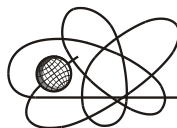




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2006-06

Preprint IBRAE-2006-06

А. А. Коротков, В. А. Первичко, И. Г. Плотникова, В. В. Чуданов

**МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ
СЕТОК НА ПЛОСКОСТИ, НА ГЛАДКОЙ
ТРЕХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Москва
2006

Moscow
2006

УДК 519.6

Коротков, А. А. Метод построения ортогональных сеток на плоскости, на гладкой трехмерной поверхности [Текст] / А. А. Коротков, В. А. Первичко, И. Г. Плотникова, В. В. Чуданов. — (Препринт / Ин-т проблем безопас. развития атом. энергетики РАН, № ИБРАЭ-2006-06). — М. : ИБРАЭ РАН, 2006. — 47 с. — 98 экз.

Аннотация

В работе представлен метод построения ортогональных четырехугольных сеток на плоскости и на гладкой поверхности в трехмерном пространстве. В основе метода лежит алгоритм определения ортогонального семейства функций, для которых формулируется классическая смешанная краевая задача на основе самосопряженных эллиптических уравнений второго порядка. Численное решение интерполируется линейно или кубическими сплайнами.

©ИБРАЭ РАН, 2006

Korotkov, A. A. Method of orthogonal mesh generating on plane or smooth 3D-surfaces [Text] / A. A. Korotkov, V. A. Pervichko, I. G. Plontikova, V. V. Chudanov. — (Preprint / Nuclear Safety Institute RAS, October 2006, № IBRAE-2006-05). — Moscow : IBRAE RAS, 2006. — 47 p.

Abstract

The article describes the method of generating orthogonal quadrilateral meshes on the on plane or smooth 3D-surfaces. The method is based on determining of set of the orthogonal functions, which are defined by mixed boundary value problem, which is based on self-adjoint second-order elliptical equations. Numerical equations solutions are interpolated by linear function or cubic spline functions.

©Nuclear Safety Institute, 2006

Метод построения ортогональных сеток на плоскости и на гладкой трехмерной поверхности

А.А. Коротков, В.А. Первичко, И.Г. Плотникова, В.В. Чуданов

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ
113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52
тел.: (495) 955-22-34, факс: (495) 230-20-29, эл. почта: chud@ibrae.ac.ru

1 Содержание

1	Содержание	3
2	Введение	3
3	Математическая формулировка метода	4
3.1	Математическая формулировка метода построения двумерных ортогональных сеток на плоскости	4
3.2	Математическая формулировка метода построения двумерных ортогональных сеток на гладкой трехмерной поверхности	11
4	Интерполяция численного решения	18
4.1	Линейная интерполяция численного решения	21
4.2	Интерполяция численного решения сплайнами	22
5	Примеры сеток	24
5.1	Критерии оценки качества сетки	24
5.2	Примеры сеток на плоскости	27
5.2.1	Пример № 1	28
5.2.2	Пример № 2	29
5.2.3	Пример № 3	30
5.2.4	Пример № 4	32
5.2.5	Пример № 5	33
5.2.6	Пример № 6	36
5.3	Примеры сеток на гладких трехмерных поверхностях	38
5.3.1	Пример № 1	38
5.3.2	Пример № 2	40
5.3.3	Пример № 3	41
5.3.4	Пример № 4	42
5.3.5	Пример № 5	43
5.3.6	Пример № 6	45
6	Заключение	47
7	Литература	47

2 Введение

Решение задач математической физики обычно связано с численным решением дифференциальных уравнений. При этом требуется замена непрерывного физического пространства дискретным сеточным множеством. В решении задачи большую роль играет распределение узлов расчетной сетки – уравнения могут иметь более простую структуру, если сетка конформная или ортогональная. Кроме того, распределение граничных и внутренних узлов сетки зачастую влияет на сходимость. Таким образом, одной из центральных проблем в вычислительной гидродинамике и тепломассообмена является построение расчетных сеток с заданными свойствами.

Методы построения расчетных сеток могут быть поделены на стационарные (неподвижные) и адаптивные к решению (подвижные) методы. Речь пойдет о методах первой группы, которые делятся на:

1. Методы теории функций комплексного переменного.
2. Алгебраические методы.

3. Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений.

Методы теории функций комплексного переменного [1] обладают тем преимуществом, что используемые в них преобразования являются полностью или частично аналитическими. Вместе с тем, данные методы имеют ряд ограничений - например, затруднено построение сеток в многоблочных областях, затруднено управление распределением узлов сетки внутри расчетной области [2].

Алгебраические методы получили свое название от алгебраических отображений, которые для построения внутренних узлов сетки осуществляют интерполяцию граничных данных [3]. Распределение узлов внутри области осуществляется в основном за счет функций растяжения на границах. Распределение узлов вдоль границы области эффективно осуществляется нормализованными одномерными функциями растяжения, определенными на отрезках границы, обычно на каждой стороне расчетного криволинейного прямоугольника. Таким образом, применение данных методов затруднено в случае, если требуется получить сетку с заданным распределением внутренних узлов – а как раз этого требует построение ортогональной сетки.

Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений, относятся к числу самых развитых, поскольку при использовании дифференциального уравнения для построения сетки можно учесть свойства его решения. Для этой цели часто применяют уравнения Лапласа и Пуассона. Решение этой задачи дает гладкие и непересекающиеся изотермы. Если изотермы брать в качестве линий сетки, последние будут гладкими и непрерывными.

Дифференциальные уравнения стали основой метода, которому посвящена данная работа. Предлагаемый метод позволяет получать ортогональные четырехугольные сетки в многоблочных областях на плоскости и на гладких поверхностях в трехмерном пространстве с заданным распределением узлов сетки, иными словами, метод позволяет управлять сгущением узлов ортогональной сетки внутри расчетной области.

В начале работы дается математическая формулировка – показан вывод дифференциальных уравнений, лежащих в основе метода и составляющих его новизну. Данные уравнения решаются численно: на достаточно подробной опорной не ортогональной сетке (полученной, например, методом трансфинитной интерполяции) на основе метода конечных объемов (или вариационно-разностного метода) строится разностная схема и с использованием современных итерационных методов решается соответствующая самосопряженная эллиптическая задача. Для получения результирующей ортогональной сетки с заданными свойствами численное решение интерполируется линейно или кубическими сплайнами.

В работе показаны примеры сеток на плоскости и гладких поверхностях в трехмерном пространстве, построенных предлагаемым методом. Также приводятся численные показатели качества построенных сеток, подтверждающие практическую пригодность и значимость описанного метода.

3 Математическая формулировка метода

В данном разделе дается математическая формулировка и теоретическое обоснование предлагаемого метода.

3.1 Математическая формулировка метода построения двумерных ортогональных сеток на плоскости

В данном разделе будут получены уравнения, определяющие ортогональную криволинейную сетку в области $G \in R^2$, имеющей форму криволинейного четырехугольника на плоскости (Рис. 1).

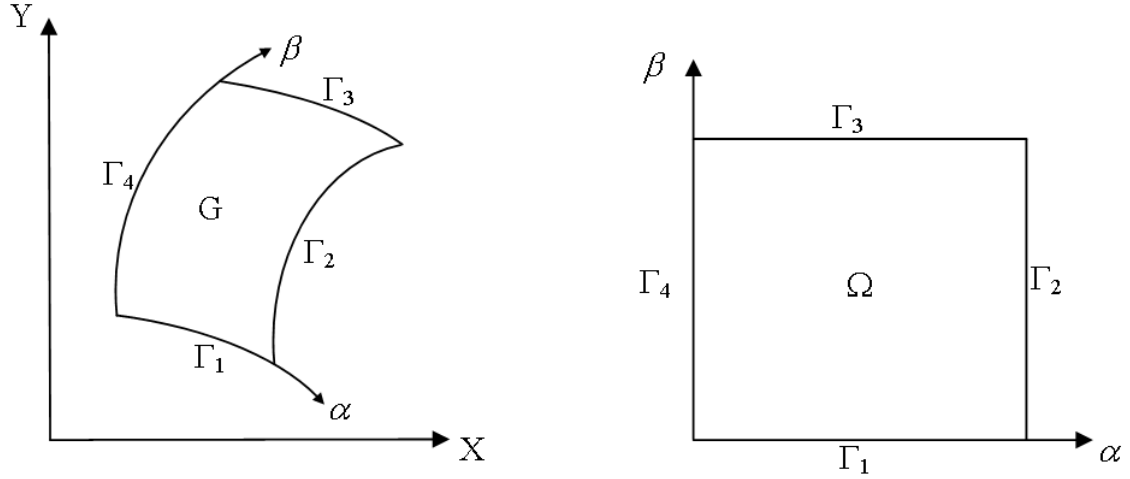


Рис. 1. Криволинейная область $G \in R^2$ и единичный квадрат Ω

Предположим, что в области $G \in R^2$ задана криволинейная система координат $\{\alpha(x, y), \beta(x, y)\}$ и существует невырожденное преобразование, отображающее криволинейную область G в единичный квадрат Ω , такое, что вершины криволинейного четырехугольника G переходят в вершины единичного квадрата Ω , а стороны четырехугольника G — в стороны квадрата Ω . Для определенности полагаем, что якобиан данного преобразования $\mathfrak{J} > 0$:

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial \beta} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha}}{1} > 0.$$

В области Ω построим равномерную по α, β сетку с шагами h_α, h_β соответственно. Данная сетка является прообразом некоторой криволинейной сетки области G (Рис. 1). Переход вдоль кривой $\alpha = \alpha(x, y)$ при фиксированном $\beta_0 = \beta_0(x, y)$ из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2) определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x = x(\alpha, \beta_0) \\ y = y(\alpha, \beta_0) \end{cases},$$

где $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Выберем локальный ковариантный базис в точке пересечения кривых $\alpha = \alpha(x, y) = const, \beta = \beta(x, y) = const$ в области G (Рис. 2). Орты локального ковариантного базиса описываются следующими соотношениями:

$$\vec{n}_\alpha = \frac{1}{l_\alpha} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \vec{n}_x + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \vec{n}_y \right), \vec{n}_\beta = \frac{1}{l_\beta} \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \vec{n}_x + \frac{\partial y}{\partial \beta} \vec{n}_y \right),$$

где $l_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$, $l_\beta = \sqrt{x_\beta^2 + y_\beta^2}$ — это нормировочные множители и

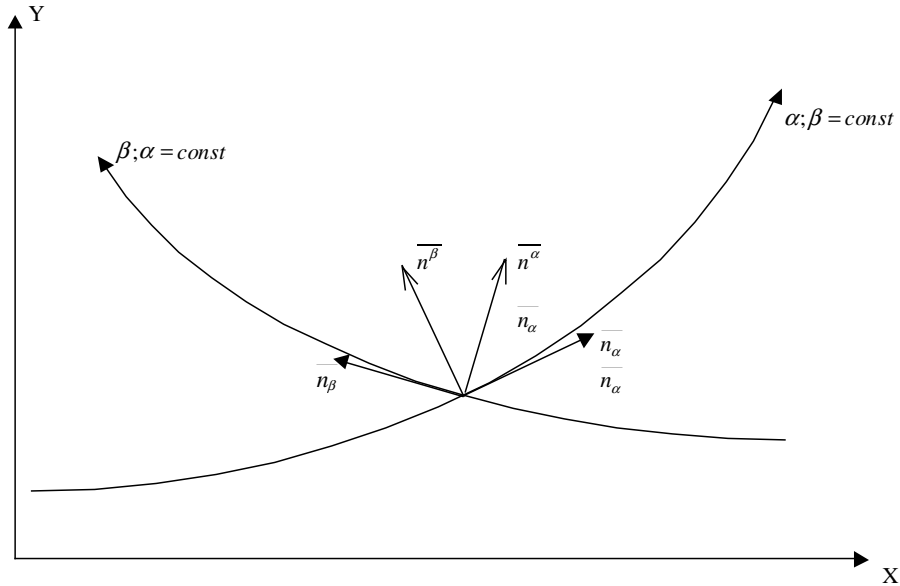
$$x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha}, y_\alpha = \frac{\partial y}{\partial \alpha}, x_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta}, y_\beta = \frac{\partial y}{\partial \beta}.$$


Рис. 2. Ковариантный и контравариантный базисы

Рассмотрим локальный базис (Рис. 2), контравариантный к $(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$. Орты контравариантного базиса удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \vec{n}^\alpha \vec{n}_\beta = 0 \\ \vec{n}^\alpha \vec{n}_\alpha > 0 \\ \vec{n}^\beta \vec{n}_\alpha = 0 \\ \vec{n}^\beta \vec{n}_\beta > 0 \end{cases}$$

Получим выражение для вектора $\vec{n}^\alpha = (a, b)$:

$$(a, b) \begin{pmatrix} \frac{x_\beta}{l_\beta} \\ \frac{y_\beta}{l_\beta} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a \frac{x_\beta}{l_\beta} + b \frac{y_\beta}{l_\beta} = 0 \Rightarrow \text{т.к. } a^2 + b^2 = 1, \text{ то } \begin{cases} a = \pm \frac{y_\beta}{l_\beta} \\ b = \mp \frac{x_\beta}{l_\beta} \end{cases}$$

Поскольку выполняется неравенство $\vec{n}^\alpha \vec{n}_\alpha > 0$, то запишем:

$$\vec{n}^\alpha \vec{n}_\alpha > 0 \Rightarrow \pm \left(\frac{x_\alpha}{l_\alpha} \frac{y_\beta}{l_\beta} - \frac{x_\beta}{l_\beta} \frac{y_\alpha}{l_\alpha} \right) = \frac{1}{l_\alpha l_\beta} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) > 0.$$

Учитывая, что $\mathfrak{S} > 0$

$$\vec{n}^\alpha = \frac{1}{l_\beta} \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \vec{n}_x - \frac{\partial x}{\partial \beta} \vec{n}_y \right) = \frac{1}{l_\beta} \begin{pmatrix} y_\beta \\ -x_\beta \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим вид орта \vec{n}^β локального контравариантного базиса:

$$\vec{n}^\beta = \frac{1}{l_\alpha} \left(-\frac{\partial y}{\partial \alpha} \vec{n}_x + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \vec{n}_y \right) = \frac{1}{l_\alpha} \begin{pmatrix} -y_\alpha \\ x_\alpha \end{pmatrix}.$$

Получим выражение для градиента произвольной скалярной функции T в локальном контравариантном базисе $\vec{n}^\alpha, \vec{n}^\beta$

$$\text{grad} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \mathfrak{S} = \frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right).$$

Запишем проекции $\text{grad} T$ на орт \vec{n}^α :

$$\begin{aligned} \text{grad}^\alpha T &= \text{grad} T \cdot \vec{n}^\alpha = \frac{1}{\mathfrak{S}} (T_\alpha y_\beta - T_\beta y_\alpha, T_\beta x_\alpha - T_\alpha x_\beta) \cdot \frac{1}{l_\beta} \begin{pmatrix} y_\beta \\ -x_\beta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial \beta} l_\alpha \right). \end{aligned} \quad (1)$$

где φ — угол между векторами \vec{n}^α и \vec{n}^β .

$$\text{grad}^\beta T = \text{grad} T \cdot \vec{n}^\beta = \frac{1}{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial \alpha} l_\beta \right). \quad (2)$$

Следовательно, градиент функции T в базисе $(\vec{n}^\alpha, \vec{n}^\beta)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \text{grad}^\alpha T \\ \text{grad}^\beta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{\mathfrak{S}} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{\mathfrak{S}} \frac{\partial T}{\partial \beta} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Обозначим $B = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$B^{-1} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Умножая выражение (3) на B^{-1} и подставляя (4), получим:

