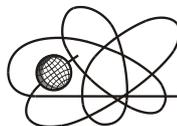




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-1997-11

Preprint IBRAE-1997-11

Д.В.Петрайтис

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ
НАДЗЕМНОГО МАГИСТРАЛЬНОГО
ТРУБОПРОВОДА**

Москва 1997

Moscow 1997

УДК 622.692

Петрайтис Д.В. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НАДЗЕМНОГО МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА. Препринт № IBRAE-97-11. Москва. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. 1997. 18 с. — Библиогр.: 25 назв.

Аннотация

В данной работе представлена математическая модель колебательной динамики надземного магистрального трубопровода после разрыва. Модель основана на балочном приближении. Она позволяет связать технические и физические параметры трубопровода и потока с расстоянием между неподвижными опорами, гарантирующими устойчивость.

©ИБРАЭ РАН, 1997

Petraitis D.V. THE APPROXIMATE ANALYSIS OF THE ABOVE-GROUND PIPELINE STABILITY. Preprint IBRAE-97-11. Moscow. Nuclear Safety Institute. June 1997. 18 p. — Refs.: 25 items.

Abstract

Presented in this paper is a mathematical model of vibrating dynamics of the ruptured above-ground pipeline. This model is based on the joist approximation. It allows to correlate technical and physical parameters of the pipeline and pipe flux with the distance between the immovable supporters that guarantees stability.

©Nuclear Safety Institute, 1997

Приближенный анализ устойчивости надземного магистрального трубопровода

Д.В.Петрайтис

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ
113191, Москва, ул. Б.Тульская, 52
тел. (095) 955-28-06

Содержание

Содержание.....	3
1 Введение	3
2 Задача о балке.....	4
2.1 Вывод уравнения свободных колебаний балки	4
2.2 Уравнение движения стержня при наличии внешнего возмущения	7
2.3 Сведение уравнения колебаний к безразмерному виду.....	7
2.4 Граничные условия.....	8
3 Аналитическое решение задачи	10
3.1 Нахождение собственных функций методом разделения переменных	10
3.2 Колебания стержня при наличии внешнего воздействия.....	12
4 Численные результаты и их анализ	14
4.1 Балочное приближение	14
4.2 Трубопроводы.....	15
5 Заключение	17
Литература.....	17

1 Введение

В последнее время у нас начинает уделяться большое внимание вопросам надежности различных газопроводов и нефтепроводов. Очень распространенной аварией надземных трубопроводов является их разрыв. Надземная прокладка как линейной части магистральных трубопроводов, так и отдельных его участков рекомендуется в пустынных районах, районах горных выработок и оползней, на участках вымерзлых грунтов и болот, а также на переходах через естественные и искусственные препятствия. При надземной прокладке сводится к минимуму объем земляных работ, отпадает необходимость в дорогостоящей пригрузке и в устройстве защиты от почвенной коррозии и блуждающих токов. Однако одним из недостатков надземной укладки в числе прочих является устройство опор. При этом, ввиду невозможности в настоящее время полного предотвращения случаев разрыва магистральных трубопроводов, особое значение придается устойчивости к дальнейшему разрушению непосредственно после аварии.

Сразу после разрыва трубопровода с напором газа могут возникать колебания разорвавшегося участка, которые, в свою очередь, при определенных характеристиках потока газа, материала и размеров трубопровода могут значительно возрастать и приводить к дальнейшему разрушению нитки.

Участок трубопровода от места разрыва до ближайшей опоры (в надземном случае) или резервуара представляет собой в общем случае тонкостенную конструкцию с поперечным размером много меньшим продольного. В связи с этим появляется возможность рассматривать задачу о последующем разрушении нитки после разрыва в балочном приближении, то есть представить разбалтывающийся участок в виде тонкого упругого стержня с одним закрепленным концом, колеблющегося при наличии возмущения в виде потока жидкости. Такой подход позволит вычислить критическое соотношение параметров системы, при котором не будет происходить неограниченный рост амплитуды колебаний разорванного конца газопровода и его дальнейшее разрушение, а также более конкретно связать это с необходимым минимальным расстоянием между его опорами.

В данной работе излагается вывод уравнения колебаний тонкой балки с граничными условиями, его обезразмеривание и аналитическое решение методом разделения переменных. Для конкретных значений безразмерных коэффициентов приводятся формы гармоник колебаний балки. Полученные результаты увязываются с характеристиками реального надземного трубопровода на предмет выяснения максимального безопасного расстояния между опорами.

2 Задача о балке

2.1 Вывод уравнения свободных колебаний балки

Когда мы говорим, что балка является тонкой, то подразумевается, что ее поперечные размеры малы по сравнению с ее длиной. Сами деформации считаются малыми. Поскольку мы будем рассматривать колебания балки только в одной плоскости, то от ширины балки можно вообще отвлечься и рассматривать в качестве поперечного размера только ее толщину; а в качестве самой балки – тонкий стержень.

В практически важном случае слабого изгиба стержней уравнения равновесия значительно проще, чем в общем случае. Изгиб является слабым, если направление касательной к стержню медленно меняется вдоль его длины. Другими словами, радиус кривизны изогнутого стержня в каждой точке должен быть велик по сравнению с длиной стержня. Практически это условие сводится к требованию малости поперечного прогиба стержня по сравнению с его длиной. Подчеркнем, что при этом отнюдь не требуется малости прогиба по сравнению с толщиной стержня.

Приближение слабого изгиба в некоторых случаях незаконно. Это – те случаи, в которых вдоль длины стержня действует большая сила внутренних напряжений. Наличие такой силы вызывается обычно сильным натяжением стержня приложенными к его концам внешними растягивающими силами. Однако, в рассматриваемом в дальнейшем случае консольно закрепленного стержня таких сил нет, и можно рассматривать задачу о слабом изгибе.

