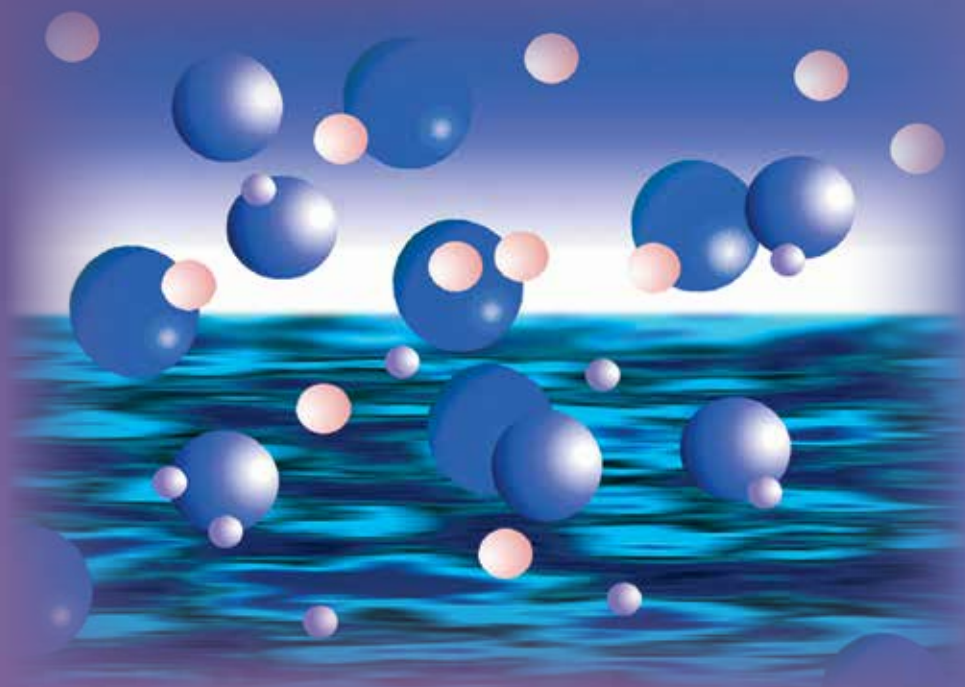


ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ И ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Том 2
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



НАУКА

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**Институт проблем
безопасного развития
атомной энергетики**

**Институт теплофизики
им. С. С. Кутателадзе
Сибирского отделения РАН**

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ
И ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

В двух томах

Под редакцией
академика РАН *А. А. Саркисова*,
академика РАН *Г. А. Филиппова*

Том 2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Москва Наука 2010

УДК 621.039
ББК 31.4
Ф94

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *О. И. Мелихов*,
доктор физико-математических наук *П. Н. Вабищевич*

**Фундаментальные проблемы моделирования турбулентных и двух-
фазных течений : в 2 т. /** под. ред. акад. РАН А. А. Саркисова,
Г. А. Филиппова. — М. : Наука, 2010. — ISBN 978-5-02-037475-1

Т. 2 : Численное моделирование. — 368 с. : ил. —
ISBN 978-5-02-037477-5 (в пер.).

В книге представлены работы научных сотрудников Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН и Института теплофизики Сибирского отделения РАН, выполненные в рамках Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и проблем управления РАН «Фундаментальные процессы в многофазных и турбулентных потоках». Эти работы посвящены развитию теоретических, экспериментальных и численных методов моделирования различных турбулентных и двухфазных течений.

Для научных работников, а также аспирантов и студентов, специализирующихся в области моделирования турбулентных течений, многофазных сред и механики аэрозолей.

**Fundamental problems in modeling of turbulent and two-phase
flows : 2 vol. /** Ed. by A. A. Sarkisov and G. A. Filippov. — Mos-
cow : Nauka, 2010. — ISBN 978-5-02-037475-1

Vol. 2 : Numerical Modeling. — 368 p. : ill. —
ISBN 978-5-02-037477-5 (bound).

The book presents the results of investigations obtained at the Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences and the Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. These works were performed under the Program of Basis Research of the Energy, Engineering Industry, Mechanics and Management Problems. The investigations are aimed at development of theoretical, experimental, and numerical methods of modeling of various turbulent and two-phase flows.