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{grad}^\alpha T \\ \text{grad}^\beta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{\mathfrak{S}} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{\mathfrak{S}} \frac{\partial T}{\partial \beta} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Определим функции $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ в области $G \in R^2$. Введем функции $\vec{u} = u(\alpha, \beta) = \text{grad} \theta$ и $\vec{w} = w(\alpha, \beta) = \text{grad} \eta$. Компоненты векторов \vec{u} и \vec{w} в локальном контравариантном базисе $\{\bar{n}^\alpha, \bar{n}^\beta\}$:

$$\begin{cases} u^\alpha = \text{grad}^\alpha \theta \\ u^\beta = \text{grad}^\beta \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} w^\alpha = \text{grad}^\alpha \eta \\ w^\beta = \text{grad}^\beta \eta \end{cases}.$$

Используя новые обозначения, перепишем выражение (5) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^\alpha \\ w^\beta \end{pmatrix} = \sin^2 \varphi \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{\mathfrak{S}} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{\mathfrak{S}} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Принимая во внимание, что $\cos \varphi = (\bar{n}^\alpha, \bar{n}^\beta) = \frac{1}{l_\alpha l_\beta} (x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta)$, получим $\sin^2 \varphi$:

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{(x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha)^2}{(l_\alpha l_\beta)^2} = \frac{\mathfrak{S}^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2}. \quad (7)$$

Выражение (6) примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^\alpha \\ w^\beta \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{S}^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2} \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{\mathfrak{S}} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{\mathfrak{S}} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Потребуем выполнения условия ортогональности векторов \vec{u} , \vec{w} , заданных в базисе $\{\bar{n}^\alpha, \bar{n}^\beta\}$:

$$(\vec{u}, \vec{w}) = 0,$$

следовательно

$$(u^\alpha \quad u^\beta) \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^\alpha \\ w^\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

Применяя соотношение (8), получим:

$$(u^\alpha u^\beta) \begin{pmatrix} l_\beta \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \mathfrak{I} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \\ l_\alpha \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \\ \mathfrak{I} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

Для выполнения условия (10) достаточно выполнения следующих соотношений:

$$\begin{cases} \frac{l_\beta u^\alpha}{\mathfrak{I}} = \eta_\beta \\ \frac{l_\alpha u^\beta}{\mathfrak{I}} = -\eta_\alpha \end{cases} \quad (11)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (11) по α , а второе по β , и складывая их, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{l_\beta u^\alpha}{\mathfrak{I}} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{l_\alpha u^\beta}{\mathfrak{I}} = 0 \quad (12)$$

На основе выражений (1) и (2) запишем выражение для компонент градиента u :

$$\begin{cases} u^\alpha = \frac{1}{\mathfrak{I}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha \right) \\ u^\beta = \frac{1}{\mathfrak{I}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta \right) \end{cases}.$$

С целью получения выражения, содержащего θ , подставим в (12) полученные проекции u^α и u^β :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{l_\beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha \right)}{\mathfrak{I}^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{l_\alpha \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta \right)}{\mathfrak{I}^2} = 0. \quad (13)$$

Поставим граничные условия к уравнению (13):

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \\ \theta = 1 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_3 \\ (\vec{u}, \vec{n}) = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \end{cases} \quad (14)$$

где \vec{n} — нормаль к границе $(\alpha, \beta) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4$, $\cos \varphi = -\frac{x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta}{l_\alpha l_\beta}$, $l_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$,

$l_\beta = \sqrt{x_\beta^2 + y_\beta^2}$, получаем смешанную краевую задачу, состоящую из дифференциального уравнения эллиптического типа относительно θ . В дальнейшем, изолинии функции θ будут служить линиями искомой ортогональной сетки.

Для получения дифференциального уравнения относительно η , запишем выражение (9) в следующем виде:

$$(w^\alpha \ w^\beta) \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\alpha \\ u^\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Учитывая, что

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\alpha \\ u^\beta \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{S}^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2} \begin{pmatrix} l_\beta \frac{\partial \theta}{\mathfrak{S}} \\ l_\alpha \frac{\partial \theta}{\mathfrak{S}} \end{pmatrix},$$

запишем (15) в виде:

$$(w^\alpha \ w^\beta) \begin{pmatrix} l_\beta \frac{\partial \theta}{\mathfrak{S}} \\ l_\alpha \frac{\partial \theta}{\mathfrak{S}} \end{pmatrix} = 0. \quad (16)$$

Для выполнения условия (16) достаточно выполнения следующих соотношений:

$$\begin{cases} \frac{l_\beta w^\alpha}{\mathfrak{S}} = \theta_\beta \\ \frac{l_\alpha w^\beta}{\mathfrak{S}} = -\theta_\alpha \end{cases} \quad (17)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (17) по α , а второе по β , и складывая их, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{l_\beta w^\alpha}{\mathfrak{S}} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{l_\alpha w^\beta}{\mathfrak{S}} = 0 \quad (18)$$

На основе выражений (1) и (2) запишем выражение для компонент градиента w :

$$\begin{cases} w^\alpha = \frac{1}{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \beta} l_\alpha \right) \\ w^\beta = \frac{1}{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} l_\beta \right) \end{cases}$$

Подставим в (18) полученные определения проекций w^α и w^β :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{l_\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \beta} l_\alpha \right)}{\mathfrak{S}^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{l_\alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} l_\beta \right)}{\mathfrak{S}^2} = 0. \quad (19)$$

Поставим граничные условия для уравнения (19):

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_2 \\ \eta = 1 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_4 \\ (\vec{w}, \vec{n}) = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases} \quad (20)$$

где \vec{n} — нормаль к границе $(\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3$.

Таким образом, уравнения (13) и (19) и граничные условия (14) и (20) к ним определяют семейства ортогональных функций $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ в заданной области $G \in R^2$ на плоскости.

Преобразуем уравнение (19) к следующему виду:

$$(y'_\beta{}^2 + x'_\beta{}^2)\eta''_{\alpha\alpha} - 2(y'_\alpha y'_\beta + x'_\alpha x'_\beta)\eta''_{\alpha\beta} + (y'_\alpha{}^2 + x'_\alpha{}^2)\eta''_{\beta\beta} = 0.$$

Детерминант приведенного уравнения имеет следующий вид:

$$D = (y'_\alpha y'_\beta + x'_\alpha x'_\beta)^2 - (y'_\beta{}^2 + x'_\beta{}^2)(y'_\alpha{}^2 + x'_\alpha{}^2) = -(x'_\alpha{}^2 y'_\beta{}^2 - x'_\beta{}^2 y'_\alpha{}^2)^2 = -\mathfrak{S}^2 < 0.$$

Таким образом, уравнение (19) является эллиптическим уравнением. Выполняя аналогичные операции легко показать, что уравнение (13) также является эллиптическим.

3.2 Математическая формулировка метода построения двумерных ортогональных сеток на гладкой трехмерной поверхности

Перейдем к построению ортогональной криволинейной сетки в области $G \in R^2$, имеющей форму криволинейного четырехугольника в пространстве (Рис. 3).

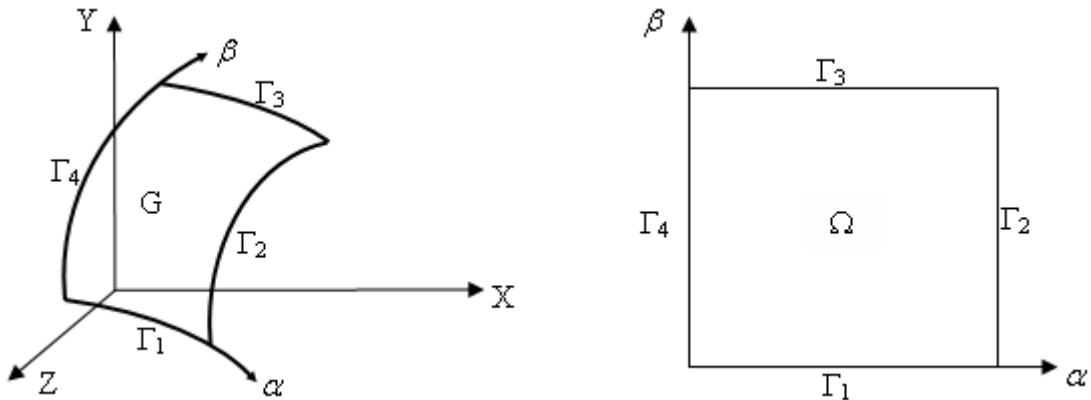


Рис. 3. Криволинейная область $G \in R^2$ в пространстве и единичный квадрат Ω

Предположим, что в области $G \in R^2$ в трехмерном пространстве задана криволинейная система координат $\{\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z)\}$, и существует невырожденное преобразование, отображающее криволинейную область G в единичный квадрат Ω такое, что: вершины криволинейного четырехугольника G переходят в вершины единичного квадрата Ω , а стороны четырехугольника G — в стороны квадрата Ω . Для определенности полагаем, что якобианы данного преобразования $\mathfrak{S}_{xy} > 0$, $\mathfrak{S}_{yz} > 0$ и $\mathfrak{S}_{xz} > 0$:

$$\mathfrak{S}_{xy} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial \beta} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha}}{1} > 0,$$

$$\mathfrak{S}_{yz} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial \beta} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \alpha}}{1} > 0,$$

$$\mathfrak{S}_{xz} = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial \beta} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \alpha}}{1} > 0.$$

В области Ω построим равномерную по α и равномерную по β сетку с шагами h_α, h_β соответственно, которая является прообразом некоторой криволинейной сетки в области G (Рис. 3).

Выберем локальный ковариантный базис в точке пересечения кривых $\alpha = \alpha(x, y, z) = const, \beta = \beta(x, y, z) = const$ в области G . Орты локального ковариантного базиса описываются следующими соотношениями:

$$\bar{n}_\alpha = \frac{1}{l_\alpha} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \bar{n}_x + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \bar{n}_y + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \bar{n}_z \right), \quad \bar{n}_\beta = \frac{1}{l_\beta} \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \bar{n}_x + \frac{\partial y}{\partial \beta} \bar{n}_y + \frac{\partial z}{\partial \beta} \bar{n}_z \right),$$

где $l_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2}$, $l_\beta = \sqrt{x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2}$ — это нормировочные множители и $x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha}, x_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta}, y_\alpha = \frac{\partial y}{\partial \alpha}, y_\beta = \frac{\partial y}{\partial \beta}, z_\alpha = \frac{\partial z}{\partial \alpha}, z_\beta = \frac{\partial z}{\partial \beta}$.

Рассмотрим локальный контравариантный базис. Орты $\bar{n}^\alpha, \bar{n}^\beta$ локального контравариантного базиса удовлетворяют следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{n}^\alpha \bar{n}_\beta = 0 \\ \bar{n}^\alpha \bar{n}_\perp = 0 \\ \bar{n}^\alpha \bar{n}_\alpha > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{n}^\beta \bar{n}_\alpha = 0 \\ \bar{n}^\beta \bar{n}_\perp = 0 \\ \bar{n}^\beta \bar{n}_\beta > 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

где $\vec{n}_\perp = [\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta]$.

Выполнение условий $\vec{n}^\alpha \vec{n}_\perp = 0$ и $\vec{n}^\beta \vec{n}_\perp = 0$ необходимо для того, чтобы вектора \vec{n}^α и \vec{n}^β лежали в той же плоскости, что \vec{n}_α и \vec{n}_β .

Запишем выражение для орта \vec{n}_\perp :

$$l_\perp \vec{n}_\perp = [\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta] = \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \frac{x_\alpha}{l_\alpha} & \frac{y_\alpha}{l_\alpha} & \frac{z_\alpha}{l_\alpha} \\ \frac{x_\beta}{l_\beta} & \frac{y_\beta}{l_\beta} & \frac{z_\beta}{l_\beta} \end{vmatrix} = \vec{n}_x \frac{1}{l_\alpha l_\beta} \mathfrak{S}_{yz} - \vec{n}_y \frac{1}{l_\alpha l_\beta} \mathfrak{S}_{xz} + \vec{n}_z \frac{1}{l_\alpha l_\beta} \mathfrak{S}_{xy},$$

где $l_\perp = \left| [l_\alpha \vec{n}_\alpha \times l_\beta \vec{n}_\beta] \right| = l_\alpha l_\beta = \sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{xz}^2}$ есть нормировочный множитель.

Учитывая, что $\cos^2 \varphi = \frac{(x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta)^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2}$, получим выражение для $\sin \varphi$:

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{(x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta)^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2} = \frac{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{xz}^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2} \quad (22)$$

Следовательно,

$$\vec{n}_\perp = \frac{1}{l_\perp} \left(\frac{\mathfrak{S}_{yz}}{l_\alpha l_\beta}; -\frac{\mathfrak{S}_{xz}}{l_\alpha l_\beta}; \frac{\mathfrak{S}_{xy}}{l_\alpha l_\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{xz}^2}} (\mathfrak{S}_{yz}; -\mathfrak{S}_{xz}; \mathfrak{S}_{xy}).$$

Из условий (21) следует, что вектор \vec{n}^α должен быть коллинеарным векторному произведению $[\vec{n}_\perp \times \vec{n}_\beta]$. Учитывая, что вектора \vec{n}_\perp и \vec{n}_β нормированы, получим $\vec{n}^\alpha = \pm [\vec{n}_\perp \times \vec{n}_\beta]$. Найдем выражение для $[\vec{n}_\perp \times \vec{n}_\beta]$:

$$[\vec{n}_\perp \times \vec{n}_\beta] = \left(-\frac{\mathfrak{S}_{xz} z_\beta + \mathfrak{S}_{xy} y_\beta}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{xz}^2}}; \frac{-\mathfrak{S}_{yz} z_\beta + \mathfrak{S}_{xy} x_\beta}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{xz}^2}}; \frac{\mathfrak{S}_{yz} y_\beta + \mathfrak{S}_{xz} x_\beta}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{xz}^2}} \right).$$

Установим знак в выражении $\vec{n}^\alpha = \pm [\vec{n}_\perp \times \vec{n}_\beta]$ исходя из того, что $\vec{n}^\alpha \vec{n}_\alpha > 0$ (см. (21)). Учитывая, что множитель $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{xz}^2}}$ на знак выражения не влияет, запишем:

$$\begin{aligned} \vec{n}^\alpha \vec{n}_\alpha &= -(\mathfrak{S}_{xz} z_\beta + \mathfrak{S}_{xy} y_\beta) x_\alpha + (-\mathfrak{S}_{yz} z_\beta + \mathfrak{S}_{xy} x_\beta) y_\alpha + (\mathfrak{S}_{yz} y_\beta + \mathfrak{S}_{xz} x_\beta) z_\alpha = \\ &= \mathfrak{S}_{xz} (-x_\alpha z_\beta + x_\beta z_\alpha) + \mathfrak{S}_{yz} (-y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha) + \mathfrak{S}_{xy} (-x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha) = -\mathfrak{S}_{xz}^2 - \mathfrak{S}_{yz}^2 - \mathfrak{S}_{xy}^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку выражение (23) заведомо меньше нуля, то для выполнения условия $\vec{n}^\alpha \vec{n}_\alpha > 0$ сменяем знак компонент вектора \vec{n}^α (условия (21) при этом выполняются):

$$\vec{n}^\alpha = \left(\frac{\mathfrak{S}_{xz} z_\beta + \mathfrak{S}_{xy} y_\beta}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2}}; \frac{\mathfrak{S}_{yz} z_\beta - \mathfrak{S}_{xy} x_\beta}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2}}; \frac{-\mathfrak{S}_{yz} y_\beta - \mathfrak{S}_{xz} x_\beta}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2}} \right).$$