Обратным предельным случаем является тот, когда сопротивление стержня на изгиб мало по сравнению с его сопротивлением на растяжение. Физически такой случай может быть осуществлен либо очень сильным растяжением, либо при достаточно малом значении величины EI , что может быть связано с малой толщиной. Но это задача о струне.

При сгибании стержня в некоторых местах внутри него возникают растяжения, а в других – сжатия. На выпуклой стороне стержня, очевидно, происходит растяжение; по мере углубления в толщу стержня это растяжение постепенно уменьшается, достигая в конце концов нуля, вслед за чем в дальнейших слоях начинается постепенно увеличивающееся сжатие. Таким образом, внутри стержня имеется нейтральная поверхность, на которой растяжение вообще отсутствует, а по двум ее сторонам деформация имеет противоположный знак. Очевидно, что эта поверхность расположена на середине толщины стержня.

Выберем систему координат с началом в некоторой точке нейтральной поверхности внутри рассматриваемого участка стержня. Ось x направим параллельно оси стержня (недеформированного), ось z – по нормали к оси стержня; изгиб пусть происходит в плоскости x, z . При слабом изгибании стержня можно считать, что изгиб происходит в одной плоскости. Это связано с известным обстоятельством, что отклонение слабо изогнутой кривой от плоскости (так называемое ее кручение) является малой величиной высшего порядка по сравнению с кривизной.

Точное решение задачи об изгибе стержня с одним закрепленным концом показывает, что в общем случае нагружения стержня изгибающей силой изгиб сопровождается кручением. Это кручение получается потому, что сумма моментов всех касательных сил, действующих по поперечному сечению стержня, относительно центра тяжести сечения не равна нулю. В плоскости поперечного сечения можно найти точку, относительно которой сумма моментов касательных сил равна нулю. Такую точку называют центром изгиба.

Легко показать, что если нагрузка действует в плоскости симметрии стержня, то сумма моментов относительно центра тяжести сечения всех касательных сил, действующих по поперечному сечению стержня, равна нулю. Следовательно, в этом случае центр изгиба совпадает с центром тяжести.

Таким образом, изгиб стержня не сопровождается кручением только в том случае, когда линии действия внешних сил проходят через центры изгиба поперечных сечений. Это выполняется в рассматриваемом нами в дальнейшем случае сосредоточенной силы на конце балки с закрепленным другим концом.

Легко показать, что при изгибе тонкого стержня большой является только растягивающая (или сжимающая) компонента тензора внутренних напряжений. Деформация, в которой отлична от нуля только компонента $s_{xx} = s$ тензора напряжений, есть не что иное, как деформация простого растяжения или сжатия. Таким образом, в каждом элементе объема изгибаемого стержня происходит простое растяжение или сжатие. Величина этого растяжения, конечно, различна в разных точках каждого из поперечных сечений стержня, что и приводит в результате к изгибу всего стержня.

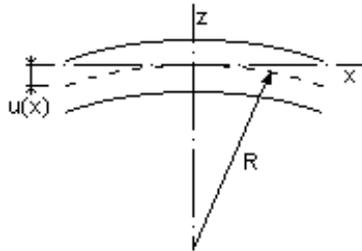


Рис.1. R – радиус кривизны нейтральной поверхности вблизи начала координат, $u(x)$ – вертикальное смещение точек нейтральной поверхности.

Рассмотрим какой–нибудь элемент длины dx , параллельный оси стержня и находящийся где–нибудь вблизи начала координат. При изгибании стержня длина dx изменится и станет равной dx' . Неизменными остаются только те элементы длины, которые расположены на нейтральной поверхности. Длины dx и dx' можно рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами соответственно R и $R + z$, где z – значение координаты z в точке, в которой выбран элемент dx' . Поэтому

$$dx' = ((R + z) / R) dx = (1 + z / R) dx.$$

Относительное удлинение равно, следовательно,

$$\epsilon(z) = (dx' - dx) / dx = z / R.$$

Напряжение $\sigma = E \epsilon(z)$, где E – модуль Юнга (упругости). Из векторного анализа известно, что кривизна плоской кривой $u(x)$:

$$k = \frac{|u''(x)|}{(1 + (u'(x))^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Очевидно, что в нашем случае малых деформаций $u'(x)$ является величиной много меньшей единицы. Следовательно, радиус кривизны равен:

$$R = 1 / k = 1 / u''(x).$$

Откуда находим относительное удлинение:

$$\epsilon = u''(x) z. \quad (2)$$

Потенциальная энергия единицы объема стержня (удельная энергия деформированного состояния):

$$\pi_0 = \frac{\sigma \epsilon}{2} = \frac{E \epsilon^2}{2} = \frac{E}{2} z^2 (u''(x))^2.$$

Проинтегрировав удельную энергию по поперечному сечению стержня F , получим потенциальную энергию единицы длины (заметим, что стержень предполагается однородным, то есть его плотность и модуль Юнга одинаковы по всей длине):

$$\pi = \int_F \pi_0 \, df = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \int_F z^2 \, df,$$

где df – элемент поперечного сечения стержня, а интеграл $I = \int_F z^2 \, df$ есть удельный момент инерции сечения.

Кинетическая энергия единицы длины стержня при таком движении:

$$w = \frac{\rho F}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2,$$

где ρ – плотность стержня.

Следует сразу заметить, что применительно к рассматриваемому в последующем трубопроводу, плотность стержня ρ не будет являться отдельно плотностью материала трубы или нефтепродукта, а будет равна некоторой средневзвешенной плотности, определяемой по формуле:

$$\rho F = \rho' F + \rho_{\text{ТР}} \pi D \delta,$$

где $\rho_{\text{ТР}}$ – плотность материала трубы, D – диаметр трубы, d – толщина стенок.