The assumed target for specialists and students in the field of modeling of turbulent flows, multiphase media and aerosol mechanics.



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундамен-
тальных исследований по проекту № 10-08-07032.

ISBN 978-5-02-037475-1

ISBN 978-5-02-037477-5 (т. 2)

- © Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН, 2010
- © Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2010
- © Коллектив авторов, 2010
- © Редакционно-издательское оформление. Издательство «Наука», 2010

Содержание

Математическое моделирование парокапельных турбулентных потоков в трансзвуковых соплах <i>А. Р. Аветисян, Л. И. Зайчик, Г. А. Филиппов</i>	5
Надсеточное моделирование однородной изотропной турбулентности в одномерном и двумерном случаях <i>В. М. Головизнин, С. А. Карabasов, И. А. Короткин, О. С. Сорокикова</i>	60
Моделирование одно- и двухфазных турбулентных течений в струях и каналах методами LES и RANS <i>Б. Б. Илюшин, Д. В. Красинский, Д. Ф. Сиковский, А. Г. Деменков, М. Ю. Хребтов</i>	138
Численное моделирование течений жидкости с подвижными границами <i>А. В. Минаков, А. А. Гаврилов, А. А. Дектерев</i>	200
Тепломассоперенос в отрывных газокапельных турбулентных потоках <i>В. И. Терехов, М. А. Пахомов</i>	260
Прямое численное моделирование пузырьковых и капельных течений с явным выделением границы раздела фаз <i>В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко</i>	306

Математическое моделирование парокапельных турбулентных потоков в трансзвуковых соплах

А. Р. Аветисян, Л. И. Зайчик, Г. А. Филиппов

1. Введение

Течения спонтанно конденсирующегося пара в трансзвуковых соплах и лопатках турбин моделируются, как правило, в газодинамическом приближении без учета эффектов вязкости, теплопроводности и турбулентности (см., например, [1—9]). Пренебрежение молекулярными эффектами вязкости и теплопроводности обусловлено большими скоростями течения, при которых молекулярные механизмы переноса импульса и тепла за исключением области вязкого подслоя действительно являются второстепенными по сравнению с турбулентными механизмами переноса. Однако турбулентность не только играет значительную роль в процессах переноса массы, импульса и энергии в пристеночных пограничных слоях, но может также оказывать существенное влияние на спонтанную конденсацию при течении переохлажденного пара.

Влияние турбулентности на процесс спонтанной конденсации обусловлено двумя механизмами: во-первых, турбулентным переносом импульса, тепла и массы, формирующим «гидродинамическую картину» течения, и, во-вторых, турбулентными флуктуациями термодинамических параметров, воздействующими непосредственно на скорость нуклеации и рост капель. В отличие от процесса горения, в котором изучению влияния турбулентных пульсаций на скорость химических реакций уже многие годы уделяется значительное внимание (например, [10; 11]), скорости гомогенных и гетерогенных фазовых переходов рассчитываются, как правило, в квазиламинарном приближении, т. е. без учета эффекта турбулентных флуктуаций. Однако вследствие возможной сильной нелинейной зависимости скоростей этих процессов от параметров окружающей среды (в первую очередь от температуры) влияние турбулентных флуктуаций может быть очень существенным. Так, в [12—18] показано, что флуктуации термодинамических параметров среды, которые могут быть обусловлены в том числе и турбулентными пульсациями, способны оказывать значительное воздействие на нуклеацию и эволюцию спектра капель в процессе конденсации.

Ключевым моментом в моделировании таких течений является расчет распределения капель по размерам вследствие фазовых переходов, коагуляции, дробления и других процессов. Эволюция спектра капель во времени и в пространстве описывается кинетическим уравнением для функции плотности вероятности (ФПВ) распределения по размерам (массам). Непосредственное решение кинетического уравнения в фазовом пространстве, по-видимому, имеет смысл только для относительно простых модельных задач с целью апробации приближенных методов, разрабатываемых для расчета гидродинамически сложных течений. В настоящей работе для моделирования эволюции спектра капель по размерам привлекаются три разных метода. Все три рассматриваемых метода описания полидисперсности (распределения капель по размерам) органично сочетаются с эйлеровым континуальным моделированием движения и тепломассопереноса двухфазной среды.