Аналогичным образом получим выражение для \vec{n}^β . Таким образом, орты локального контравариантного базиса имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}^\alpha = \frac{1}{l^\alpha} (x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha) \\ x^\alpha = z_\beta \mathfrak{S}_{xz} + y_\beta \mathfrak{S}_{xy} \\ y^\alpha = z_\beta \mathfrak{S}_{yz} - x_\beta \mathfrak{S}_{xy} \\ z^\alpha = -x_\beta \mathfrak{S}_{xz} - y_\beta \mathfrak{S}_{yz} \\ l^\alpha = \frac{\sqrt{(x^\alpha)^2 + (y^\alpha)^2 + (z^\alpha)^2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}^\beta = \frac{1}{l^\beta} (x^\beta, y^\beta, z^\beta) \\ x^\beta = -z_\alpha \mathfrak{S}_{xz} - y_\alpha \mathfrak{S}_{xy} \\ y^\beta = -z_\alpha \mathfrak{S}_{yz} + x_\alpha \mathfrak{S}_{xy} \\ z^\beta = x_\alpha \mathfrak{S}_{xz} + y_\alpha \mathfrak{S}_{yz} \\ l^\beta = \frac{\sqrt{(x^\beta)^2 + (y^\beta)^2 + (z^\beta)^2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2}} \end{array} \right.$$

Найдем проекцию $grad T$ на орт \vec{n}^α , где T — произвольная скалярная функция:

$$grad^\alpha T = grad T \cdot \vec{n}^\alpha = \frac{1}{l^\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial x} x^\alpha + \frac{\partial T}{\partial y} y^\alpha + \frac{\partial T}{\partial z} z^\alpha \right). \quad (24)$$

Рассмотрим компоненты $grad^\alpha T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} x^\alpha &= \frac{\partial T}{\partial x} (z_\beta \mathfrak{S}_{xz} + y_\beta \mathfrak{S}_{xy}) = z_\beta \frac{\partial(T, z)}{\partial(x, z)} \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + y_\beta \frac{\partial(T, y)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} \\ \frac{\partial T}{\partial y} y^\alpha &= \frac{\partial T}{\partial y} (z_\beta \mathfrak{S}_{yz} - x_\beta \mathfrak{S}_{xy}) = z_\beta \frac{\partial(T, z)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + x_\beta \frac{\partial(T, x)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} \\ \frac{\partial T}{\partial z} z^\alpha &= \frac{\partial T}{\partial z} (-x_\beta \mathfrak{S}_{xz} - y_\beta \mathfrak{S}_{yz}) = x_\beta \frac{\partial(T, x)}{\partial(x, z)} \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + y_\beta \frac{\partial(T, y)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку $T = T(x, y, z)$, а x , y и z , в свою очередь, являются функциями от переменных α и β , то функция T является сложной функцией от α и β , а значит:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(T, x)}{\partial(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial(T, x)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(T, x)}{\partial(x, z)} \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} \\
\frac{\partial(T, y)}{\partial(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial(T, y)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(T, y)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)} \\
\frac{\partial(T, z)}{\partial(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial(T, z)}{\partial(x, z)} \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(T, z)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)}
\end{aligned} \tag{26}$$

Распишем якобианы (26):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(T, x)}{\partial(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial(T, y)}{\partial(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial(T, z)}{\partial(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \alpha}
\end{aligned} \tag{27}$$

Выражение (24) принимает следующий вид:

$$\mathit{grad}^\alpha T = \frac{1}{l^\alpha} \left((x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2) \frac{\partial T}{\partial \alpha} - (x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta) \frac{\partial T}{\partial \beta} \right).$$

Аналогично,

$$\mathit{grad}^\beta T = \mathit{grad} T \cdot \bar{n}^\beta = \frac{1}{l^\beta} \left(-(x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta) \frac{\partial T}{\partial \alpha} + (x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2) \frac{\partial T}{\partial \beta} \right).$$

Отметим, что поскольку $l^\alpha = l_\perp l_\beta$ и $l^\beta = l_\perp l_\alpha$, то

$$\begin{aligned}
\frac{x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2}{l^\alpha} &= \frac{l_\beta}{l_\perp}, \quad \frac{x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2}{l^\beta} = \frac{l_\alpha}{l_\perp} \\
\frac{x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta}{l^\alpha} &= \frac{l_\alpha \cos \varphi}{l_\perp} \\
\frac{x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta}{l^\beta} &= \frac{l_\beta \cos \varphi}{l_\perp}
\end{aligned}$$

Следовательно, выражение для градиента в контравариантном базисе принимает вид:

$$\mathit{grad}^{\alpha, \beta} T = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{l_\perp} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{l_\perp} \frac{\partial T}{\partial \beta} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Определим функции $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ в области $G \in R^2$. Введем функции $\bar{u} = u(\alpha, \beta) = \mathit{grad} \theta$ и $\bar{w} = w(\alpha, \beta) = \mathit{grad} \eta$. В локальном контравариантном базисе $\{\bar{n}^\alpha, \bar{n}^\beta\}$ компоненты векторов \bar{u} и \bar{w} обозначим следующим образом:

$$\begin{cases} u^\alpha = \text{grad}^\alpha \theta \\ u^\beta = \text{grad}^\beta \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^\alpha = \text{grad}^\alpha \eta \\ w^\beta = \text{grad}^\beta \eta \end{cases}$$

а также (следует из (28)),

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{l_\perp} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{l_\perp} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \end{pmatrix},$$

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{pmatrix}.$$

Ранее было показано, что матрица $\frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}$ является обратной к $\begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix}$ (см. (5)), следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^\alpha \\ w^\beta \end{pmatrix} = \sin^2 \varphi \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{pmatrix}.$$

Подставим выражение (22) для $\sin^2 \varphi$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^\alpha \\ w^\beta \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2} \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{pmatrix}.$$

Потребуем выполнения условия ортогональности для векторов \bar{u}, \bar{w} , заданных в базисе $\{\bar{n}^\alpha, \bar{n}^\beta\}$ ($\bar{u}, \bar{w}) = 0$:

$$(u^\alpha \quad u^\beta) \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^\alpha \\ w^\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (29)$$

Учитывая, что $\frac{\mathfrak{S}_{xy}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2 + \mathfrak{S}_{yz}^2}{l_\alpha^2 l_\beta^2} \neq 0$, запишем:

$$(u^\alpha \quad u^\beta) \begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \frac{l_\alpha}{l_\perp} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{pmatrix} = 0, \quad (30)$$

что эквивалентно

$$\begin{pmatrix} \frac{l_\beta}{l_\perp} u^\alpha & \frac{l_\alpha}{l_\perp} u^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \eta_\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (31)$$

Производя операции, аналогичные произведенным над выражениями (11)-(12), получим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{l_\beta u^\alpha}{l_\perp} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{l_\alpha u^\beta}{l_\perp} = 0$$

$$\begin{cases} u^\alpha = \frac{1}{l_\perp} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha \right) \\ u^\beta = \frac{1}{l_\perp} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta \right) \end{cases}$$

Следовательно, получаем уравнение относительно θ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{l_\beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha \right)}{l_\perp^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{l_\alpha \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} l_\beta \right)}{l_\perp^2} = 0. \quad (32)$$

Добавляя к уравнению (32) граничные условия

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \\ \theta = 1 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_3 \\ (\vec{u}, \vec{n}) = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \end{cases},$$

где \vec{n} — нормаль к границе $(\alpha, \beta) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4$, получаем смешанную краевую задачу относительно θ . В дальнейшем, изолинии функции θ будут служить линиями искомой ортогональной сетки.

Аналогичным образом получим краевую задачу для η :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{l_\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} l_\beta - \cos \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \beta} l_\alpha \right)}{l_\perp^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{l_\alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial \beta} l_\alpha - \cos \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} l_\beta \right)}{l_\perp^2} = 0. \quad (33)$$

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_2 \\ \eta = 1 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_4 \\ (\vec{w}, \vec{n}) = 0 \\ (\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases}$$

где \vec{n} — нормаль к границе $(\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3$.

В данном разделе метод построения семейств ортогональных функций $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta = \eta(\alpha, \beta)$, предложенный в предыдущей главе для случая на плоскости, распространен на область, имеющей форму криволинейного четырехугольника и заданную на поверхности в трехмерном пространстве.

Преобразуем уравнение (33) к следующему виду:

$$(x_\beta'^2 + y_\beta'^2 + z_\beta'^2) \eta''_{\alpha\alpha} + (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2) \eta''_{\beta\beta} - 2(x_\alpha' x_\beta' + y_\alpha' y_\beta' + z_\alpha' z_\beta') \eta''_{\alpha\beta} = 0.$$

Данное уравнение имеет следующий детерминант:

$$\begin{aligned} D &= (x_\alpha' x_\beta' + y_\alpha' y_\beta' + z_\alpha' z_\beta')^2 - (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2)(x_\beta'^2 + y_\beta'^2 + z_\beta'^2) = \\ &= -l_\alpha^2 l_\beta^2 + l_\alpha^2 l_\beta^2 \cos^2 \varphi = -l_\alpha^2 l_\beta^2 \sin^2 \varphi < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (32) и (33) являются эллиптическими уравнениями.

4 Интерполяция численного решения

Согласно дифференциальным уравнениям (13) и (19), (32) и (33), если заданы произвольные константы $\theta' \in [0, 1]$ и $\eta' \in [0, 1]$, то линии $\theta' = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta' = \eta(\alpha, \beta)$ перпендикулярны. Согласно выводу дифференциальных уравнений, такая точка существует и единственна.

Современные численные методы позволяют получить решение выведенных дифференциальных уравнений относительно функций $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ в узлах заданной четырехугольной сетки. Следовательно, для получения узла искомой ортогональной сетки необходимо интерполировать значения функций $\theta(\alpha, \beta)$ и $\eta(\alpha, \beta)$, заданных в узлах расчетной сетки, построить изолинии функций $\theta(\alpha, \beta)$ и $\eta(\alpha, \beta)$ и найти точки их пересечения. Для получения всех узлов искомой ортогональной сетки необходимо задать наборы значений изолиний $\{\theta_p\}$ и $\{\eta_q\}$ таких, что $0 \leq \theta_p < \theta_{p+1} \leq 1$, $0 \leq \eta_q < \eta_{q+1} \leq 1$, где $p = 0, \dots, n_p$, $q = 0, \dots, m_q$, а $n_p + 1$ и $m_q + 1$ есть размерности искомой сетки, и найти точки пересечения этих изолиний. В этом случае точка пересечения изолиний θ_p и η_q будет соответствовать узлу искомой сетки с индексом (p, q) .

Способ задания констант-уровней изолиний $\{\theta_p\}$ и $\{\eta_q\}$ позволяет управлять расстановкой ячеек результирующей сетки. Одним из способов задания значений $\{\theta_p\}$ и $\{\eta_q\}$ есть их равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, т.е. $\theta_p = \frac{p}{n_p}, i = 0, \dots, n_p$ и $\eta_q = \frac{q}{m_q}, q = 0, \dots, m_q$. В силу криволинейности опорной сетки это не гарантирует получение сетки, равномерной в физическом пространстве вычислительной модели, и свойства таких сеток напрямую зависят от геометрии расчетной области. Варьированием шага между значениями изолиний $\theta(\alpha, \beta)$ ($\eta(\alpha, \beta)$) достигается сгущение сетки вдоль одной или нескольких изолиний. Например, сгущение искомой сетки вблизи границы Γ_1 (см. (14)) достигается уменьшением шага сетки $\theta_{q+1} - \theta_q$ с одновременным уменьшением значения индекса q . Другим примером такого сгущения могут служить уровни изолиний, определяемые формулой геометрической прогрессии $\theta_p = \frac{p^2}{n_p^2}, q = 0, \dots, n_p$.

Имея семейство функций, заданных на четырехугольной опорной сетке, интерполируем их значения с целью получения точек пересечения изолиний с заранее заданными значениями уровней. Вместо функций $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ будем рассматривать сеточные функции $\theta_{ij} = \theta_{mesh}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ и $\eta_{ij} = \eta_{mesh}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, полученные в результате решения выведенных выше уравнений, где $i = 0, \dots, n_i, j = 0, \dots, n_j$ суть индексы узлов опорной сетки, а $n_i + 1, n_j + 1$ — ее размерности. Общий алгоритм получения координат (x_{pq}, y_{pq}, z_{pq}) узла искомой сетки с индексом (p, q) будет следующим:

«Протяжка» изолинии $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$ между ребрами ячеек опорной сетки, т.е. нахождение упорядоченной последовательности точек, являющихся пересечениями линии $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$ и ребер сетки. Вычисление координат опорных точек изолинии состоит из следующих шагов:

Определение координат точки на стороне опорной сетки (т.е. на линии $i = 0$ или $j = 0$ — в зависимости от порядка нумерации узлов опорной сетки), для которой выполняется $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$. Одновременно определяем индекс ячейки, к которой эта точка принадлежит. Таким образом, мы получаем первую опорную точку изолинии.

На одной из сторон найденной ячейки сетки находим координаты второй точки, для которой выполняется $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$. Таким образом, мы имеем отрезок изолинии θ_p внутри граничной ячейки. Одновременно с вычислением координат второго узла изолинии определяем сторону ячейки, которой принадлежит узел.

Определяем индекс следующей ячейки, через которую проходит изолиния. Индекс данной ячейки находится исходя из того, на которой из сторон ячейки была найдена последняя на данный момент точка изолинии (в зависимости от этого следует уменьшить или увеличить один из индексов i или j ячейки).

Учитывая, что при рассмотрении предыдущей ячейки были получена точка, принадлежащая текущей ячейке, то, применяя шаг b, имеем отрезок изолинии $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$ внутри рассматриваемой ячейки.

Повторяем шаги b, c и d до тех пор, пока не достигнем противоположной, относительно найденной на шаге a, границе сетки. Полученная последовательность точек соответствует изолинии $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$.

1. Вычисление значений функции η_{mesh} в точках изолинии, полученной на этапе 1.
2. Определение индекса (i_{pq}, j_{pq}) ячейки опорной сетки, содержащей значение интерполированной функции $\eta_{mesh}(x, y, z) = \eta_q$. Следовательно, определяется отрезок построенной изолинии
3. $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$, содержащий значение η_q функции $\eta_{mesh}(x, y, z)$.
4. Определение физических координат точки $(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta)$ такой, что:
 - Точка $(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta)$ лежит на рассматриваемом сегменте линии $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$.
 - Точка $(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta)$ такова, что функция η_{mesh} , будучи интерполированной на рассматриваемом сегменте линии $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$, принимает значение $\eta_{mesh}(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta) = \eta_q$.
5. Следовательно, в полученной таким образом точке $(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta)$ выполняется условие пересечения двух изолиний, т.к. выполняются равенства $\theta_{mesh}(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta) = \theta_p$ и $\eta_{mesh}(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta) = \eta_q$.
6. Повторение шагов 1-4 со сменой местами функций θ и η (т.е. замена θ_{mesh} на η_{mesh} , θ_p на η_q и т.д.), т.е. нахождение на изолинии $\eta_{mesh}(x, y, z) = \eta_q$ точки $(x_{pq}^\eta, y_{pq}^\eta, z_{pq}^\eta)$ такой, что $\theta_{mesh}(x_{pq}^\eta, y_{pq}^\eta, z_{pq}^\eta) = \theta_p$.
7. Определение координат (x_{pq}, y_{pq}, z_{pq}) узла искомой сетки как среднего арифметического $(x_{pq}^\theta, y_{pq}^\theta, z_{pq}^\theta)$ и $(x_{pq}^\eta, y_{pq}^\eta, z_{pq}^\eta)$, т.е.:

$$\begin{pmatrix} x_{pq} \\ y_{pq} \\ z_{pq} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x_{pq}^\theta \\ y_{pq}^\theta \\ z_{pq}^\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{pq}^\eta \\ y_{pq}^\eta \\ z_{pq}^\eta \end{pmatrix} \right).$$

При установлении факта принадлежности значения функции η сегменту изолинии θ (и наоборот, функции θ сегменту изолинии η), а также принадлежности значения функции θ граничному ребру сетки, следует учитывать, что $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ является монотонной (в силу метода, которым она находится) вдоль каждой изолинии функции $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ (в т.ч. и изолинии, совпадающей с границей сетки). Аналогичное утверждение верно и для функции $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ относительно изолиний $\theta = \theta(\alpha, \beta)$.