Откуда:

$$\rho = \rho' + \rho_{\text{ТР}} \frac{4\delta}{D}. \quad (3)$$

Пусть длина стержня l , тогда учитывая, что плотность и модуль упругости постоянны по всей длине, вычислим полные потенциальную и кинетическую энергии стержня:

$$\Pi = \int_0^l \pi \, dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \, dx,$$

$$W = \int_0^l w \, dx = \frac{\rho F}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dx.$$

Таким образом найдем функцию Лагранжа системы: $L = W - \Pi$. Отсюда получим действие:

$$\int_{t_0}^t \int_0^l \frac{1}{2} \left(\rho F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right) \, dx \, dt. \quad (4)$$

Уравнение движения системы определяется равенством нулю первой вариации действия. И для функционала вида

$$v(z(x, y)) = \iint_{\Omega} \Phi \left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \, dx \, dy$$

это уравнение имеет вид:

$$-\frac{\partial}{\partial y} [\Phi_{z_y}] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\Phi_{z_{xx}}] = 0.$$

Тогда получаем уравнение свободных колебаний прямолинейного упругого стержня:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho F u_t] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI u_{xx}] = 0.$$

И, так как стержень однороден (F , E , I и ρ – постоянные), уравнение движения стержня преобразуется к виду:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (5)$$

2.2 Уравнение движения стержня при наличии внешнего возмущения

Рассмотрим искривленный участок трубопровода с потоком жидкости. Пусть скорость потока V , а плотность жидкости ρ' .

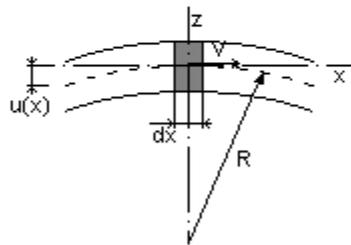


Рис.2.

Площадь поперечного сечения потока F . Бесконечно тонкий участок потока dx , вследствие поворота в изгибе трубы, действует на стенку трубы с некоторой силой в направлении оси z . Пусть радиус кривизны в этом месте R , тогда эта сила в расчете на единицу длины будет равна:

$$\rho' F \frac{V^2}{R}.$$

Учитывая давление потока жидкости P , а также, что $R=1/u''(x, t)$, получим окончательно уравнение колебаний однородного упругого стержня при наличии внешнего воздействия, моделирующее колебания трубопровода с потоком жидкости:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (V^2 \rho' F + PF) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (6)$$

2.3 Сведение уравнения колебаний к безразмерному виду

Для упрощения и наглядности дальнейших расчетов и вычислений, а также для более простого получения граничных условий, необходимо свести уравнение колебаний к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (7)$$

где $u(x, t)$ – безразмерное вертикальное смещение точек нейтральной поверхности; x – безразмерная координата по оси неискривленного стержня; t – безразмерное время; A – безразмерный коэффициент, который соответственно и будет включать в себя все характеристики стержня (трубопровода и потока).

Очевидно, что самый естественный и удобный масштаб по $u(x, t)$ и по x – это длина стержня l , то есть:

$$x = lx, u(x, t) = lu(x, t).$$

Величина x , таким образом, в пределах стержня меняется от 0 до 1, а длина стержня в безразмерных переменных равна единице. Тогда уравнение колебаний примет вид:

$$\frac{\rho Fl^4}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{Fl^2(\rho V^2 + P)}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Остается обезразмерить переменную времени t . Пусть $t = t_{st} \tau$, где t_{st} – масштаб по времени, который необходимо установить. Подставив значение t в предыдущее уравнение, легко найдем, что

$$t_{st} = \left(\frac{\rho Fl^4}{EI} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

При этом окончательно уравнение колебаний стержня в безразмерной форме будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

$$A = \frac{Fl^2(\rho V^2 + P)}{EI}. \quad (9)$$

В дальнейшем мы будем работать только с этим обезразмеренным уравнением колебаний и вернемся к рассмотрению масштабной задачи лишь при анализе характеристик и поведения реального трубопровода.

2.4 Граничные условия

Как уже говорилось выше, наша модель разорвавшегося трубопровода с потоком жидкости представляет собой упругий однородный тонкий стержень с одним закрепленным концом, колеблющийся при наличии внешнего возмущения, которое и обуславливает появление третьего члена в уравнении колебаний.

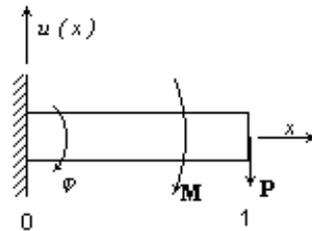


Рис. 3. $\varphi(x)$ – угол отклонения данного участка стержня от оси x , совпадающей с осью покоящегося стержня; $M(x)$ – вектор изгибающего момента сил внутренних напряжений, действующих на площадь сечения стержня; $P(x)$ – вектор силы внутренних напряжений, приложенной к площади сечения стержня.

Если изгиб производится сосредоточенными силами, то перерезывающая сила постоянна вдоль каждого из отрезков стержня между точками приложения сил, а в каждой из этих точек испытывает скачек, равный приложенной внешней силе.