Статья посвящена представлению и развитию методов моделирования трансзвуковых течений спонтанно конденсирующегося влажного пара. Особое внимание уделяется двум аспектам: анализу влияния турбулентности на процесс спонтанной конденсации и моделированию эволюции спектра капель. Кроме того, исследуется влияние поверхностно-активных веществ (ПАВ) на течение спонтанно конденсирующегося пара в соплах Лаваля.

2. Теоретическая формулировка

2.1. Уравнения движения и энергии двухфазной парокапельной среды

Рассматриваются турбулентные двухфазные парокапельные течения с большими околосзвуковыми скоростями и мелкодисперсной влагой, образующейся в результате спонтанной конденсации переохлажденного пара. Массовая концентрация капель в потоке предполагается достаточно малой ($M/\rho < 0,1$), а их среднемассовый диаметр $d \leq 1$ мкм. Вследствие малого размера капель и больших скоростей потока течение двухфазной среды можно описывать уравнениями сохранения массы, количества движения и энергии для потока в целом только с учетом турбулентных механизмов переноса импульса и тепла, так как эффекты молекулярной вязкости и теплопроводности пренебрежимо малы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho W_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho W_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho W_i W_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho W_i H}{\partial x_i} = -\frac{\partial C_p \rho \langle u'_i t'_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial \tau} + W_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho \varepsilon. \quad (3)$$

Здесь $\rho = (1 - \Phi)\rho_g + \Phi\rho_\ell \approx \rho_g + M$ — плотность двухфазной парокпельной среды; ρ_g, ρ_ℓ — плотности газовой и жидкой фаз; $M = \Phi\rho_\ell$ — масса жидкой фазы в единице объема; Φ — объемная концентрация жидкой фазы; W_i, H, C_p — скорость, энтальпия и теплоемкость двухфазной среды; P — давление пара; ε — скорость диссипации турбулентной энергии.

2.2. Скорость нуклеации и ее осреднение

Скорость зародышеобразования (нуклеации) в результате спонтанной конденсации пара рассчитывается на основе классической теории Фолмера — Френкеля — Зельдовича

$$I = \left(\frac{N_A}{M_{\text{mol}}} \right)^{3/2} \frac{\rho_g^2}{\rho_\ell} \left(\frac{2\sigma}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{4\pi\sigma r_*^2}{3k_B T} \right), \quad (4)$$

где N_A — число Авогадро; M_{mol} — молекулярная масса; σ — коэффициент поверхностного натяжения; k_B — постоянная Больцмана; T — температура пара.

Критический радиус зародышеобразования в (4) определяется формулой Кельвина

$$r_* = \frac{2\sigma}{\rho_\ell R T \ln S}, \quad (5)$$

где R — газовая постоянная; $S \equiv P/P_s$ — степень пересыщения; P_s — давление насыщения на плоской поверхности (при $r = \infty$), соответствующее температуре пара T .

Роль пульсаций давления существенна только при больших гиперзвуковых скоростях и вблизи критической точки состояния. Поэтому ограничимся анализом влияния флуктуаций температуры на скорость нуклеации. Осредненная по ансамблю турбулентных реализаций температуры скорость нуклеации выражается как

$$\langle I \rangle = \int_0^{T_s} I(T)P(T)dT, \quad (6)$$

где T_s — температура насыщения на плоской поверхности (при $r = \infty$), соответствующая давлению пара P ; $P(T)$ — функция плотности вероятности распределения температуры в турбулентном потоке.

ФПВ в (6) будем предполагать гауссовой, тем самым исключая из проводимого анализа явление перемежаемости [10; 19—21]. Следует отметить, что результаты экспериментов и прямых численных расчетов свидетельствуют, что даже изотропная турбулентность не является гауссовой и «хвосты» ФПВ заметно отличаются от нормального распределения [10; 19—21]. Однако статистические аргументы, основанные на центральной предельной теореме, позволяют заключить, что «ядро» ФПВ, где сосредоточена большая часть энергии турбулентности, при больших числах Рейнольдса должно быть близким к нормальному распределению. В частности, экспериментальные данные [22; 23] показывают, что по крайней мере в однородном сдвиговом потоке скорость и температура распределены по нормальному закону. Таким образом, в безразмерных переменных $\Theta = T/T_s$ на интервале $0 < \Theta < 1$ ФПВ температуры представляется в виде