Предлагаемый алгоритм использует интерполяцию значений функций, заданных в точках кривой. Этапы 1 (шаги 1a, 1b) и 4 основаны на вычислении координат точки сегмента кривой по заданному значению функции, значения которой известны на концах этого сегмента кривой. Т.е. данные шаги опираются на интерполяцию координат точек кривых (этап 1 – интерполяция координат кривых-ребер

сетки между узлами сетки, этап 4 – интерполяция координат изолинии функции между опорными точками-пересечениями изолинии с ребрами). Этап 4 использует интерполяцию для вычисления значения функции в известной точке кривой по координатам этой точки и заданным значениям функции в некоторых точках кривой.

Описана общая формулировка алгоритма построения ортогональной сетки на основе сеточного решения полученных дифференциальных уравнений. Программная реализация алгоритма зависит от выбранного способа интерполяции. Далее рассматривается математический аппарат двух способов интерполяции — линейной и кубическими сплайнами.

4.1 Линейная интерполяция численного решения

Общий алгоритм построения ортогональной сетки использует интерполяцию функций для двух целей:

1. вычисление значения функции в заданной точке кривой;
2. вычисление координат точки кривой, в которой функция, будучи интерполированной, принимает заданное значение.

Пусть некоторая кривая задана последовательностью опорных точек с известными координатами и значениями функции.

При использовании линейной интерполяции кривая, в опорных точках которой задана функция, заменяется ломаной, а функция интерполируется на каждом отрезке ломаной независимо от остальных отрезков (общий алгоритм интерполяции предписывает способ выбора такого отрезка). Пусть концы отрезка, в заданной точке (x', y', z') которого будем вычислять значение функции, имеют координаты (x_a, y_a, z_a) и (x_b, y_b, z_b) , а функция в этих точках принимает значения $f_a = f(x_a, y_a, z_a)$ и $f_b = f(x_b, y_b, z_b)$. Тогда значение функции $f' = f(x', y', z')$ определяется следующим образом:

$$f' = (f_b - f_a) \frac{x' - x_a}{x_b - x_a} + f_a \text{ при } x_a \neq x_b;$$

$$f' = (f_b - f_a) \frac{y' - y_a}{y_b - y_a} + f_a \text{ при } y_a \neq y_b;$$

$$f' = (f_b - f_a) \frac{z' - z_a}{z_b - z_a} + f_a \text{ при } z_a \neq z_b;$$

$$f' = f_a \text{ при } x_a = x_b, y_a = y_b \text{ и } z_a = z_b.$$

Если на рассматриваемом отрезке задана не точка (x', y', z') , а значение f' , то координаты точки (x', y', z') будут определяться следующим образом:

$$\begin{cases} x' = (x_b - x_a) \frac{f' - f_a}{f_b - f_a} + x_a \\ y' = (y_b - y_a) \frac{f' - f_a}{f_b - f_a} + y_a \\ z' = (z_b - z_a) \frac{f' - f_a}{f_b - f_a} + z_a \end{cases}$$

при $f_a \neq f_b$.

При $f_a = f_b$ искомой точкой может служить любая точка отрезка, т.е. таких точек бесконечно много. Согласно алгоритму, нам необходимо получить одну точку. Поэтому во избежание случая $f_a = f_b$ на значения функции в опорных точках ломаной накладывается «шум»: значения функции изменяются на малые случайные величины, влияющие на вид конечной сетки незначительно. При реализации на ЭВМ данные величины генерируются датчиком случайных чисел, а размер величин берется таким, чтобы при заданной точности вычислительных операций (определяется конкретной аппаратурой ЭВМ, языком программирования, типами данных и т.п.) выполнялось условие $f_b - f_a \neq 0$ и значение выражения $\frac{f'_b - f'_a}{f_b - f_a}$ было бы не слишком велико (в противном случае, при операциях с обычно используемыми типами данных, основанных на числах с плавающей запятой, мы получим большую погрешность при вычислениях).

Отметим, что при всей простоте реализации описанного алгоритма построения искомой сетки, координаты результирующей сетки определяются достаточно грубо, что влечет построение не строго ортогональной сетки и требует повторного применения предлагаемого метода для улучшения ортогональности сеток. Следует также отметить, что в случае построения сетки на поверхности, вследствие линейной аппроксимации опорной поверхности, на которой расположены точки опорной сетки, имеет место изменение кривизны поверхности. Для уменьшения влияния погрешности интерполяции на изменение кривизны поверхности, определяемой конечной ортогональной сеткой, следует строить опорную сетку такой, чтобы ячейки были максимально плоскими. В общем случае, такой результат достигается построением подробной опорной сетки на опорной поверхности.

4.2 Интерполяция численного решения сплайнами

Рассмотрим интерполяцию сеточного решения дифференциальных уравнений кубическими сплайнами. Также как и в случае линейной интерполяции, получим формулу, определяющую координаты точки кривой в пространстве, в которой функция, заданная в опорных точках кривой, будучи интерполированной, принимает заданное значение. Кроме того, получим формулу, определяющую значение такой функции в заданной точке кривой. Эти две формулы, будучи примененными в общем алгоритме вычисления координат узла искомой сетки, позволяют получить искомую сетку.

Запишем общие формулы интерполирования кубической сплайн-функцией $s(x)$ (34) функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, заданной в точках x_0, x_1, \dots, x_n таких, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$:

$$\begin{cases} s(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1 \dots n \end{cases}, \quad (34)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i коэффициенты, которые определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} a_i = f(x_{i-1}) \\ a_i + b_i(x_i - x_{i-1}) + c_i(x_i - x_{i-1})^2 + d_i(x_i - x_{i-1})^3 = f(x_i) \\ b_{i+1} = b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}) + d_i(x_i - x_{i-1})^2 \\ c_{i+1} = c_i + 3d_i(x_i - x_{i-1}) \\ c_0 = \frac{1}{2} f''(x_0) \\ c_n + 3d_n(x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{2} f''(x_n) \end{cases} \quad (35)$$

Система уравнений (35) путем исключения неизвестных приводится к системе уравнений (36), матрица которой имеет трехдиагональную форму, т.е. ненулевыми в ней являются только элементы главной и двух соседних диагоналей. Значения $f''(x_0)$ и $f''(x_n)$ принимаются равными нулю.

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3((f(x_i) - f(x_{i-1}))/h_i - (f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))/h_{i-1}) \\ c_{n+1} = 0 \\ i = 2..n \end{cases} \quad (36)$$

Система (36) решается методом прогонки [4]. Подставляя значения c_i в систему уравнений (35), получаем значения остальных коэффициентов.

Линию в пространстве и значения заданной на ней функции запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ f = f(t) \end{cases} \quad (37)$$

где $t = i$, а $i = 0, \dots, N, N + 1$ есть количество опорных точек сплайна.

Согласно общему алгоритму в каждом случае при поиске координат точки кривой по значению функции и при поиске значения по координате точки мы знаем сегмент (пара смежных опорных точек) сплайна, на котором следует искать решение.

Рассмотрим вычисление координат точки (x^*, y^*, z^*) по заданному значению интерполируемой функции $f = f^*$. Требуется найти значения t^* такие, что $f(t^*) = f^*$. Таких значений может быть либо от одного до трех либо бесконечно много (существование хотя бы одного решения обеспечивается общим алгоритмом). Бесконечное количество решений $f \equiv f^*$ на рассматриваемом сегменте означает, что также как и при применении линейной интерполяции, требуется «наложение шума» на значения функции f в опорных точках сплайна для получения конечного числа решений. При применении интерполяции кубическими сплайнами сегмент сплайна может содержать до трех различных решений t_1^*, t_2^*, t_3^* . В случае, если все три решения логически допустимы, то они возвращаются в общий алгоритм вычисления координат ортогональной сетки. В случаях допустимости одного и только одного решения (например, на изолинии $\theta_{mesh}(x, y, z) = \theta_p$ согласно построению дифференциальных уравнений допускается только одна точка удовлетворяющая $\eta_{mesh}(x, y, z) = \eta_q$) в общий алгоритм

возвращается точка, получаемая подстановкой $t^* = \frac{t_1^* + t_2^* + t_3^*}{3}$ в три первых уравнения системы (37).

Таким образом, мы определили алгоритм вычисления координат точки сплайна по значению интерполируемой функции.

Рассмотрим вычисление значения f^* функции $f(t)$ в заданной точке (x^*, y^*, z^*) известного заранее сегмента сплайна. Необходимо найти значение $t = t^*$ такое, что:

$$\begin{cases} x^* = x(t^*) \\ y^* = y(t^*) \\ z^* = z(t^*) \end{cases} \quad (38)$$

Решаем первое уравнение системы (38). Возможны два варианта: конечное число решений (от одного до трех) или бесконечное число решений ($x = x^*$ на рассматриваемом сегменте сплайна). Во втором случае переходим к решению второго уравнения. В первом случае подставляем корни первого уравнения t_1^x, t_2^x, t_3^x во второе уравнение. Определяем то значение из набора t_1^x, t_2^x, t_3^x , при котором выражение $|y^* - y(t_i^x)|$ ($i = 1, \dots, 3$) принимает наименьшее значение. Если таких значений несколько (например, $t_1^x = t_2^x$), то повторяем рассуждения применительно к третьему уравнению. Таким образом, мы определяем значение того корня t^* первого уравнения (если число решений бесконечно, то второго, а если число количество решений и первого и второго бесконечно, то третьего уравнения), при котором выражения $|x^* - x(t^*)|$, $|y^* - y(t^*)|$, $|z^* - z(t^*)|$ по сравнению с другими корнями. Вследствие погрешности вычисления коэффициентов сплайн-функций $x(t), y(t), z(t)$ мы говорим не о точном решении, а о решении, дающем минимальное отклонение от заданных значений x^*, y^*, z^* .

В данном разделе получены алгоритмы вычисления значений функций в произвольных точках кривых линий в пространстве, заданных опорными точками и значениями функции в них. Также описаны алгоритмы вычисления координат точек таких кривых, в которых функция принимает заданное значение. Для обоих случаев может быть использована как линейная интерполяция, так и интерполяция кубическими сплайнами. Полученные результаты завершают общий алгоритм вычисления координат ортогональной сетки на основе сеточного решения дифференциальных уравнений относительно $\theta(\alpha, \beta)$ и $\eta(\alpha, \beta)$, предложенных выше.

5 Примеры сеток

Решая задачу относительно $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ и $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ численно, вследствие погрешности вычислений мы получаем не строго ортогональную сетку. Для улучшения качества результирующей сетки мы будем последовательно применять описываемый метод: на каждой итерации построения ортогональной сетки в качестве опорной берется сетка, полученная на предыдущей итерации. В качестве опорной сетки для первой итерации будем использовать неортогональную сетку, построенную по методу трансфинитной интерполяции (TFI). Введем критерии качества сетки и покажем сходимость итераций применения метода.

5.1 Критерии оценки качества сетки

На рисунке Рис. 4 показана ячейка сетки с индексом (i, j) .

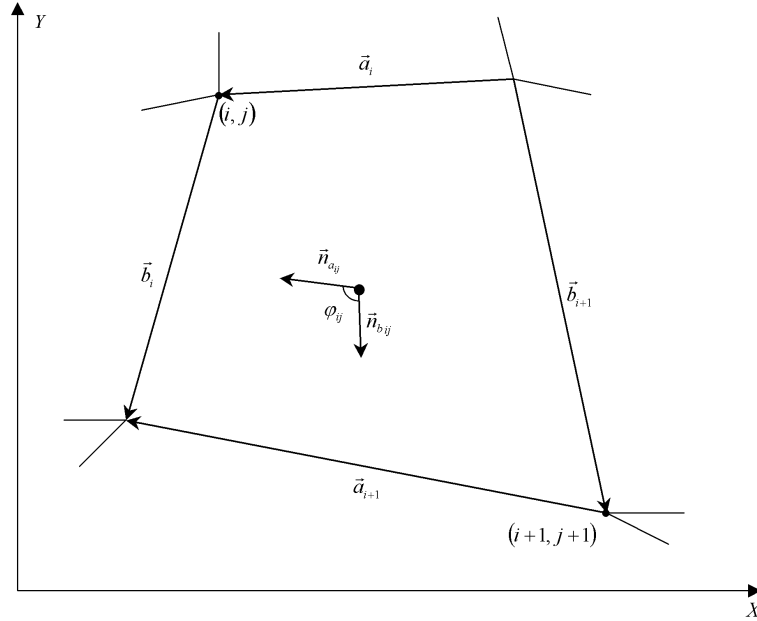


Рис. 4. Ячейка четырехугольной сетки и вектора среднего арифметического противоположных ребер

Здесь вектора \vec{a}_i и \vec{a}_{i+1} , \vec{b}_i и \vec{b}_{i+1} есть попарно противоположные стороны ячейки. Вектора $\vec{n}_{a_{ij}}$ и $\vec{n}_{b_{ij}}$ есть нормированное среднее арифметическое противоположных сторон:

$$\vec{n}_{a_{ij}} = \frac{\vec{a}_i + \vec{a}_{i+1}}{|\vec{a}_i + \vec{a}_{i+1}|}, \quad \vec{n}_{b_{ij}} = \frac{\vec{b}_i + \vec{b}_{i+1}}{|\vec{b}_i + \vec{b}_{i+1}|},$$

$$\cos \varphi_{ij} = (\vec{n}_{a_{ij}}, \vec{n}_{b_{ij}}).$$

Для оценки качества сетки будем использовать следующие функции:

$$f_{\max} = \max_{i,j} |\cos \varphi_{ij}|$$

и

$$f_{\text{avg}} = \sqrt{\frac{1}{S_{\text{сетки}}} \sum_{i,j} (\cos^2 \varphi_{ij} S_{ij})},$$

где S_{ij} — площадь ячейки с индексом (i, j) , а $S_{\text{сетки}}$ — есть площадь всей сетки, т.е. $S_{\text{сетки}} = \sum_{i,j} S_{ij}$.

$f_{\max} = 0$ в случае действительно ортогональной сетки. На практике надо принимать во внимание, что линии сетки получаются в результате линейной интерполяции между узлами. Кроме того, за линии сетки мы принимаем отрезки прямых. Это вносит погрешность в значения f_{\max} , но, тем не менее, не влияет на оценку сходимости метода.

В то время как значение функции f_{\max} дает представление о худших ячейках сетки, функция f_{avg} дает представление о качестве сетке в среднем, т.е. если удельная площадь не ортогональных ячеек невелика, то и значение f_{avg} будет минимальными. Поскольку многие области не допускают построение совершенно ортогональной сетки, то в таких случаях максимальное отклонение от ортогональной сетки

(f_{\max}) не играет роли, т.к. дает представление не столько о полученной сетке, сколько об ортогональности расчетной области. В таких случаях f_{avg} дает лучшее представление о качестве сетки.

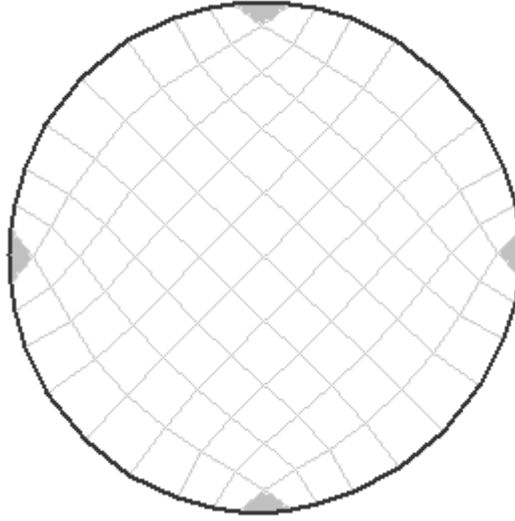


Рис. 5. Пример области, не позволяющей получить ортогональную сетку. Выделены заведомо не ортогональные ячейки

В качестве критериев сходимости метода примем одновременную сходимость рядов $\{f_{\max}^q\}$ и $\{f_{\text{avg}}^q\}$, где $q = 1, 2, \dots$ — номер итерации.