Рассмотрим какой-нибудь из бесконечно малых элементов стержня, вырезанный между двумя бесконечно близкими сечениями. Момент M берется относительно точки (начала координат), лежащей в самой плоскости этого сечения. Будем вычислять суммарный момент, приложенный к данному элементу стержня, относительно точки (назовем ее точка O), лежащей в плоскости его правого основания. Тогда внутренние напряжения на этом основании дают момент $M + dM$. Момент же (относительно O) сил

внутренних напряжений в левом основании элемента складывается из момента $-M$ этих сил относительно начала координат в плоскости левого основания (точка O') и момента (относительно O) суммарной силы $-P$, действующей на этом основании. Этот второй момент равен $[(- dl) (- P)]$, где dl – вектор элемента длины стержня от O' к O . Таким образом, полный действующий на элемент стержня момент сил есть $dM + [dl P]$. В равновесии он должен быть равным нулю:

$$dM + [dl P] = 0.$$

Разделив это равенство на dl и замечая, что $dl / dl = \tau$ есть единичный вектор касательной к стержню (рассматриваемому как линия), получаем уравнение:

$$dM / dl = [P \tau].$$

Конец стержня называется закрепленным, если он не может испытывать никаких смещений – ни продольных, ни поперечных, и, кроме того, не может измениться его направление (то есть направление касательной к стержню в его конце). Отсюда сразу вытекают два граничных условия на левом закрепленном конце:

$$\varphi(0) = u'(0, t) = 0,$$

$$u(0, t) = 0.$$

Граничные условия в случае свободного конца стержня заключаются в том, что сила P и момент сил M на конце стержня должны обратиться в нуль.

Рассмотрим вычисление момента сил M .

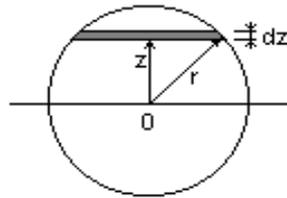


Рис. 4. r – радиус поперечного сечения стержня.

Тогда момент сил M относительно O равен:

$$M = 2 \int_{-r}^r \sigma z \sqrt{r^2 - z^2} dz. \quad (10)$$

Но как уже было получено в самом начале, $\sigma = E \varepsilon \sim u''(x, t) \sim u''(x, t)$. Таким образом, $M \sim u''(x, t)$. Отсюда, из равенства нулю момента сил M на свободном конце стержня получаем третье граничное условие:

$$u''(1, t) = 0.$$

А из равенства нулю перерезывающей силы $P = dM / dx \sim u'''(x, t)$, найдем последнее необходимое условие на свободном конце:

$$u'''(1, t) = 0.$$

3 Аналитическое решение задачи

3.1 Нахождение собственных функций методом разделения переменных

Итак, в математической форме задача представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с четырьмя условиями на границе:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, t) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(1, t) = 0. \quad (12)$$

где A – безразмерный коэффициент.

Из вида дифференциального уравнения можно сразу сказать, что решение будет представлять собой какую-то суперпозицию экспоненциальных функций. Причем, показатели экспонент могут быть как комплексные, так и действительные (положительные и отрицательные). Таким образом, при некоторых значениях коэффициента A могут возникать решения с неограниченно возрастающей с течением времени амплитудой колебаний. Задача заключается в том, чтобы найти такой диапазон значений A , в котором не будет решений с бесконечным ростом амплитуды.

Метод решения состоит в том, что сначала мы найдем собственные функции уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (13)$$

при тех же граничных условиях: $u(0, t) = 0$, $u'(0, t) = 0$, $u''(1, t) = 0$, $u'''(1, t) = 0$. А затем будем искать решение исходного уравнения (7) как некоторую их суперпозицию.

Уравнение (13) будем решать методом разделения переменных. Представим функцию $u(x, t)$ в виде произведения двух функций, одна из которых – $X(x)$, зависит только от координаты x , а вторая – $T(t)$, зависит только от времени t .

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Подставим это выражение в уравнение (13). Получим:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{X^{IV}}{X}.$$

Пусть эти две дроби равны некоторому числу $-\lambda = -\omega^2$, то есть:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{X^{IV}}{X} = -\lambda = -\omega^2.$$

Получаем два уравнения. Одно для определения временной части функции $u(x, t)$:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0,$$

с очевидным начальным условием $T(0) = 0$, так как в начальный момент стержень покоится и $u(x, 0) = 0$. Ища решение этого уравнения в виде суммы экспонент, найдем, что $T(t) = \text{const} \sin \omega t$. Таким образом, амплитуда свободных колебаний не растет бесконечно со временем и колебания устойчивы.

Второе уравнение определяет координатную часть функции $u(x, t)$ с четырьмя граничными условиями, вытекающими из условий на границе для функции $u(x, t)$:

$$X^{IV} - \omega^2 X = 0, \quad (14)$$

$$X(0) = X'(0) = X''(1) = X'''(1) = 0. \quad (15)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $X = \exp(mx)$. Подставим X в уравнение (14). Получим уравнение для определения m :

$$m^4 - \omega^2 = 0.$$

Отсюда, $m = k, -k, ik, -ik$, где $k = \omega^2$. Тогда решение будет представлять собой сумму экспонент:

$$X = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx}. \quad (16)$$

Из четырех граничных условий получаем однородную систему уравнений для определения коэффициентов перед экспонентами:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & -k & ik & -ik \\ k^2 e^k & k^2 e^{-k} & -k^2 e^{ik} & -k^2 e^{-ik} \\ k^3 e^k & -k^3 e^{-k} & -ik^3 e^{ik} & ik^3 e^{-ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу через \mathbf{K} , а столбец коэффициентов \mathbf{C} . Тогда система уравнений в матричной форме примет вид: $\mathbf{K}\mathbf{C} = 0$. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю. Таким образом, получаем уравнение для определения k : $\det \mathbf{K} = 0$. Путем несложных выкладок найдем, что либо $k = 0$, что нас очевидно не устраивает; либо получаем уравнение для определения других значений k , решения которого не выражаются в квадратурах:

$$\operatorname{ch} k \cos k + 1 = 0. \quad (17)$$

Это уравнение имеет бесконечное количество решений, отстоящих друг от друга на все более возрастающий с ростом значений интервал. Мы рассмотрим только первые два значения k_1 и k_2 .

