример сетки представлен на рис.9.

Результаты расчета при моделировании процессов захлаживания расплава в кориумной ловушке со специальным размещением теплоаккумулирующего материала и других конструкций приведены на рис. 10 – 11 в виде поля температур.

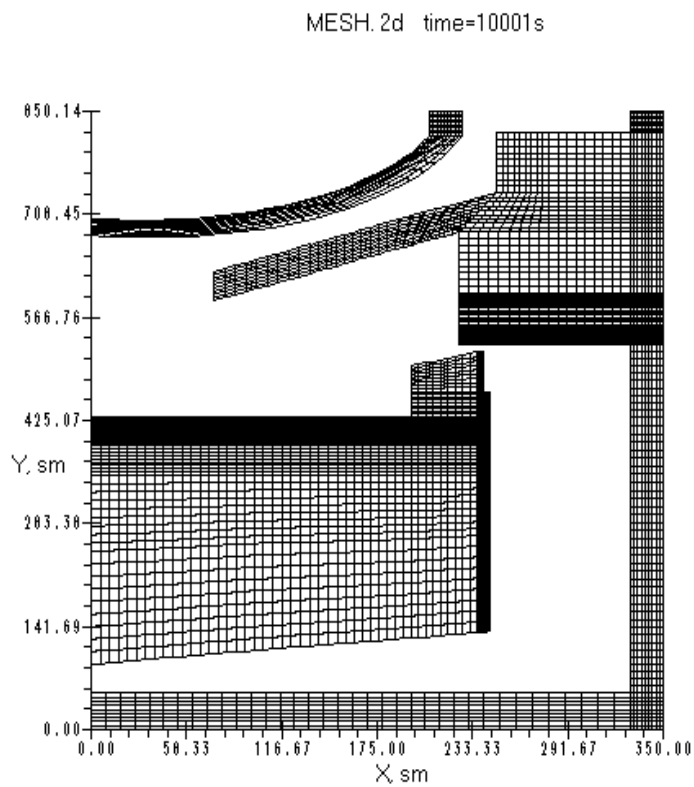


Рис. 9. Расчетная сетка для решения согласованной задачи теплопереноса с переизлучением в полости

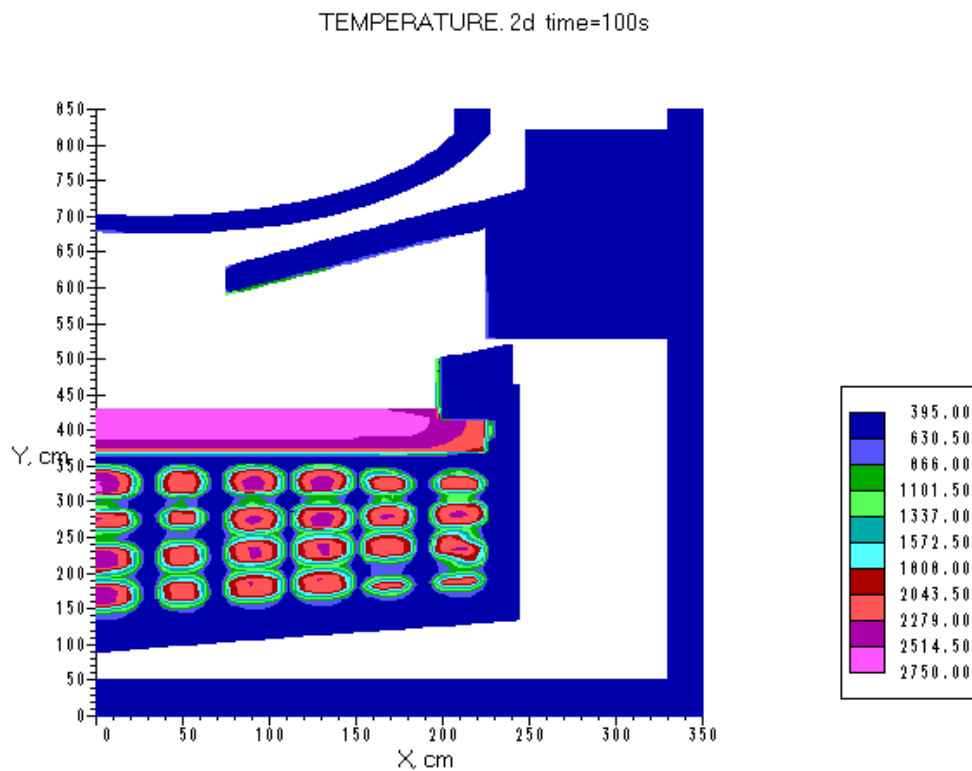


Рис. 10. Распределение температуры в кожухе и окружающих конструкциях на начальной стадии расчета