В случае построения сетки на гладкой трехмерной поверхности, в отличие от плоского случая, возникает вопрос о точности аппроксимации опорной поверхности результирующей сеткой. Таким образом, возникает необходимость измерить отклонение полученной поверхности от опорной.

Рассмотрим сетку размерности $(N + 1) \times (M + 1)$. В узлах сетки введем параметры p_{ij} и q_{ij} такие, что:

$$p_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{t < i} L'_{ij}}{\sum_{t=0}^{t < N} L'_{ij}}, p_{0j} = 0, q_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{t < j} L''_{it}}{\sum_{t=1}^{t < M} L''_{it}}, q_{i0} = 0,$$

где $i = 0..N, j = 0..M$, $L'_{ij} = \sqrt{(x_{ij} - x_{(t-1)j})^2 + (y_{ij} - y_{(t-1)j})^2 + (z_{ij} - z_{(t-1)j})^2}$ — длина ребра сетки, соединяющего узлы сетки с индексами (t, j) и $(t-1, j)$, а $L''_{it} = \sqrt{(x_{it} - x_{i(t-1)})^2 + (y_{it} - y_{i(t-1)})^2 + (z_{it} - z_{i(t-1)})^2}$ — длина ребра сетки, соединяющего узлы с индексами (i, t) и $(i, t-1)$. Следовательно, $p_{ij} \in [0, 1]$ и $q_{ij} \in [0, 1]$ при $i = 0..N, j = 0..M$. Таким образом, каждому узлу сетки мы взаимнооднозначно сопоставили пару (p_{ij}, q_{ij}) .

Пусть даны две сетки: первая — опорная размерности $(N_1 + 1) \times (M_1 + 1)$, вторая сетка — результирующая ортогональная размерности $(N_2 + 1) \times (M_2 + 1)$, построенная на опорной сетке. Поверхность, определяемая результирующей сеткой, отличается от поверхности, определяемой опорной сеткой. Вычислим отклонение между поверхностями.

Пусть на первой сетке описанным выше образом определены параметры p_{ij}^1, q_{ij}^1 ($i = 0..N_1 - 1, j = 0..M_1 - 1$), а на второй — параметры p_{ij}^2, q_{ij}^2 ($i = 0..N_2 - 1, j = 0..M_2 - 1$). Найдем координаты точек на второй поверхности, значения p^2, q^2 в которых равны значениям p_{ij}^1, q_{ij}^1 ($i = 0..N_1 - 1, j = 0..M_1 - 1$). Обозначим координаты полученных узлов как $x_{ij}^{2,1}, y_{ij}^{2,1}, z_{ij}^{2,1}$ (индекс означает, что точка с координатами $(x_{ij}^{2,1}, y_{ij}^{2,1}, z_{ij}^{2,1})$ лежит на второй поверхности и соответствует узлу первой сетки с индексом (i, j)). Таким образом, мы «спроецируем» на результирующую поверхность сетку, заданную на опорной поверхности.

Обозначим длины отрезков, соединяющих узлы (i, j) первой сетки и их проекции на вторую поверхность, как $L_{ij}^{2,1}$. Обозначим максимальную длину среди длин линий сетки как L' :

$$L' = \max \left(\sum_{i=0}^{i < N} L'_{ij}, \sum_{i=1}^{i < M} L''_{ii} \right), i = 0..N_1, j = 0..M_1.$$

Введем следующие показатели отклонения результирующей поверхности от опорной:

1. Минимальное отклонение между поверхностями: $L_{\min} = \min(L_{ij}^{2,1} / L')$, $i = 0..N_1, j = 0..M_1$.
2. Максимальное отклонение между поверхностями: $L_{\max} = \max(L_{ij}^{2,1} / L')$, $i = 0..N_1, j = 0..M_1$;
3. Среднее отклонение между поверхностями: $L_{\text{avg}} = \sum_{i=0, j=0}^{i=N_1, j=M_1} \left(\frac{L_{ij}^{2,1}}{L'} \right) / ((N_1 + 1)(M_1 + 1))$,
 $i = 0..N_1, j = 0..M_1$;

Все три оценки опираются на показатель $\frac{L_{ij}^{2,1}}{L'}$, позволяющий нормировать расстояния между соответствующими точками опорной и результирующей сеток относительно максимальной длины линий опорной сетки. Этим достигается отход от габаритов сеток и приведение величин $L_{ij}^{2,1}$ к универсальному показателю, не зависящего от размеров рассматриваемых сеток в пространстве и позволяющего сравнивать качество аппроксимации опорной сетки различными результирующими сетками, построенными с разными параметрами алгоритма ортогонализации (например, с различными параметрами сгущения ячеек сетки). Более того, сравнение безразмерных показателей L_{\min} , L_{\max} и L_{avg} , полученных на различных результирующих сетках, отличающихся параметрами сгущения, и одной и той же опорной сетке позволит подобрать такие параметры сгущения, которые позволяют получить сетку, наиболее хорошо аппроксимирующую опорную поверхность.

5.2 Примеры сеток на плоскости

Рассмотрим несколько примеров сеток на плоскости (получены при помощи линейной интерполяции численного решения уравнений) и численные показатели их качества $\{f_{\max}^q\}$ и $\{f_{\text{avg}}^q\}$, где q — номер итерации построения ортогональной сетки). Опорные сетки строились по методу TFI. На рисунках, демонстрирующих распределение значений f_{\max} и f_{avg} , белые области соответствуют наименьшему значению функции, темные области соответствуют наибольшему значению функции. Значения f_{\max}^0 и f_{avg}^0 соответствуют исходной (не ортогональной) опорной сетке.

Для получения ортогональной сетки на основе численного решения, применялась линейная интерполяция решения.

5.2.1 Пример № 1

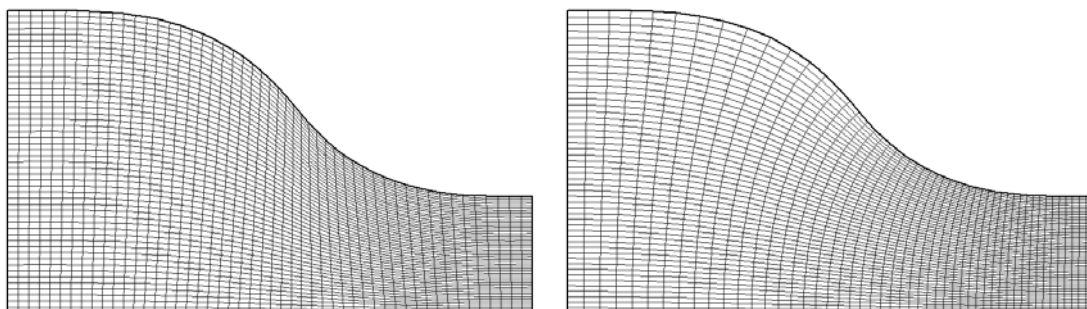


Рис. 6. Канал с одной изогнутой границей: опорная и ортогональная (10 итераций) сетки

Дана расчетная область в форме канала с одной изогнутой границей (Рис. 6). Все углы расчетной области прямые.

Построена опорная сетка размерностью 51x51 и проделаны 10 итераций построения ортогональной сетки. Размерность сетки на каждой итерации – 51x51.

Расчеты параметров качества сетки на каждой из итераций дали следующие результаты:

Таблица 1. Показатели качества сеток примера № 1.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.75697674610212	0.23419855103819
1	0.05889605799312	0.02157558875904
2	0.00650293808769	0.00200699449808
3	0.00461818688400	0.00094350440169
4	0.00415047882886	0.00091172239203
5	0.00398749126820	0.00090593572672
6	0.00388158342755	0.00090440590816
7	0.00383151305802	0.00090402103177
8	0.00379660454718	0.00090370424712
9	0.00378758215108	0.00090366544565
10	0.00376456780671	0.00090353033973

Из приведенной таблицы видно, что свойства сетки резко улучшаются на нескольких первых итерациях. С увеличением числа итераций убывание $\{f_{\max}^q\}$ и $\{f_{\text{avg}}^q\}$ замедляется, что позволяет говорить о приближении конечной сетки по свойствам к ортогональной сетке размерности 51x51.

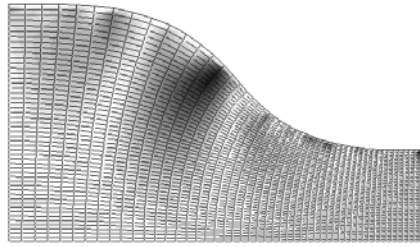


Рис. 7. Канал с одной изогнутой границей: распределение значений f_{\max} на сетке, полученной в результате 10 итераций

5.2.2 Пример № 2

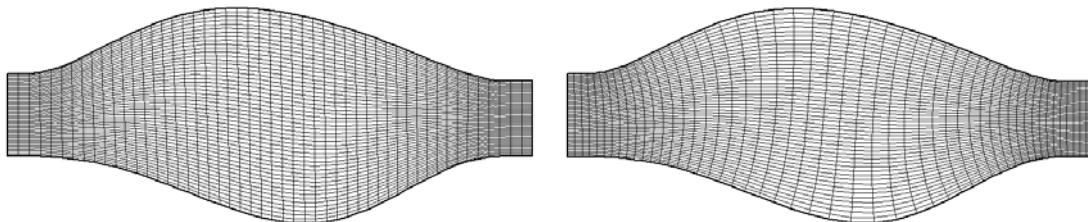


Рис. 8. Канал с двумя изогнутыми границами: опорная и ортогонализированная сетки

Дана расчетная область в форме канала с двумя изогнутыми границами (Рис. 8). Углы расчетной области прямые.

В данной расчетной области построена опорная сетка 51x51 и проделаны 10 итераций построения ортогональной сетки.

Расчеты параметров качества сетки на каждой из итераций дали следующие результаты:

Таблица 2. Показатели качества сеток примера № 2.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.46268289213839	0.18847312237583
1	0.01281088024352	0.00241489190871
2	0.01281088024352	0.00241489190871
3	0.00907093085994	0.00143276089284
4	0.00841267240304	0.00134597387896
5	0.00798891183124	0.00133748095021
6	0.00779413990254	0.00132804255921
7	0.00761219453775	0.00132140595292
8	0.00755372080457	0.00132096592448
9	0.00748232220578	0.00132006933101
10	0.00741872783353	0.00131912549219

На основании приведенных выше данных также можно говорить о сходимости рядов $\{f_{\max}^q\}$ и $\{f_{\text{avg}}^q\}$ и получении сетки, по свойствам близкой к ортогональной.

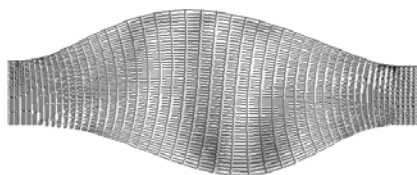


Рис. 9. Канал с двумя изогнутыми границами: распределение значений f_{\max} на сетке, полученной в результате 10 итераций

5.2.3 Пример № 3

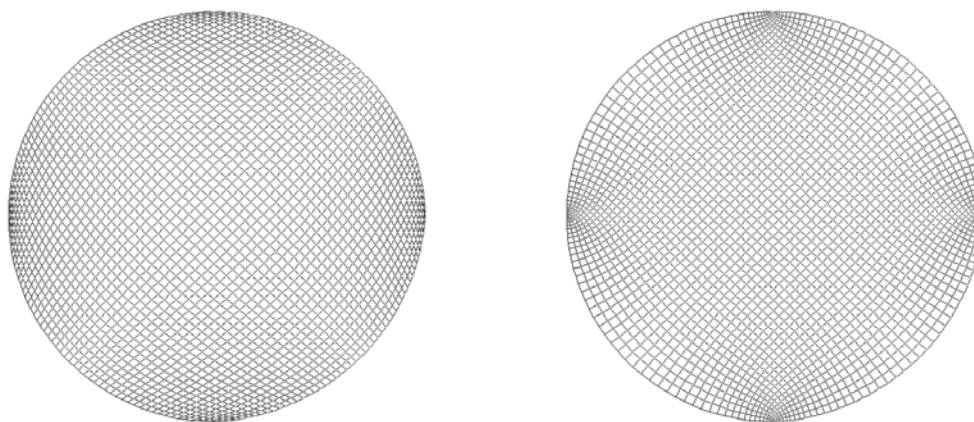


Рис. 10. Округлость: опорная и ортогональная (10 итераций) сетки

Дана расчетная область в форме окружности (Рис. 10). Углы расчетной области близки к развернутым.

Построена опорная сетка 51x51 и проделаны 10 итераций построения ортогональной сетки. Размерности сеток на каждой итерации – 51x51.

Значения f_{\max} и f_{avg} , вычисленные после выполнения каждой из итераций:

Таблица 3. Показатели качества сеток примера № 3.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.99553031422871	0.32550758161643
1	0.94770204399290	0.08392372976311
2	0.87281413979935	0.03006952325221
3	0.73229293290429	0.01541826070624
4	0.59489927637574	0.01102022497804
5	0.50554983470145	0.00969747356961
6	0.45941546758258	0.00936806057642
7	0.44091720731020	0.00930412446556
8	0.43436839673096	0.00929325003862
9	0.43220900254308	0.00929238777794
10	0.43153575369092	0.00929224284642

Расчетная область в форме окружности не позволяет получить действительно ортогональную сетку, т.к. границы сетки повторяют границы области, а границы области образуют углы, близкие к развернутым, что влечет за собой наличие не ортогональных ячеек в окрестности этих углов. Этим обусловлены большие, чем в первом примере, значения f_{\max} и f_{avg} . Но в то же время, так же как в предыдущих примерах, следует отметить последовательное улучшение значений $\{f_{\max}^q\}$ и $\{f_{\text{avg}}^q\}$.