Теперь обратимся к нахождению коэффициентов C_i . Решая систему уравнений при k_1 и k_2 и вводя обозначения: $a = \operatorname{ch} k + \cos k$, $b = \operatorname{sh} k + \sin k$, найдем следующие выражения для коэффициентов:

$$C_1 = i \frac{a-b}{a+ib} C_4, \quad C_2 = -i \frac{a+b}{a+ib} C_4, \quad C_3 = -\frac{a-ib}{a+ib} C_4.$$

Подставим эти значения в формулу собственной функции (16) и несколько преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} X &= C_4 \left(i \frac{a-b}{a+ib} e^{kx} - i \frac{a+b}{a+ib} e^{-kx} - \frac{a-ib}{a+ib} e^{ikx} + \frac{a+ib}{a+ib} e^{-ikx} \right) = \\ &= \frac{C_4}{a+ib} \left(ia(e^{kx} - e^{-kx}) - ib(e^{kx} + e^{-kx}) - a(e^{ikx} - e^{-ikx}) + ib(e^{ikx} + e^{-ikx}) \right) = \\ &= C_4 \frac{2i}{a+ib} (a \operatorname{sh} kx - b \operatorname{ch} kx - a \sin kx + b \cos kx). \end{aligned}$$

Если взять C_4 равным $(a+ib)/2$, то мы получим функцию X в виде:

$$X = a \operatorname{sh} kx - b \operatorname{ch} kx - a \sin kx + b \cos kx.$$

Так как любая функция, являющаяся линейной комбинацией частных решений, является решением уравнения, то можно взять такие комбинации, которые удобны при вычислениях. Например, позволяют

более просто определять произвольные постоянные. К таким функциям относятся функции Крылова, получившие широкое распространение в расчетной практике при решении задач динамики прямолинейных стержней постоянного сечения:

$$(\operatorname{ch} kx + \cos kx) / 2, (\operatorname{sh} kx + \sin kx) / 2,$$

$$(\operatorname{ch} kx - \cos kx) / 2, (\operatorname{sh} kx - \sin kx) / 2.$$

Откуда:

$$X = (\operatorname{ch} k + \cos k) (\operatorname{sh} kx - \sin kx) - (\operatorname{sh} k + \sin k) (\operatorname{ch} kx - \cos kx). \quad (18)$$

Для двух рассматриваемых значений k_1 и k_2 получим соответственно две собственные функции $\varphi_1 = X(k_1)$ и $\varphi_2 = X(k_2)$. Причем, как и должно быть, функции $\varphi_1 = X(k_1)$ и $\varphi_2 = X(k_2)$ ортогональны. Легко проверить, что:

$$\int_0^1 \varphi_1 \varphi_2 dx = 0.$$

3.2 Колебания стержня при наличии внешнего воздействия

Вернемся теперь к исходному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Мы нашли собственные функции для уравнения без второго члена. Используем их для анализа полного уравнения. Пусть решение уравнения (7) имеет вид:

$$u = q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2,$$

где $q_1 = a_1 \exp(i\Omega t)$, $q_2 = a_2 \exp(-i\Omega t)$, a_1, a_2 – некоторые постоянные, значения которых сейчас не существенны, Ω – некоторая частота.

К корректности такого предположения и достоверности получаемых результатов мы вернемся позднее. Пока же будем исходить из этого утверждения. Очевидно, что для того, чтобы решение не разбалтывалось, то есть амплитуда колебаний не возрастала бесконечно со временем, необходимо, чтобы функции q_1 и q_2 не возрастали бесконечно. Для этого обязательно показатели экспонент должны быть комплексными величинами, а, следовательно, круговая частота Ω должна быть существенно действительным числом. Но нас интересует интервал значений коэффициента A , при котором не происходит неограниченного роста амплитуды, то есть выполняется условие на Ω . Поэтому задача сводится к отысканию зависимости $\Omega \in \Omega \in \Omega \in A$.

Для этого умножим уравнение (7) на функцию $\varphi_1 = X(k_1)$ и проинтегрируем по координате x по всей длине стержня. Прделав то же самое с функцией $\varphi_2 = X(k_2)$, получим систему уравнений:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \varphi_1(x) dx = 0, \quad (19)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \varphi_2(x) dx = 0. \quad (20)$$

Сразу отметим, что $\varphi = \varphi(x)$ – функция только координаты, $q = q(t)$ – только времени. Кроме того, сразу заметим, что:

$$\ddot{q} = -a\Omega^2 \exp(i\Omega t) = -\Omega^2 q.$$

По определению собственной функции – $\varphi^{IV} = \omega^2 \varphi$. Подставляя u в систему уравнений (19), (20) и учитывая сделанные только что замечания, получим уравнение:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \frac{\int_0^1 \varphi_1^{\parallel} \varphi_1 dx}{\|\varphi_1\|} & \frac{\int_0^1 \varphi_2^{\parallel} \varphi_1 dx}{\|\varphi_1\|} \\ \frac{\int_0^1 \varphi_1^{\parallel} \varphi_2 dx}{\|\varphi_2\|} & \frac{\int_0^1 \varphi_2^{\parallel} \varphi_2 dx}{\|\varphi_2\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\|\varphi\| = \int_0^1 \varphi^2 dx$.