$$P(\Theta) = \frac{2 \exp \left[-\frac{(\Theta - \langle \Theta \rangle)^2}{2\langle \Theta'^2 \rangle} \right]}{\left(2\pi\langle \Theta'^2 \rangle \right)^{1/2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{1 - \langle \Theta \rangle}{\left(2\langle \Theta'^2 \rangle \right)^{1/2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\langle \Theta \rangle}{\left(2\langle \Theta'^2 \rangle \right)^{1/2}} \right) \right]}, \quad \int_0^1 P(\Theta)d\Theta = 1. \quad (7)$$

С учетом выражения (5) для критического зародыша и формул Клапейрона—Менделеева для плотности пара и Клапейрона—Клаузиуса для давления насыщения скорость нуклеации (4) представляется в виде

$$I = Af(\Theta)\exp[-Bg(\Theta)], \quad (8)$$

$$A = \left(\frac{N_A}{M_{mol}} \right)^{3/2} \left(\frac{P}{RT_s} \right)^2 \left(\frac{2\sigma_0}{\pi} \right)^{1/2}, \quad B = \frac{16\pi\sigma_0^3}{3k_B\rho_{l0}^2 T_s (\Delta H)^2},$$

$$f(\Theta) = \frac{\bar{\sigma}^{-1/2}}{\bar{\rho}_l \Theta^2}, \quad g(\Theta) = \frac{\bar{\sigma}^3}{\bar{\rho}_l^2 \Theta (1 - \Theta)^2},$$

где ΔH — скрытая теплота парообразования; $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_0$; $\bar{\rho}_l = \rho_l / \rho_{l0}$, а коэффициент поверхностного натяжения σ_0 и плотность жидкости ρ_{l0} определяются по температуре насыщения T_s . В (5) A и B считаются величинами, не зависящими от пульсаций температуры. Очевидно, что функция $I(\Theta)$ имеет максимум на интервале $0 < \Theta < 1$.

В безразмерных переменных осредненная скорость нуклеации записывается как

$$\langle I \rangle = \int_0^1 I(\Theta) P(\Theta) d\Theta = A \int_0^1 f(\Theta) \exp[-Bg(\Theta)] P(\Theta) d\Theta. \quad (9)$$

Если ФПВ в (9) определяется согласно (7), то величина $\langle I \rangle$ может быть найдена либо путем численного интегрирования, либо при помощи приближенного аналитического интегрирования. Так, в [18] с учетом того обстоятельства, что функция $I(\Theta)$ имеет максимум, предлагается для вычисления интеграла в (9) использовать асимптотический метод Лапласа. Такой подход дает [18]:

$$\langle I \rangle = Af(\Theta_m) \left[\frac{2\pi}{g''(\Theta_m)} \right]^{1/2} \exp[-Bg(\Theta_m)] P(\Theta_m), \quad (10)$$

где Θ_m — безразмерная температура, соответствующая максимуму функции $g(\Theta)$; $g''(\Theta_m)$ — вторая производная в точке максимума. Очевидно, что асимптотическое выражение (10) справедливо только при условии, что функция $I(\Theta)$ имеет существенно более острый максимум, чем $P(\Theta)$, т. е. $P(\Theta)$ может считаться пологой по сравнению с $I(\Theta)$.

Другой способ приближенного вычисления интеграла в (9) может быть основан на аппроксимации ФПВ $P(\Theta)$. Для этого заменим (7) кусочно-равномерным распределением:

$$P(\Theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \Theta < \langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}, \\ (2\langle \Theta'^2 \rangle)^{-1/2} & \text{при } \langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2} \leq \Theta \leq \langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}, \\ 0 & \text{при } \langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2} < \Theta \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

С учетом (11) выражение (9) примет вид

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2\langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}} \int_{\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}}^{\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}} I(\Theta) d\Theta. \quad (12)$$

Выполняя интегрирование в (12) разными приближенными способами, можно получить различные аппроксимации $\langle I \rangle$. Так, метод одного прямоугольника дает

$$\int_{\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}}^{\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}} I(\Theta) d\Theta = 2\langle \Theta'^2 \rangle^{1/2} I(\langle \Theta \rangle),$$

и, следовательно,

$$\langle I(\Theta) \rangle = I(\langle \Theta \rangle). \quad (13)$$

Формула (13) представляет собой квазиламинарную скорость нуклеации, вычисляемую по средней температуре без учета турбулентных флуктуаций, и следует из (9), если ФПВ полагается равной дельта-функции $P(\Theta) = \delta(\Theta - \langle \Theta \rangle)$.