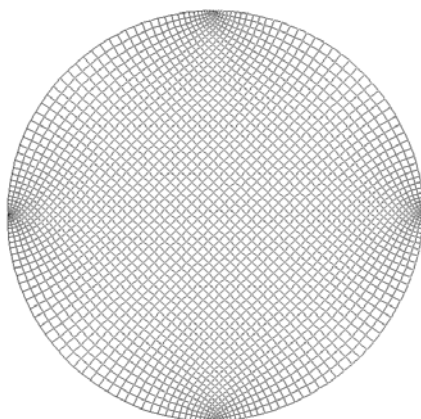


Рис. 11. Окружность: распределение значений f_{\max} на сетке, полученной в результате 10 итераций

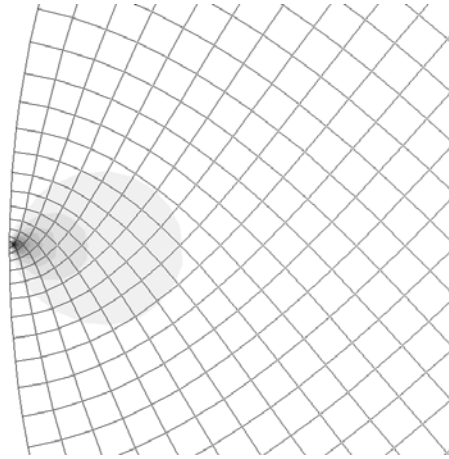


Рис. 12. Окружность: распределение значений f_{\max} вблизи угла расчетной области на сетке, полученной в результате 10 итераций

5.2.4 Пример № 4

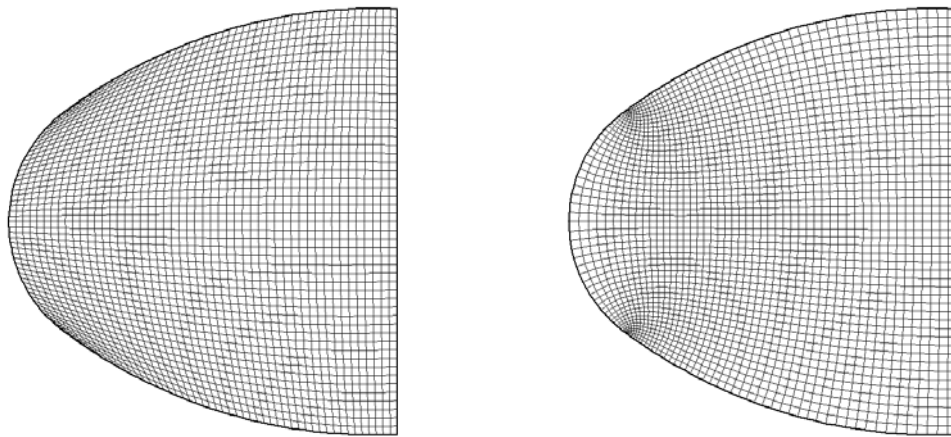


Рис. 13. Сектор эллипса: опорная и ортогональная (10 итераций) сетки

Дана расчетная область в форме сектора эллипса (Рис. 13). Аналогично предыдущим примерам, построена опорная сетка и проделаны 10 итераций построения ортогональной сетки. Размерности сеток на каждой итерации – 51x51.

Расчеты параметров качества сетки на каждой из итераций дали следующие результаты:

Таблица 4. Показатели качества сеток примера № 4.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.99900478865424	0.30358222808072
1	0.96721563489834	0.07793482569358
2	0.93881417797368	0.03211928985294
3	0.85891289440316	0.01382792840322
4	0.69790903682055	0.00806913911221
5	0.54266875211517	0.00616545457287
6	0.45845948386255	0.00557866122728
7	0.42647436135156	0.00543009318199
8	0.41520007285901	0.00539910607487
9	0.41150189110032	0.00539191789478
10	0.41136217831128	0.00539479685754

Расчетная область в форме сектора эллипса, аналогично примеру с окружностью, не позволяет получить действительно ортогональную сетку. Но, так же как и в предыдущем случае, следует отметить сходимость рядов $\{f_{\max}^q\}$ и $\{f_{\text{avg}}^q\}$ и улучшение качеств сетки.

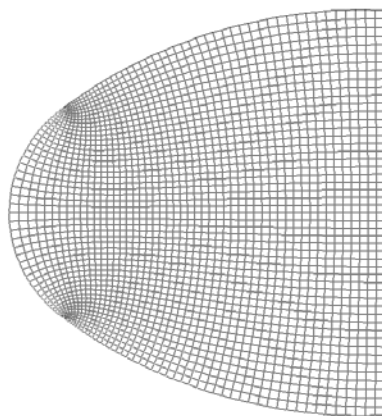


Рис. 14. Сектор эллипса: распределение значений f_{\max} на сетке, полученной в результате 10 итераций

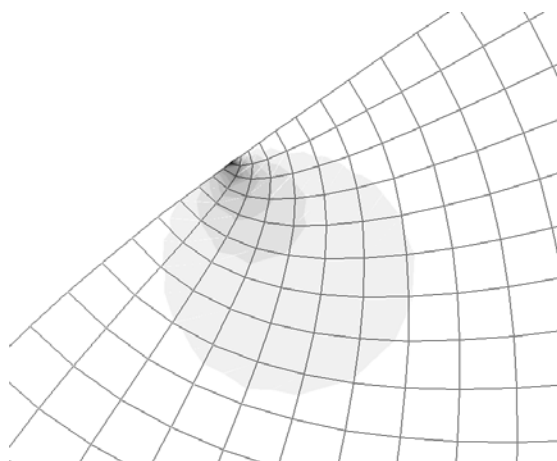


Рис. 15. Сектор эллипса: распределение значений f_{\max} на сетке, полученной в результате 10 итераций, вблизи развернутого угла расчетной области

5.2.5 Пример № 5

Предлагаемый метод включает в себя этап решения дифференциальных уравнений для дальнейшего использования решения для построения ортогональной сетки. Но уравнения решаются в каждом блоке расчетной области независимо и поэтому возникает вопрос о получении линий сетки непрерывных не только внутри каждого блока (это гарантируется самим методом), но и на границах между блоками. Непрерывность линий на границах между блоками достигается на этапе интерполяции решения. Пример № 5 показывает, что описываемый метод строит такую сетку.

Дана многоблочная расчетная область в форме сечения корпуса реактора с эллиптическим днищем (Рис. 16). Аналогично предыдущим примерам, построена опорная сетка и проделаны 8 итераций построения ортогональной сетки. Размерность сетки, построенной в центральном блоке, на каждой итерации – 51x51.

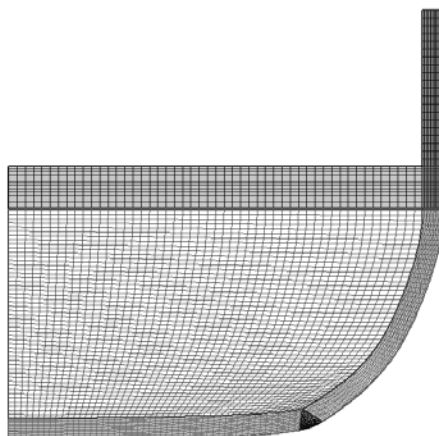


Рис. 16. Опорная сетка примера №5

Расчеты параметров качества сетки на каждой из итераций дали следующие результаты:

Таблица 5. Показатели качества сеток примера № 5.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.97863057181226	0.26002007048253
1	0.98138736249950	0.02170601228298
2	0.95874215107699	0.00605259698776
3	0.87875164828016	0.00377962779578
4	0.80587151089969	0.00327436610559
5	0.67792629746357	0.00315441653550
6	0.57219184725523	0.00309752674391
7	0.49590395896066	0.00307757443580
8	0.44157903276909	0.00305583164781

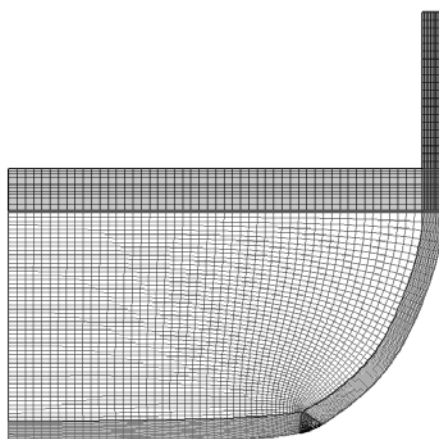


Рис. 17. Ортогональная сетка примера №5, полученная в результате 8 итераций

Предлагаемый метод позволяет получить сетку, обладающую гладкими линиями, не терпящими разрыва на границе блоков (Рис. 18).

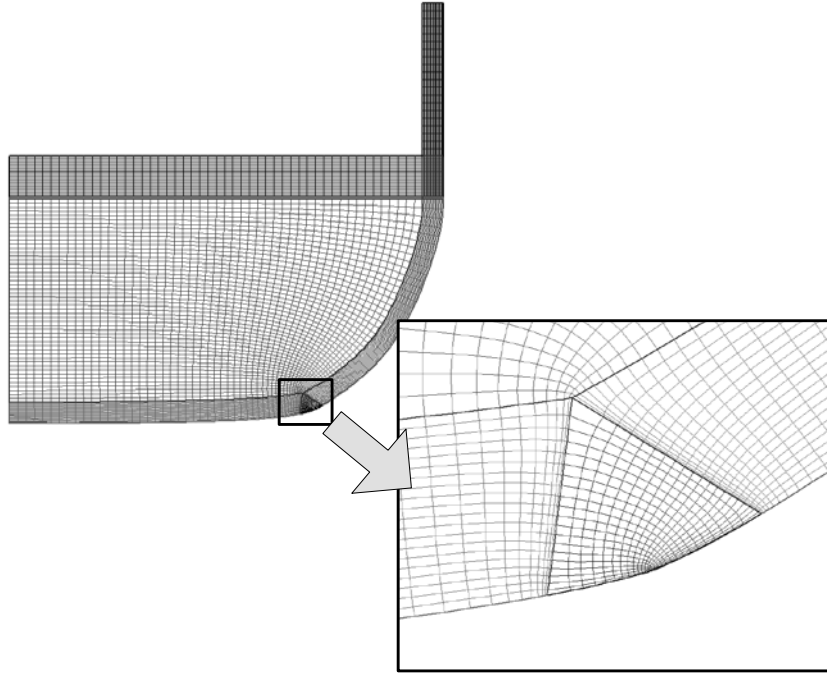


Рис. 18. Линии сетки непрерывны на границе блоков

Значения параметров приведены для всей сетки, всех ее блоков. Поскольку некоторые блоки сетки не позволяют получить действительно ортогональную сетку, то значения $\{f_{\max}^q\}$, уменьшаясь с ростом числа итераций, далеки от нуля. Вместе с тем, значения $\{f_{\text{avg}}^q\}$ показывают, что полученная сетка, в целом, близка к ортогональной.

Покажем применение сгущения на данном примере.

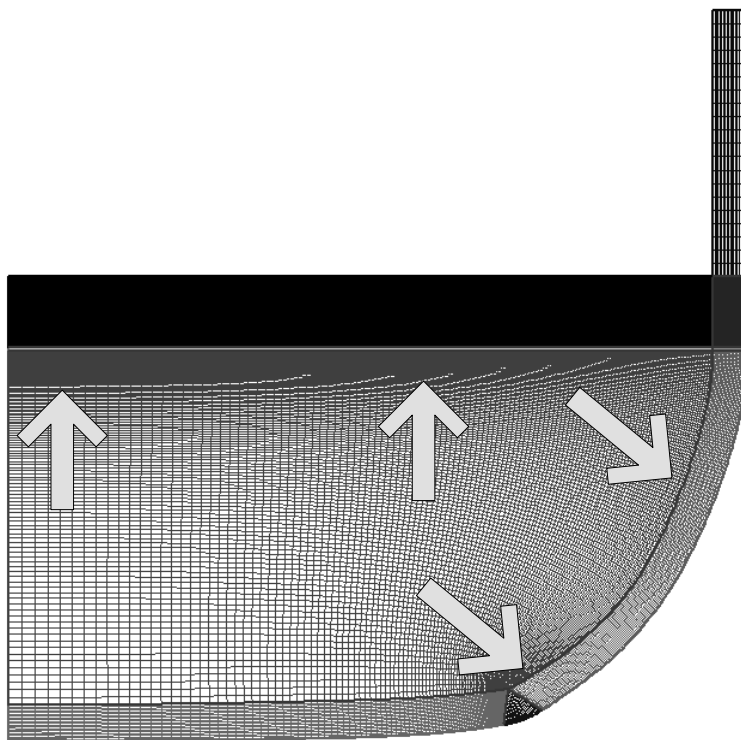


Рис. 19. Направления сгущения сетки.

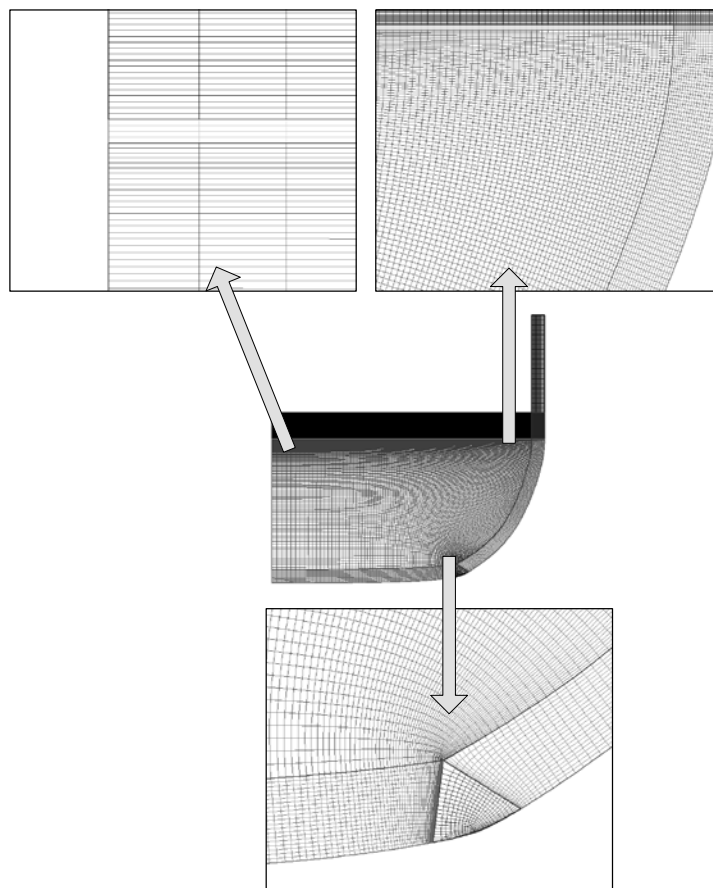


Рис. 20. Габариты ячеек сгущенной сетки вблизи некоторых границ практически одинаковы

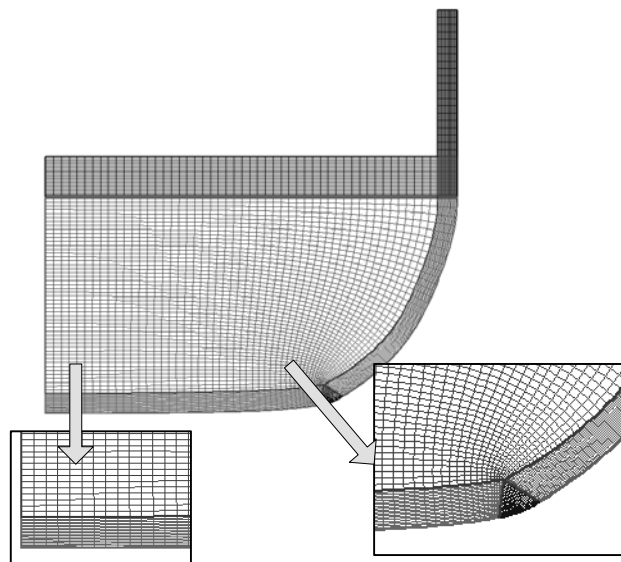


Рис. 21. Габариты ячеек равномерной (не сгущенной) сетки вблизи некоторых границ различны

При помощи показанного сгущения (направления сгущения отмечены на Рис. 19) была получена сетка, шаг которой вблизи некоторых границ, наиболее важных для расчетной задачи, одинаков с обеих сторон от данных границ (Рис. 20) в отличие от сетки, построенной с параметрами по умолчанию (Рис. 21). Такое применение управления распределением узлов востребовано на практике.

5.2.6 Пример № 6

Предлагаемый метод построения ортогональных сеток позволяет строить ортогональные сетки с размерностью, отличающейся от размерности опорной сетки. Покажем на примере №6 данную

возможность метода и приведем значения параметров качества сетки, чтобы показать зависимость качества сетки от размерности опорной и результирующей сеток.

Опорные сетки строились с размерностью 21x21, 41x41 и 81x81. На каждой из этих сеток были построены ортогональные сетки размерностью 21x21, 41x41 и 81x81 (всего – 9 сеток). Для получения каждой сетки был проделана одна итерация ортогонализации.