Или:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 - \Omega^2 + A \frac{\int_0^1 \varphi_1^{\parallel} \varphi_1 dx}{\|\varphi_1\|} & -A \frac{\int_0^1 \varphi_2^{\parallel} \varphi_1 dx}{\|\varphi_1\|} \\ A \frac{\int_0^1 \varphi_1^{\parallel} \varphi_2 dx}{\|\varphi_2\|} & \omega_2^2 - \Omega^2 - A \frac{\int_0^1 \varphi_2^{\parallel} \varphi_2 dx}{\|\varphi_2\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу \mathbf{K} , а столбец – \mathbf{Q} . Тогда уравнение примет вид:

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = 0.$$

Это однородная система линейных уравнений. Она может иметь нетривиальное решение только если определитель матрицы равен нулю. Следовательно, необходимо решить уравнение $\det \mathbf{K} = 0$. Причем, в матрице \mathbf{K} неизвестными являются только коэффициент A и круговая частота Ω , то есть $\mathbf{K} = \mathbf{K}(A, \Omega)$. Решая уравнение $\det \mathbf{K} = 0$, получим биквадратное уравнение вида:

$$\Omega^4 + B(A) \Omega^2 + C(A) = 0, \quad (21)$$

где $B(A)$ – некоторая линейная функция от A , а $C(A)$ – некоторая квадратичная функция от A .

Для того, чтобы круговая частота не принимала комплексные значения, необходимо, чтобы детерминант уравнения был неотрицательным. Таким образом, получаем уравнение для определения требуемого диапазона значений коэффициента A . При этом A будет иметь как нижний, так и верхний пределы. Конкретные численные значения для данной задачи будут рассмотрены и проанализированы в следующем пункте.

Известно, что обращение в нуль частоты колебаний соответствует потери устойчивости. Приравняв нулю частоту колебаний, получаем значения критической скорости, при которой исходная прямолинейная форма становится неустойчивой и появляются новые устойчивые формы равновесия.

Для трубопровода с граничными условиями (11) и (12) такой критической скорости не существует. Следовательно, отсутствуют и смежные (близкие к исходной) формы равновесия. Этот вывод не отвечает, однако, на вопрос, будет ли (и при каких условиях) исходная прямолинейная форма устойчивой.

Исследование устойчивости исходной прямолинейной формы показывает, что для трубопровода с одним закрепленным концом единственной устойчивой формой будет исходная прямолинейная.

4 Численные результаты и их анализ

4.1 Балочное приближение

В этой части рассмотрим результаты проведенного анализа, исходя из полученных значений, а также конкретный вид собственных функций.

Напомним, что мы искали формы собственных колебаний стержня в виде суперпозиции действительных и комплексных экспонент. Из граничных условий получили однородную систему из четырех уравнений. Для ее разрешения необходимо равенство нулю определителя системы. Отсюда было получено уравнение для нахождения коэффициента k в показателях экспонент:

$$\operatorname{ch} k \cos k + 1 = 0.$$

Численное решение этого уравнения дает следующие значения для коэффициента k первых двух собственных функций:

$$k_1 = 1,875, \quad k_2 = 4,694.$$

При этом получаем вполне определенные формы колебаний:

$$\varphi_1 = X(x, k_1), \quad \varphi_2 = X(x, k_2).$$

Кроме того, полученные собственные функции для наиболее простого уравнения поперечных колебаний стержня постоянного сечения могут быть эффективно использованы при приближенных решениях более сложных поперечных колебаний стержней: с переменным сечением, нагруженных сосредоточенными динамическими силами, стержней в потоке воздуха или жидкости и т. д.

Значение безразмерного коэффициента A в уравнении (7), при котором не будет происходить неограниченного роста амплитуды колебаний, не должно превышать 20,04:

$$\frac{Fl^2(\rho V^2 + P)}{EI} < 20,04. \quad (22)$$

Исходя из этого неравенства, по скорости потока жидкости или газа в трубопроводе, плотности жидкости или газа, а также размерам и прочностным характеристикам самих труб, можно анализировать безопасное расстояние между неподвижными опорами надземного трубопровода.

На рис.5 приводится график функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, а на рис.6 график нарастающих колебаний стержня при наличии внешнего воздействия:

$$u(x_0, t) = q_1(t)\varphi_1(x_0) + q_2(t)\varphi_2(x_0).$$

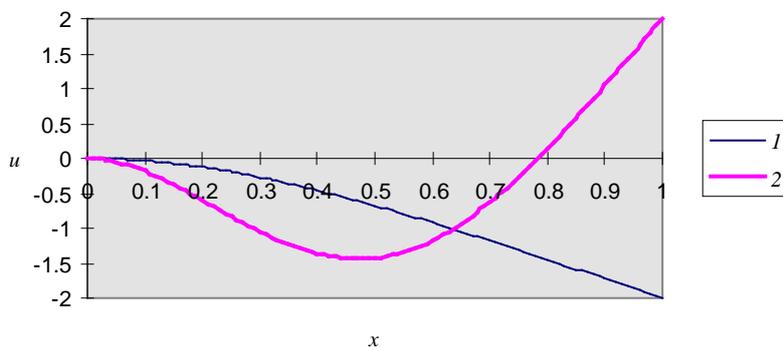


Рис.5. Первые две гармоники свободных колебаний тонкого упругого однородного стержня с одним закрепленным концом без внешнего воздействия ($\varphi_1 - (1)$, $\varphi_2 - (2)$).