Метод двух прямоугольников дает

$$\int_{\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}}^{\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}} I(\Theta) d\Theta = \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2} \left[I(\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) + I(\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) \right],$$

и (12) примет вид

$$\langle I(\Theta) \rangle = \frac{1}{2} \left[I(\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) + I(\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) \right]. \quad (14)$$

Формула (14) непосредственно следует из (9), если ФПВ представляется в виде суммы двух дельта-функций (так называемое телеграфное распределение):

$$P(\Theta) = \frac{1}{2} \left[\delta(\Theta - \langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) + \delta(\Theta - \langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) \right]. \quad (15)$$

Распределение (15) использовалось ранее при расчете скоростей диффузионного горения [24; 25] и нуклеации [13].

Используя метод трапеций, получаем

$$\int_{\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}}^{\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}} I(\Theta) d\Theta = \frac{\langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}}{2} \left[I(\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) + 2I(\langle \Theta \rangle) + I(\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) \right],$$

и, следовательно, (12) представляется в виде

$$\langle I(\Theta) \rangle = \frac{1}{4} \left[I(\langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) + 2I(\langle \Theta \rangle) + I(\langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) \right]. \quad (16)$$

Очевидно, что (16) непосредственно следует из (9), если ФПВ представляется в виде суммы трех дельта-функций:

$$P(\Theta) = \frac{1}{4} \left[\delta(\Theta - \langle \Theta \rangle + \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) + 2\delta(\Theta - \langle \Theta \rangle) + \delta(\Theta - \langle \Theta \rangle - \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}) \right].$$

На рис. 1—3 показано сравнение аналитических зависимостей безразмерной осредненной скорости нуклеации $\langle I \rangle / A$ от средней температуры $\langle \Theta \rangle$ согласно (10), (13), (14) и (16) с соответствующей зависимостью, полученной путем численного интегрирования (9) с учетом (7). Для упрощения анализа положено $\bar{\sigma} = \bar{\rho}_l = 1$ (в этом случае $\Theta_m = 1/3$). Это упрощение не является принципиальным и не меняет сделанных выводов. Отклонение от полученных численным интегрированием кривых 1 на рис. 1—3 показывает точность приближенных аналитических зависимостей.

Из рисунков видно, что наихудшей является предложенная в [18] зависимость (10). Это подтверждает высказанное выше утверждение, что асимптотическая формула (10) может быть использована для определения осредненной скорости нуклеации только при выполнении условия $B \gg \langle \Theta \rangle / \langle \Theta'^2 \rangle^{1/2}$. Наилучшей из представленных аналитических зависимостей является (14), используемая ранее для расчета осредненной скорости нуклеации в [13]. Интересно, что формула (14), соответствующая аппроксимации ФПВ в виде двух дельта-функций, более точна по сравнению с (16), которая соответствует более сложной аппроксимации ФПВ в виде трех дельта-функций.

Из сравнения результатов численного интегрирования можно сделать вывод, что для определения осредненной скорости нуклеации при спонтанной конденсации переохлажденного пара целесообразно использовать аналитическую зависимость, соответствующую ФПВ в виде телеграфного распределения. Однако следует отметить, что подход, основанный на осреднении скорости нуклеации (так же как и горения) с использованием заданной ФПВ, справедлив для условий, близких к статистически равновесным, когда масштабы турбулентных пульсаций много меньше характерных масштабов фазовых превращений (или химических реакций). Поэтому такой подход может приводить к определенной погрешности в области скачка конденсации (или фронта пламени).