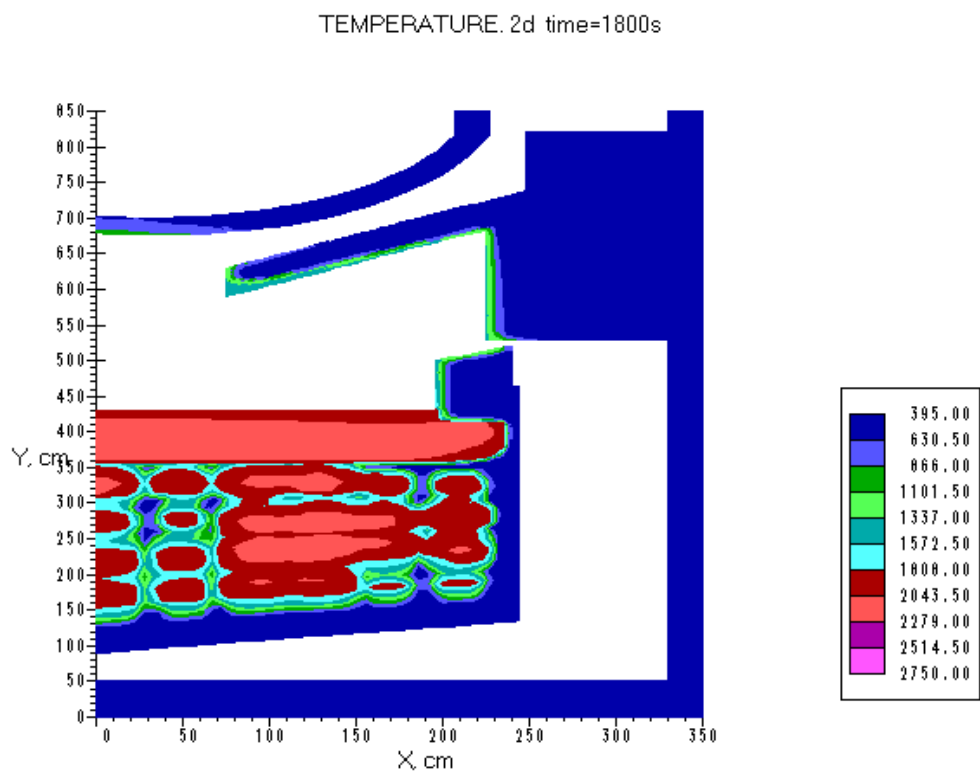


Рис. 11. Распределение температуры на момент  $t=0.5$  часа.

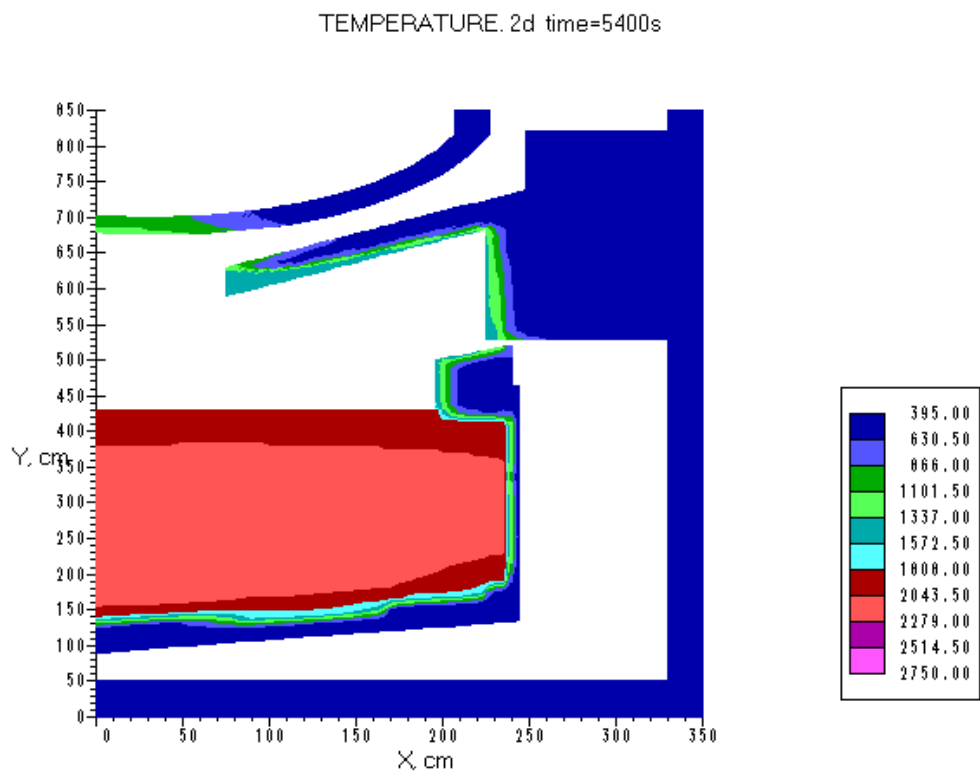


Рис. 12. Распределение температуры на момент  $t = 1.5$  часа

## Заключение

Разработанная математическая модель для описания процессов теплообмена с учетом переизлучения при различных граничных условиях прошла проверку на модельных задачах и применялась в расчетах по обоснованию возможности удержания корiumной массы в УЛР. Особенностью таких задач является расчетная область сложного вида, нелинейность разностной задачи и нелокальность граничных условий.

Разработанная методика позволяет решать самосогласованные задачи теплообмена с переизлучением на границах полости сложной формы с учетом затенения. Полость не обязательно должна быть односвязной. Алгоритм учета затенения в односвязной полости требует гораздо меньше затрат на вычисление коэффициентов матрицы. Их можно вычислять на каждом временном шаге, что важно при изменении геометрии задачи при процессах плавления.

Для решения сеточных уравнений использовались итерационные методы. Для решения неявной разностной задачи для уравнения теплопроводности использовался метод сопряженных градиентов. Для решения разностной задачи для радиационных потоков применялся метод верхней релаксации. Для сходимости примененных итерационных методов достаточно небольшого числа итераций.

Построенный алгоритм хорошо зарекомендовал себя на большом по объему количестве точек сетки  $\sim 10^5$ , а также в случае температурной зависимости свойств материалов.

## Список литературы

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений*. М., "Наука", 1976.
2. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжов Л.Н.. *Теплообмен излучением. Справочник*. М., Энергоатомиздат, 1991, 432с.
3. Siefken L.J., Coryell E.W., Harvego E.A., Hohorst J.K. *SCDAP/RELAP5/MOD3.3. Code manual. Vol.2: Modelling of Reactor Core and Vessel Behavior during Severe Accidents*. NUREG / CR – 6150, Idalio ivat. Eng. Env.lab., September 2000.