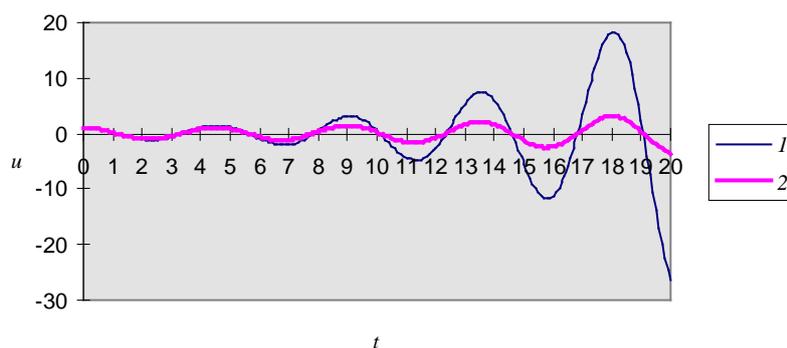


Рис.6. Зависимость отклонения крайней точки газопровода (в безразмерных координатах) при начальном отклонении 1 от времени с момента разрыва. (1) – при превышении максимальной длины пролета на 2%, (2) – на 0,5%. Время t измеряется секундах.

4.2 Трубопроводы

В этой части перейдем к рассмотрению реальных трубопроводов. Проанализируем полученные ранее результаты и выводы применительно к надземным магистральным газо– и нефтепроводам. Также коснемся вопросов применимости и достоверности найденных закономерностей в реальных условиях.

Как уже отмечалось ранее, проектирование и расчет магистральных трубопроводов, трубопроводов гидравлических и пневматических силовых систем, применяемых в различных отраслях машиностроения и в судостроении, трубопроводов в нефтяной, газовой и химической промышленности требуют решения проблем, связанных с колебаниями оболочек, внутри которых содержится жидкость. Подобные колебания вызывают увеличение действующих напряжений при приближении к резонансным режимам, изменение различных параметров системы, связанное со снижением ее работоспособности. Кроме того, возможно появление недопустимых перемещений и напряжений в трубопроводах при переходных процессах. Эти факторы снижают надежность работы конструкции.

Одним из эффективных методов снижения вибраций трубопроводов является конструкционное демпфирование трубопровода опорами. Способность жестких опор поглощать энергию колебаний труб значительно возрастает от применения прокладок с демпфирующими свойствами. Такой метод не только эффективен, но и является одним из самых экономичных в устранении как опасных вибраций функционирующего трубопровода, так и катастрофического разбалтывания нити при разрыве.

В сборнике статей “Рассеяние энергии при колебаниях механических систем” под редакцией Писаренко приводится более точное уравнение колебаний трубопровода в частных производных, имеющего прямолинейную осевую линию и несущего установившийся поток несжимаемой вязкой жидкости в безразмерных переменных:

$$(1+q) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 2d \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(d^2 - c) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \mu \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} = 0, \quad (23)$$

где $q = \frac{\gamma_m}{\gamma_0}$, $d = \frac{V}{\sqrt{gl}}$, $c = \frac{T-P}{\gamma_0 l}$, $\mu = \frac{EI}{\gamma_0 l^3}$, $\tau = t \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\psi = \frac{u}{l}$, $\xi = \frac{s}{l}$; γ_m – погонный вес трубы;

γ_0 – погонный вес жидкости; l – пролет рассматриваемого участка трубопровода; g – ускорение свободного падения; EI – жесткость трубы при изгибе; T – растягивающая сила, действующая на трубу; V – скорость движения жидкости; u – поперечное перемещение точки s осевой линии.

Типичные скорости движения потока: для нефти – 0,5 - 3 м/с. Верхний предел скорости относится к высоконапорным трубопроводам, которые из экономических соображений конструируются небольшими.

Для примера возьмем скорость потока нефти $V=2$ м/с. При этом, очевидно, значение длины пролета трубопровода l равно десяткам метров. Давление в нефтепроводах лежит в пределах от 5 до 10 атмосфер.

Стандарты диаметров труб в нашей стране составляют: 529, 720, 820, 1020, 1220 мм. Для удобства будем рассматривать диаметр равный 1020 мм. Толщина стенок d может изменяться в пределах от 5 до 15 мм. Мы возьмем среднюю толщину 10 мм.

Подставив численные значения, легко обратить внимание, что ввиду малости d по сравнению с величиной $1+q$ и с $\sqrt{\frac{P}{\gamma_0 l}}$, и учитывая, что растягивающая сила, действующая на трубу, отсутствует, в уравнении (23) двумя членами можно пренебречь, и мы вновь вернемся к нашему исходному виду (6).

Что касается материала, из которого изготавливаются трубы современных магистральных газопроводов и нефтепроводов, то, поскольку диаметры трубопроводов и рабочий напор постоянно возрастают, трубы для магистралей сегодня выполняют почти исключительно из стали. Стальные трубы наиболее пригодны для магистральных трубопроводов, работающих с высокой нагрузкой, поскольку они имеют большой запас прочности, высокую допустимую перегрузку для внешних и внутренних нагрузок, обеспечивают надежное и плотное соединение труб и позволяют выполнять трубы большой длины при относительно малой массе трубопровода.

Кроме того, все изоляции, антикоррозийная защита и различные устройства, которые могут быть на трубопроводе, составляют в среднем около 10% от собственного веса трубы.

Модуль упругости (Юнга) стали равен $20,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$. Момент инерции сечения вычисляется по формуле:

$$I = \frac{1}{4} \frac{D^2}{4} \pi D \delta,$$

где D – диаметр трубопровода, δ – толщина стенок.

Для обычных нефтепроводов $\rho^l V^2$ много меньше давления жидкости. Учитывая это, получаем неравенство для определения длины пролета l :

$$l < \sqrt{20,04 \frac{EI}{FP}}, \quad (24)$$

Или, подставив выбранные численные значения:

$$l < 0,32 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{D}{P}}, \quad (25)$$

где D измеряется в миллиметрах, P – в атмосферах, l – в метрах.

При диаметре трубы 1020 мм и давлении 10 атмосфер ограничение на длину пролета составляет 100 мм при толщине стенок 10 мм.