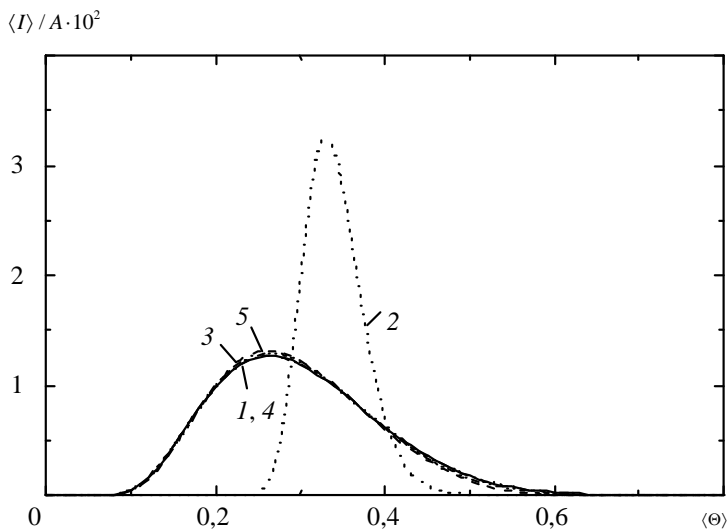


Рис. 1. Зависимость безразмерной осредненной скорости нуклеации от средней температуры для $B = 1$ и $\langle \Theta'^2 \rangle^{1/2} / \langle \Theta \rangle = 0,1$:
1 — (9) с учетом (7), 2 — (10), 3 — (13), 4 — (14), 5 — (16)

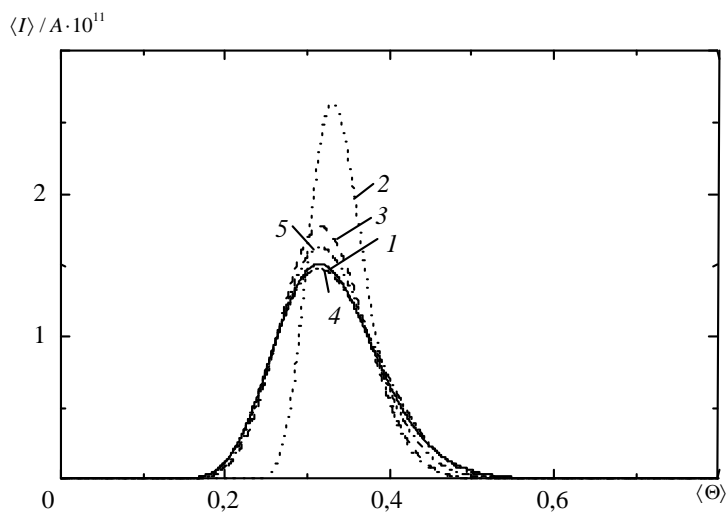


Рис. 2. Зависимость безразмерной осредненной скорости нуклеации от средней температуры для $B = 4$ и $\langle \Theta'^2 \rangle^{1/2} / \langle \Theta \rangle = 0,1$.
Кривые 1—5 соответствуют рис. 1

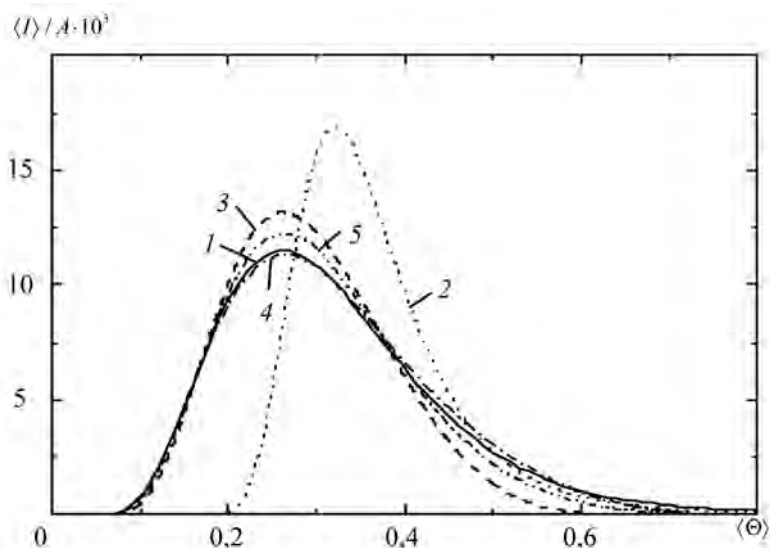


Рис. 3. Зависимость безразмерной осредненной скорости нуклеации от средней температуры для $B = 4$ и $\langle \Theta^2 \rangle^{1/2} / \langle \Theta \rangle = 0,2$.
Кривые 1—5 соответствуют рис. 1