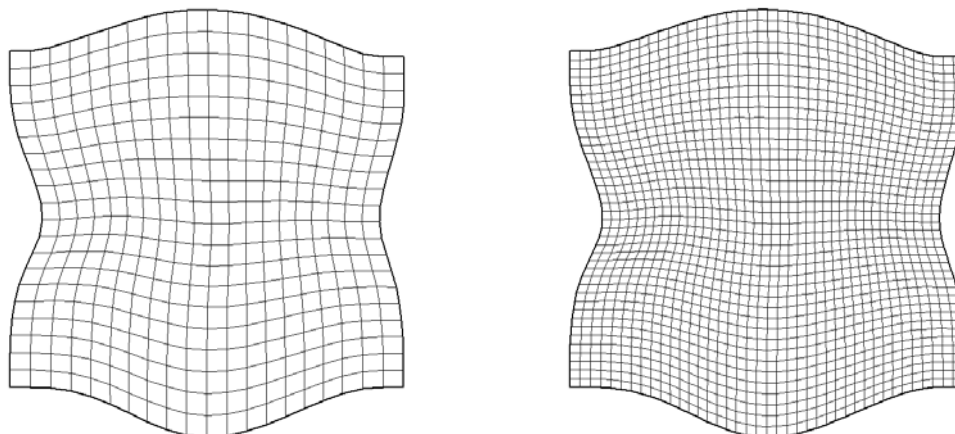


Рис. 22. Опорные сетки примера 6 размерности 21x21, 41x41

Зависимость значений f_{\max} от размерностей опорной и ортогональной сеток приведены ниже.

Таблица 6. Зависимость f_{\max} от размерности сеток.

Ортогональная	Опорная		
	21x21	41x41	81x81
21x21	0.05720795069723	0.02575757909542	0.02402716574873
41x41	0.11754354472106	0.03468556641981	0.02423677563009
81x81	0.14293120026698	0.06260851113190	0.02434125861330

Зависимость значений f_{avg} от размерностей опорной и ортогональной сеток приведены ниже.

Таблица 7. Зависимость f_{avg} от размерности сеток.

Ортогональная	Опорная		
	21x21	41x41	81x81
21x21	0.01145979410885	0.00676329074697	0.00571281353545
41x41	0.01357888338138	0.00650958330836	0.00378505127487
81x81	0.01679704909410	0.00642977933533	0.00364345638311

«Искусственное» улучшение подробности ортогональной сетки относительно не подробной опорной сетки не приводит к хорошему результату. Вместе с тем, строить очень подробную опорную сетку с тем, чтобы потом построить менее подробную ортогональную также не имеет смысла.

На основании приведенных значений f_{\max} и f_{avg} можно констатировать, что единственный надежный способ улучшения качества сетки – одновременное увеличение размерностей опорной и ортогональной сеток.

5.3 Примеры сеток на гладких трехмерных поверхностях

На примере итерационного процесса, описанного в предыдущем параграфе, рассмотрим количественные показатели качества сеток, построенных на поверхностях в пространстве (т.н. «2,5-мерные сетки» или «2,5D сетки»). Покажем сходимость итерационного процесса.

В качестве функций, оценивающих качество сеток, будем брать описанные выше функции f_{\max} и f_{avg} .

5.3.1 Пример № 1

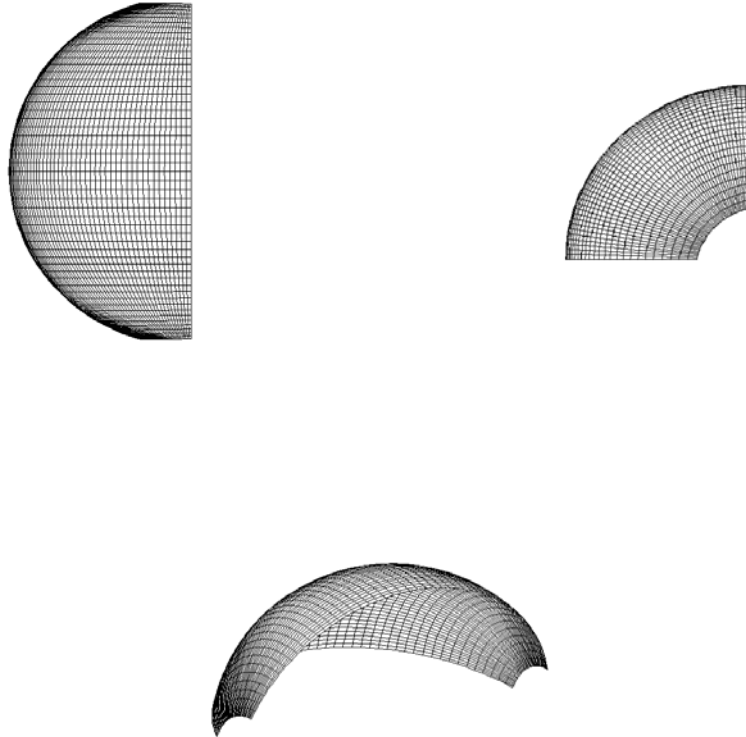


Рис. 23. Часть поверхности сферы в качестве расчетной области

Рассмотрим результат применения метода на примере части сферы. В данной расчетной области проделаны 10 итераций ортогонализации сетки. На каждой из итераций строилась сетка размерности 51x51.

На каждой из итераций получены следующие значения параметров качества сетки:

Таблица 8. Показатели качества сеток примера № 1.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.06174277617820	0.01068118518309
1	0.03649013476296	0.00131156118190
2	0.02871747010218	0.00173095419874
3	0.02523326804906	0.00270575464463
4	0.02933300363195	0.00327982269864
5	0.02623874537720	0.00488553786000
6	0.02688761263349	0.00452907731484
7	0.02769538351599	0.00527425542337
8	0.02930748448219	0.00372767573071
9	0.02568870097655	0.00440072781394
10	0.02947742126105	0.00374004756931

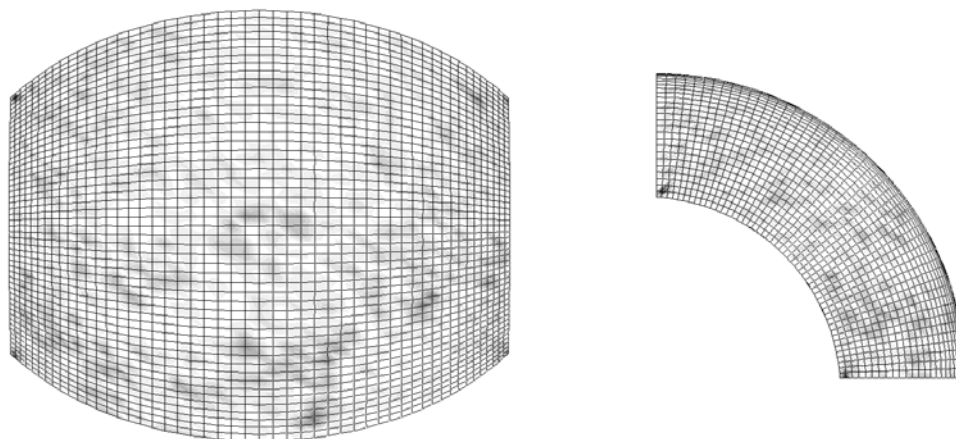


Рис. 24. Распределение значений f_{\max} на сетке, полученной в результате 10 итераций

Этот пример, так же как и предыдущие, показывает улучшение параметров результирующей сетки при применении предлагаемого метода. Немонотонное изменение значений $\{f_{\max}^q\}$ и $\{f_{\text{avg}}^q\}$ связано с погрешностью интерполяции и «шумом», накладываемым программным вычислительным кодом на значения функций θ и η в некоторых узлах сетки.

5.3.2 Пример № 2

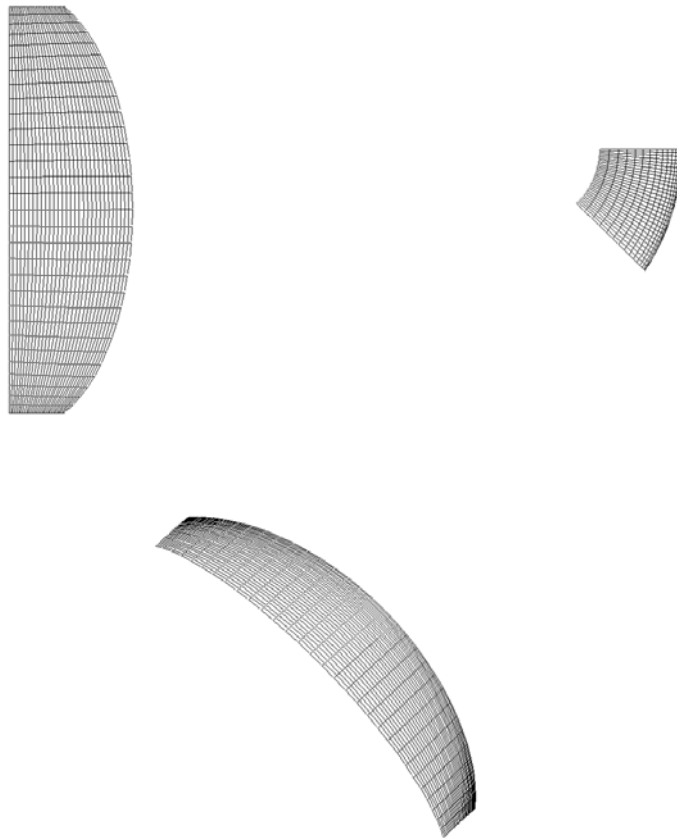


Рис. 25. Часть поверхности эллипсоида в качестве расчетной области

Рассмотрим результат применения метода на примере части сферы. Прделаны 10 итераций. На каждой из итераций строилась сетка размерности 101×101 .

Параметры качества сетки на каждой из итераций будут следующими:

Таблица 9. Показатели качества сеток примера № 2.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.08279140541526	0.03113808882788
1	0.00219715302857	0.00026388245067
2	0.00053543783054	0.00004010030693
3	0.00033808851149	0.00003170625979
4	0.00019793098419	0.00002395729185
5	0.00015179211968	0.00002327163961
6	0.00014831482972	0.00002262257175
7	0.00011895829086	0.00002243580447
8	0.00012887849458	0.00002874494360
9	0.00011703761086	0.00002859477300
10	0.00012104924857	0.00002206354685

Этот пример, так же как и предыдущие, показывает улучшение параметров результирующей сетки при применении предлагаемого метода. Немонотонное изменение $\{f_{\max}^q\}$ объясняется погрешностью вычислений, которая, тем не менее, не мешает получить достаточно ортогональную сетку.

5.3.3 Пример № 3

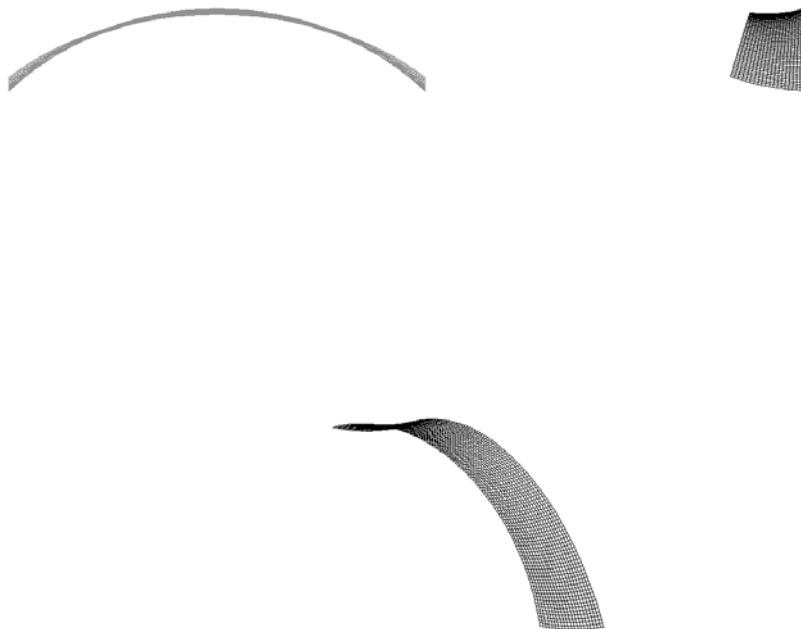


Рис. 26. Часть поверхности гиперболический параболоид («седло») в качестве расчетной области

Рассмотрим результат применения метода на примере части сферы. Прделаны 10 итераций. На каждой из итераций строилась сетка размерности 101x21.

Параметры качества сетки на каждой из итераций приведены ниже.

Таблица 10. Показатели качества сеток примера № 3.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.06122377927984	0.02939761016313
1	0.01937715650972	0.00085757866601
2	0.01985828001119	0.00090259254063
3	0.01955232640941	0.00122760207963
4	0.01971363766141	0.00089322339873
5	0.01966115421280	0.00088072531523
6	0.01948260957813	0.00087474627044
7	0.01948459864456	0.00087446544465
8	0.01948230367157	0.00087501532417
9	0.01958713365196	0.00089262532452
10	0.01964112591011	0.00088005530489

Данные приведенные в таблице показывают, что удельный вес ортогональных ячеек (значения $\{f_{\text{avg}}^q\}$) возрастает с увеличением числа итераций, что говорит о повышении ортогональности сетки.

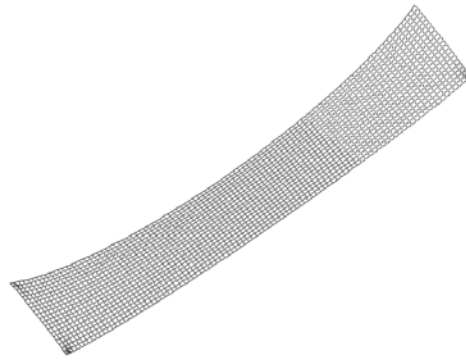


Рис. 27. Распределение значений f_{\max} на сетке, полученной в результате 10 итераций

5.3.4 Пример № 4

Покажем достоинства метода на примере многоблочной расчетной области, расположенной на поверхности в трехмерном пространстве. Покажем также применение метода на сетке, построенной в той же той же расчетной области, но составленной из одного блока.

Многоблочная сетка, по сравнению с одноблочной сеткой, позволяет управлять распределением узлов – некоторые блоки могут быть более подробными, иметь большую размерность по сравнению с другими блоками (областями расчетной области). Помимо этого, при решении задач с использованием многоблочных сеток появляется возможность задавать граничные условия на границах блоков расчетной области.

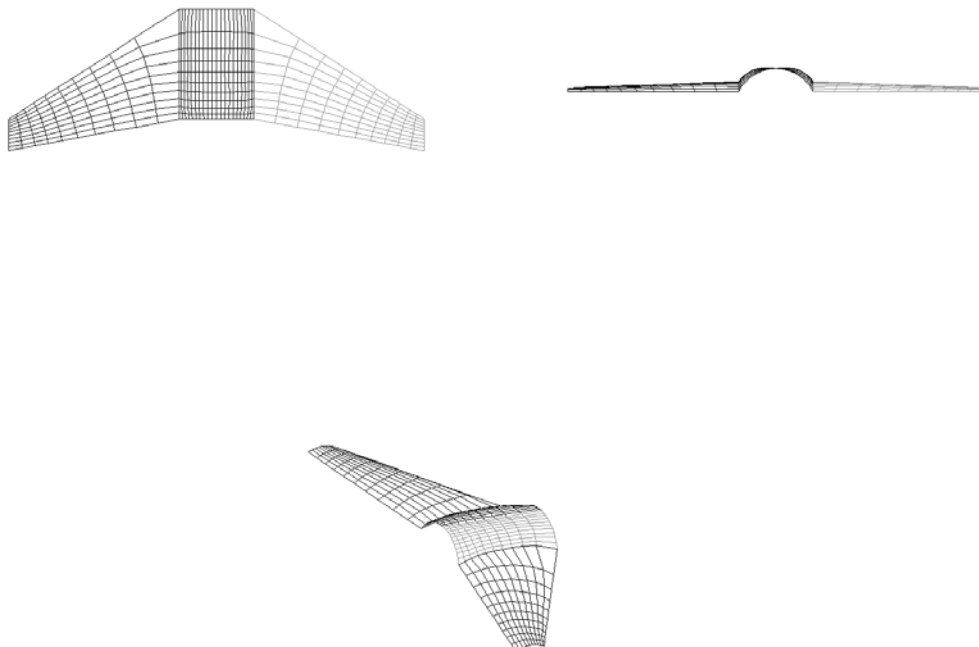


Рис. 28. Расчетная область примера №4 (3 проекции)

Дана расчетная область, расположенная на поверхности в пространстве. В расчетной области построена сетка, состоящая из 4 блоков (Рис. 28) размерности 11×11 , и сетка, состоящая из одного блока размерности 44×11 . Общая размерность обеих сеток одинакова (количество узлов) - 44×11 . На каждой из данных опорных сеток были построены ортогональные сетки, сохранившие размерности блоков и такое же разделение на блоки, как у опорных сеток.