Для газопровода с плотностью газа $50 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, скоростью потока 60 м/с и давлением 70 атмосфер аналогичное ограничение на расстояние между жесткими опорами составляет 39 м.

По формулам (24) и (25) аналогичным образом можно рассчитывать надземные магистральные газопроводы и нефтепроводы, а также трубопроводы другого назначения с любыми параметрами и характеристиками труб и потоков.

Коснемся вкратце вопроса времени протекания аварии. Рассмотрев характерные величины, можно ответить на вопрос: возможно ли прекращение разбалтывания трубопровода из-за естественного спада давления нефти или газа после разрыва или из-за своевременного постороннего вмешательства.

Для этого рассмотрим колебания крайней точки трубопровода после аварии. Как уже говорилось, эти колебания будут представлять из себя сумму комплексных экспонент:

$$u = q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2,$$

где $q_1 = a_1 \exp(i\Omega t)$, $q_2 = a_2 \exp(-i\Omega t)$, a_1 , a_2 – некоторые постоянные, значения которых сейчас не существенны, Ω – некоторая частота.

Выбирая начальные условия: $u(0,1) = 1$, $\dot{u}(0,1) = 1$, получим:

$$u(t, 1) = e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}.$$

Пусть отклонение безразмерного коэффициента A от своего максимального значения в большую сторону составляет Δ , то есть:

$$A = 20,04 (1 + \Delta).$$

Тогда превышение допустимой длины пролета будет приблизительно $l\Delta/2$. При этом безразмерная круговая частота:

$$\Omega \approx 11 + 8,8i\sqrt{\Delta}.$$

Тогда движение крайней точки будет представлять из себя гармонические колебания с возрастающей по экспоненциальному закону амплитудой (такой точности для анализа сейчас вполне достаточно).

Таким образом, уже через один период, равный в безразмерных координатах $2\pi/11$, амплитуда колебаний возрастет в $e^{5\sqrt{\Delta}}$ раз, а через два периода в $e^{10\sqrt{\Delta}}$ раз.

Масштаб по времени t_{st} для нефтепровода составляет около 14 секунд, а для газопровода около 8 секунд.

Можно сделать вывод, что при превышении максимальной длины пролета всего на 0,5% ($\Delta=0,01$) при разрыве газопровода уже через 8-9 секунд амплитуда колебаний возрастет в 3 раза, с последующим возрастанием амплитуды каждые 8-9 секунд в e раз. Для нефтепровода аналогичное время составит около 15 секунд.

Если при этом в месте разрыва, что скорее всего, существовали изгибные напряжения, то подобные колебания приведут, по всей видимости, к длинному разрушению трубопровода в течение нескольких десятков секунд.

5 Заключение

Разрушение магистральных трубопроводов представляет собой крупную научно-техническую проблему в связи с широкой распространенностью трубопроводов в мире и большими последствиями от их разрушения.

По западной статистике с 1970 по 1984 год в мире из общего числа аварий трубопроводов более 53% произошло из-за внешнего воздействия, и только 33% аварий – из-за старения, коррозии и разрушения материалов.

Действующие сейчас магистральные газопроводы и нефтепроводы не гарантированы от угрозы возникновения протяженных разрушений по тем или иным причинам, то есть в них заложена потенциальная возможность больших разрушений. Об этом свидетельствует практика эксплуатации газопроводов у нас в стране и за рубежом: протяженные разрушения в магистральных трубопроводах хотя и редко, но все же время от времени происходят. Вероятность возникновения длинных разрушений зависит от качества труб и сварных стыков, от соблюдения норм строительства и эксплуатации трубопроводов и от многих случайных факторов, но принципиальная возможность возникновения протяженных разрушений в магистральных трубопроводах пока сохраняется.

Приведенные выше результаты и выводы позволяют значительно уменьшить последствия длинных разрушений трубопроводов и риск возникновения крупных подобных аварий.

Литература

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1963, 880 с.
3. Под ред. Биргера И.Л. и Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т.1, М.: Машиностроение, 1968
4. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986

5. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971, 808 с.
6. Светлицкий В.А. Механика стержней. ч.2, М.: Высшая школа, 1987, 304 с.
7. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966
9. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982
10. Филоненко–Бородин М.М. Теория упругости. М., 1959
11. Сехниашвили Э. Колебания упругих систем. Тбилиси, 1966
12. Анохин Н.Н. Свободные и вынужденные колебания балок и пластин в условиях плоской задачи теории упругости. М., 1975
13. Костин В.И. Нестационарные колебания вязкоупругих стержней. М., 1987
14. Шелия Р.В. Пространственные колебания осесимметричных тел с учетом диссипации энергии. Калинин, 1989
15. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел. Киев: Наукова думка, 1978
16. Мартыанов А.П. Неконсервативные задачи и методы расчета стержней, стержневых систем и оболочек. Казань, 1976
17. Багиров Л.А., Доброхотов С.Ю. Аналитические и численные методы решения уравнения балки. М., 1983
18. Под ред. Писаренко Г.С. Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. 1974, с.86-93, 311-317
19. Лазарян В.А. Техническая теория изгиба. 1976
20. Белый В.Д. Тонкостенные стержни. Омск, 1984, 82 с.
21. Бабин Л.А., Быков Л.И., Волохов В.Я. Типовые расчеты по сооружению трубопроводов. М.: Недра, 1979, 176 с.
22. Под ред. Шмидта Д. Стальные трубы: справочник. М., Металлургия, 1982, 536 с.
23. Ed. By John J. McKetta Piping design handbook. Austin, Texas, 1992, p.886-889, 1024-1028.
24. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969, 424 с.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.7. Теория упругости. М.: Наука, 1987, 248 с.