2.3. Скорость конденсации или испарения

Скорость гетерогенных фазовых переходов зависит от размера капли (числа Кнудсена). Так, конденсация или испарение очень мелких капель при больших числах Кнудсена происходит в свободномолекулярном режиме и рассчитывается согласно кинетической модели Герца—Кнудсена

$$J = J_K = \frac{4\pi r^2 P}{\sqrt{2\pi RT}} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{\theta}} \right), \quad (17)$$

где температура капли θ определяется из условия равенства давления насыщенного пара у ее искривленной поверхности давлению в окружающем потоке. Отсюда следует, что

$$\theta = T_s - (T_s - T) \frac{r_*}{r},$$

где T_s — температура насыщения на плоской поверхности (при $r = \infty$), соответствующая давлению пара P . Коэффициенты конденсации и испа-

рения, обычно вводимые в кинетическую модель (17), в данной работе приняты равными единице.

Скорость фазовых переходов для случая относительно крупных капель при малых числах Кнудсена лимитируется отводом теплоты парообразования при конденсации и подводом ее при испарении. В соответствии с этим скорость фазовых переходов определяется термическим сопротивлением между поверхностью капли и окружающей средой

$$J = J_T = \frac{4\pi r \lambda_g (\theta - T)}{L}, \quad (18)$$

где λ_g — коэффициент теплопроводности в газовой фазе; L — скрытая теплота парообразования.

Для определения скорости конденсации/испарения во всем диапазоне изменения числа Кнудсена используется интерполяционная зависимость, объединяющая формулы (17) и (18):

$$J = \frac{J_K J_T}{J_K + J_T}. \quad (19)$$

В литературе хорошо известны другие аналитические зависимости для описания скорости конденсации пара или испарения капель в переходном режиме, полученные в результате шивки или путем интерполяции формул для свободномолекулярного (кинетического) и континуального режимов. Так, для расчета конденсационного роста или испарения капель в парогазовой среде широкое распространение получила формула Фукса [26], описывающая переход от свободномолекулярного режима к диффузионному при уменьшении числа Кнудсена. Однако для определения скорости конденсации (испарения) капель в чистом (однокомпонентном) паре наиболее подходящей, по нашему мнению, является формула (19). В силу существенно меньшей нелинейности зависимости (19) от температуры по сравнению со скоростью нуклеации (4) скорость гетерогенных фазовых переходов определяется по средней температуре в квалиминарном приближении.

2.4. Коагуляция аэрозольных частиц

В природных и промышленных условиях существует целый ряд механизмов, ответственных за столкновения и коагуляцию аэрозольных частиц и капель. В случае двухфазных потоков с мелкими каплями можно ограничиться рассмотрением броуновской (тепловой) коагуляции, которая может протекать в свободномолекулярном, континуальном и промежуточном режимах, а также турбулентной коагуляции в пределе безынерционных

частиц. В [27; 28] получена следующая формула для броуновско-турбулентного ядра коагуляции мелких аэрозольных частиц или капель:

$$\beta_{BT} = \eta \left(\frac{8\pi\varepsilon}{v} \right)^{1/2} r_{12}^2 \left(\frac{r_{12}^2}{15} + \frac{k_B T \tau_k^2}{m_{12}} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{r_{12} f(\lambda_0)}{(2\pi)^{1/2} D_B^r} \left(\frac{r_{12}^2}{15\tau_k^2} + \frac{k_B T}{m_{12}} \right)^{1/2} \right]^{-1}, \quad (20)$$

$$f(\lambda_0) = 1 - \frac{\pi\lambda_0}{2} + \lambda_0 \tan^{-1} \lambda_0, \quad \lambda_0 = r_{12} \left(\frac{A_\sigma}{15D_B^r \tau_k} \right)^{1/2},$$

$$m_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad D_B^r \equiv k_B T \left(\frac{\tau_1}{m_1} + \frac{\tau_2}{m_2} \right),$$