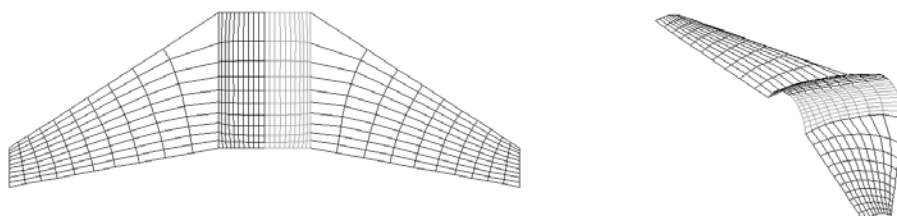


Рис. 29. Ортогональная сетка, построенная в 4-блочной расчетной области

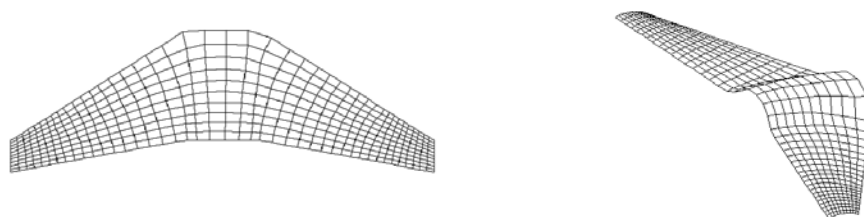


Рис. 30. Ортогональная сетка, построенная в 1-блочной расчетной области

К достоинствам 4-блочной сетки (Рис. 29) отнесем более точное сохранение границ блоков опорной сетки по сравнению с 1-блочным случаем (Рис. 30), т.к. имеет место перераспределением узлов сетки вдоль границы расчетной области, что влечет за собой искажение границ области на сильно изогнутых участках границы. Отметим возможность управления расположением узлов сетки внутри расчетной области при помощи многоблочности – в случае 4-блочной сетки размерность каждого блока ортогональной сетки задается отдельно, а сгущение сетки внутри каждого блока может быть задано без влияния на соседние блоки (кроме тех случаев, когда сгущение затрагивает линии сетки, общие для соседних блоков – в этом случае, гарантируя непрерывность линий сетки на границах между блоками, метод учитывает параметры сгущения только в одном из соседних блоков). В 1-блочном примере такое управление затруднено - например, невозможно сделать одну область сетки равномерно подробной, а другую – менее подробной, т.к. единственный способ управления распределением узлов внутри блока есть сгущение, а оно не позволяет получить равномерную сетку (шаг между узлами сетки изменяется по геометрической прогрессии).

5.3.5 Пример № 5

Рассмотрим результат применения метода на примере модели корпуса корабля. Расчетная область составлена из 14 блоков. Построена сетка со сгущением и сетка без сгущения.

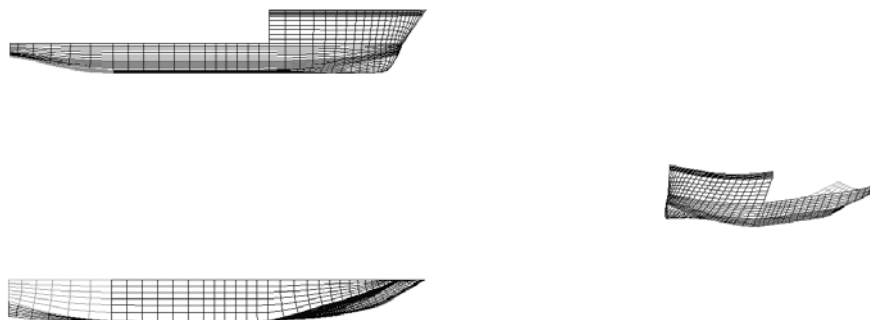


Рис. 31. Расчетная область в виде модели корпуса корабля

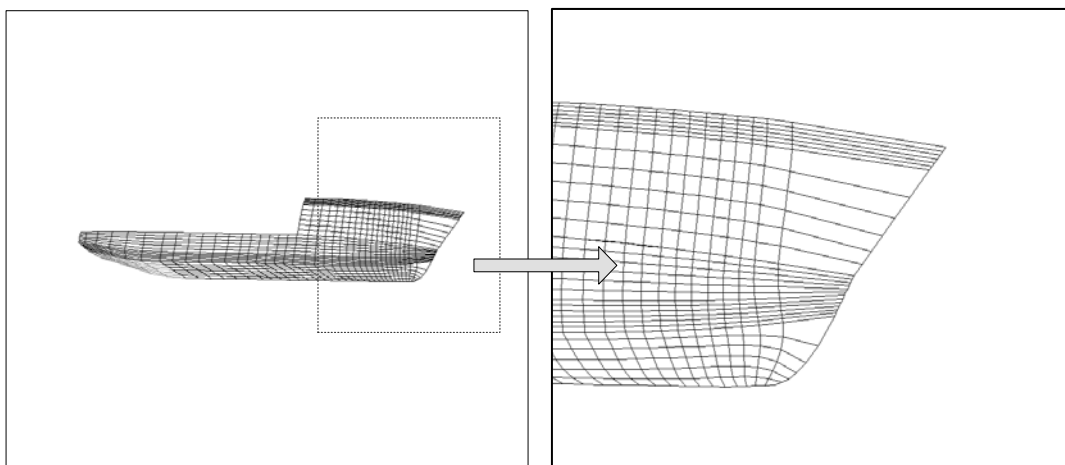


Рис. 32. Ортогональная сетка примера № 5 без сгущения

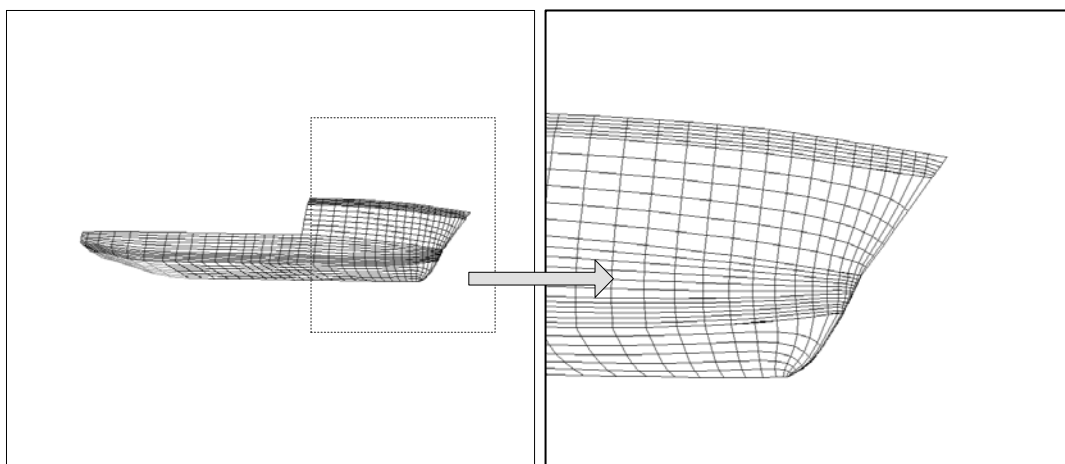


Рис. 33. Ортогональная сетка примера № 5 со сгущением к носовой части

Было построено два варианта ортогональных сеток: без сгущения и со сгущением (сгущение выполнялось на каждой итерации, чтобы снизить погрешности интерполяции).

Параметры качества сетки на каждой из итераций приведены ниже.

Таблица 11. Показатели качества сеток примера № 5 без сгущения.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.93660906172524	0.18985878090585
1	0.76740586056035	0.08277642447784
2	0.53577372344836	0.07714783883284
3	0.53410608294829	0.07035986683113

Таблица 12. Показатели качества сеток примера № 5 со сгущением.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.93660906172524	0.18985878090585
1	0.76740586056035	0.08277642447784
2	0.73034415773291	0.05115107588761
3	0.59112443941201	0.04854551386548
4	0.42304435303860	0.04605627058086

Приведенные в таблице значения $\{f_{\text{avg}}^q\}$ убывают с увеличением числа итераций, что говорит о повышении ортогональности сетки.

5.3.6 Пример № 6

Рассмотрим результат применения метода на примере модели гребного винта. Возьмем 3 блока из 8 блоков расчетной области.

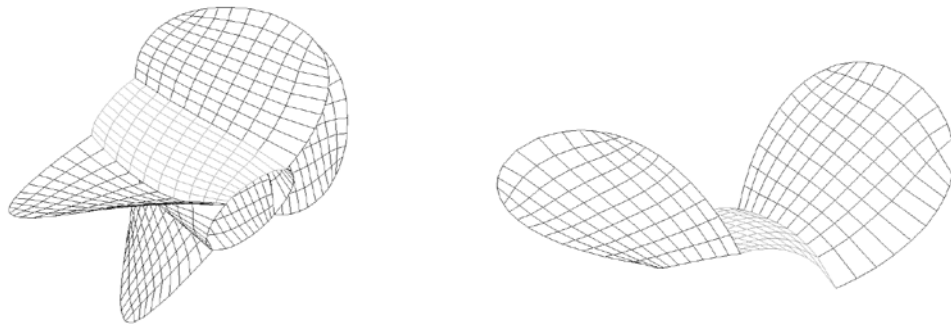


Рис. 34. Модель (8 блоков) и выбранная расчетная область (3 блока)

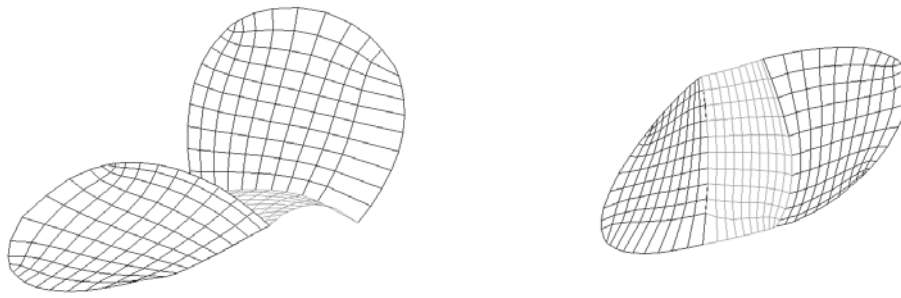


Рис. 35. Ортогональная сетка примера № 6

Выполнены 5 итераций ортогонализации сетки. Параметры качества сетки на каждой из итераций приведены ниже.

Таблица 13. Показатели качества сеток примера № 6.

Номер итерации q	$\{f_{\max}^q\}$	$\{f_{\text{avg}}^q\}$
0	0.95541323700895	0.31205443620835
1	0.87186848621366	0.12336458001162
2	0.70453935883917	0.08405721302669
3	0.56962445081766	0.07258148044698
4	0.45664178737723	0.06751633318453
5	0.40923523321558	0.06629954553446

Данные, приведенные в таблице показывают, что с увеличением числа итераций значения показателя $\{f_{\text{avg}}^q\}$ снижаются, что говорит о повышении ортогональности сетки.

В данном разделе приведены четыре примера плоских расчетных областей и характеристики сеток, построенных итерационным применением рассматриваемого метода: примеры № 1 и № 2 на плоскости - области только с прямыми углами, примеры № 3 и № 4 на трехмерной поверхности в пространстве - области с развернутыми углами. Показано, что последовательность значений функций, оценивающих качество результирующих сеток, стремятся к некоторым асимптотическим значениям. При этом свойства сеток, полученных в результате нескольких итераций, зависят больше от параметров исходной области (углы, образованные кривыми; степень кривизны кривых-границ области), чем от погрешностей метода, погрешности вычислений и интерполяции. Представленные результаты служат подтверждением работоспособности данного метода для построения ортогональных сеток в плоских областях.

Три примера расчетных областей, расположенных на гладкой трехмерной поверхности, также показали, что в результате применения метода к опорной сетке получается сетка, обладающая свойствами лучшими по сравнению с опорной.

Возможности управления расположением узлов ортогональных сеток внутри расчетной области показаны на плоскости на примере №5 и на поверхности в пространстве на примере №4: показана возможность управления распределением, как за счет сгущения сетки, так и за счет разбиения расчетной области на блоки. На данных примерах показана функциональность по генерации ортогональных сеток, обладающих линиями, гладкими и непрерывными на границе между блоками.

Таким образом, показано, что разработанный метод построения ортогональных сеток может быть рекомендован для построения сеток как на плоскости, так и на гладкой трехмерной поверхности.

6 Заключение

В настоящей работе описан метод построения ортогональных сеток на плоскости и гладкой трехмерной поверхности. В основу метода положены решение дифференциальных уравнений эллиптического типа со смешанными производными на опорной неортогональной сетке и интерполяция сеточного решения. На этапе интерполяции предоставляется возможность управлять распределением внутренних узлов ортогональной сетки. На данном этапе метод также позволяет учитывать многоблочность расчетной области и получать ортогональные сетки, построенные в многоблочных областях и при этом обладающие гладкими линиями без разрывов на границах блоков.

В работе приведены примеры сеток, построенные по предлагаемому методу, даны численные показатели качества сеток: один из них характеризует максимальное значение косинуса угла, образованного ребрами ячеек (косинус угла в норме C), а другой показывает среднее значение косинуса (в интегральной норме L_2). В работе приводятся примеры расчетных областей, в которых можно построить ортогональную сетку, и расчетные области, не дающие этой возможности. На основании значений данных показателей продемонстрировано качество ортогональных сеток. Значения обоих показателей, отражающих качество сеток как представленных в работе, так и оставленных за ее рамками, подтверждают вывод о хороших ортогональных свойствах полученных сеток и о надежности метода.

Итерационное применение метода позволяет повысить качество ортогональных сеток благодаря снижению влияния погрешности вычислений, вносимой на этапах численного решения уравнений и интерполяции решения. Приведенными в работе расчетами подтверждена гипотеза о целесообразности итеративного применения. Также проиллюстрирована возможность управления распределением внутренних узлов и применимости метода в случае многоблочных расчетных областей. Это выгодно отличает предложенный метод от методов алгебраических и методов теории функции комплексного переменного.

Предложенный метод и его программная реализация являются перспективными для построения ортогональных четырехугольных сеток на плоскости и гладкой трехмерной поверхности в пространстве и могут быть использованы на практике как в случае одноблочных, так и многоблочных областей.

7 Литература

1. **Thompson, J. F.** Numerical Grid Generation. — Amsterdam : North-Holland., 1985. — ISBN 0-444-00985-X.
2. **Вабищевич, П. Н.** Вычислительный алгоритм конформного отображения / П. Н. Вабищевич, С. И. Пулатов // Математическое моделирование. — Январь 1989. — Т. 1, № 1. — С. 132–139.
3. **Thompson, J. F.** Handbook of Grid Generation / J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill, eds. — CRC Press LLC, 1999. — ISBN 0-8493-2687-7.
4. **Самарский, А. А.** Теория разностных схем. — М. : Наука, 1989.