где $r_{12} \equiv r_1 + r_2$ — эффективный радиус столкновений; r_p — радиус частиц группы p ($p=1, 2$); $\tau_k \equiv (v_g / \varepsilon)^{1/2}$ — колмогоровские пространственный и временной микромасштабы; v_g — коэффициент кинематической вязкости пара; m_{12} — эффективная масса сталкивающихся частиц; m_p — масса частицы группы p ; D_B^r — коэффициент относительной броуновской диффузии двух частиц; η — коэффициент эффективности столкновений; $A_\sigma = \sqrt{5}$.

Время динамической релаксации небольшой капли определяется соотношением

$$\tau_p = \tau_{p0} \left\{ 1 + \text{Kn} \left[A_1 + A_2 \exp\left(-\frac{A_3}{\text{Kn}}\right) \right] \right\}, \quad \tau_{p0} = \frac{2\rho_l r_p^2}{9\rho_g v_g}, \quad (21)$$

где τ_{p0} — стоксово время релаксации частицы; $\text{Kn} \equiv l / r$ — число Кнудсена; $l \equiv 2v_g / u_t$ — длина свободного пробега молекул в паре; $u_t \equiv (8RT / \pi)^{1/2}$ — средняя скорость теплового движения молекул. Значения постоянных в (21) согласно [29] равны: $A_1 = 1,20$, $A_2 = 0,41$, $A_3 = 0,88$.

Функция $f(\lambda_0)$ характеризует отношение между турбулентным и броуновским механизмами коагуляции [30; 31]. При пренебрежении влиянием турбулентности ($\lambda_0 \rightarrow 0$) из (20) следует

$$\beta_B = \frac{\beta_{B,Kn \rightarrow \infty} \beta_{B,Kn \rightarrow 0}}{\beta_{B,Kn \rightarrow \infty} + \beta_{B,Kn \rightarrow 0}}, \quad \beta_{B,Kn \rightarrow \infty} = \left(\frac{8\pi k_B T}{m_{12}} \right)^{1/2} r_{12}^2, \quad \beta_{B,Kn \rightarrow 0} = 4\pi r_{12} D_B^r. \quad (22)$$

Зависимость (22) представляет собой известную аппроксимацию (например, [32]) для ядра броуновской коагуляции. Она используется во всем диапазоне изменения размеров частиц — от свободномолекулярного режима (при больших числах Кнудсена), характерного для очень мелких частиц, до континуального режима (при малых числах Кнудсена), реализуемого для относительно крупных аэрозолей.

Когда вкладом броуновской диффузии можно пренебречь ($\lambda_0 \rightarrow \infty$), из (20) следует

$$\beta_T = \left(\frac{8\pi \varepsilon}{15\nu_g} \right)^{1/2} r_{12}^3 \left[1 + \frac{1}{A_\sigma} \left(\frac{5}{6\pi} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (23)$$

Ядро коагуляции (23) при $A_\sigma = 2,3$ составляет 0,817 от известного ядра столкновений безынерционных частиц Сэфмена—Тернера [33], что оказывается близким к значению 0,83, полученному путем прямого численного моделирования в [34; 35].

На рис. 4 показаны зависимости от радиуса частиц броуновского, турбулентного и полного ядер коагуляции при $\eta = 1$. Видно немонотонное изменение полного ядра коагуляции в зависимости от размера частиц, что обусловлено наличием максимума в зависимости броуновского ядра коагуляции от радиуса частиц в зоне перехода от свободномолекулярного режима к континуальному.

На рис. 4 также показано сравнение зависимости (20) с часто используемыми в литературе линейной и квадратичной интерполяционными зависимостями

$$\beta = \beta_B + \beta_T, \quad (24)$$

$$\beta = \left[(\beta_B)^2 + (\beta_T)^2 \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Как видно из рис. 4, интерполяционные формулы, в особенности (25), дают заметные отличия от решения (20) в области перехода от броуновского континуального режима к турбулентному.

Коэффициент эффективности столкновений в (20), как показано в [36; 37] для броуновского и турбулентного механизмов коагуляции, может быть принят равным 0,7.

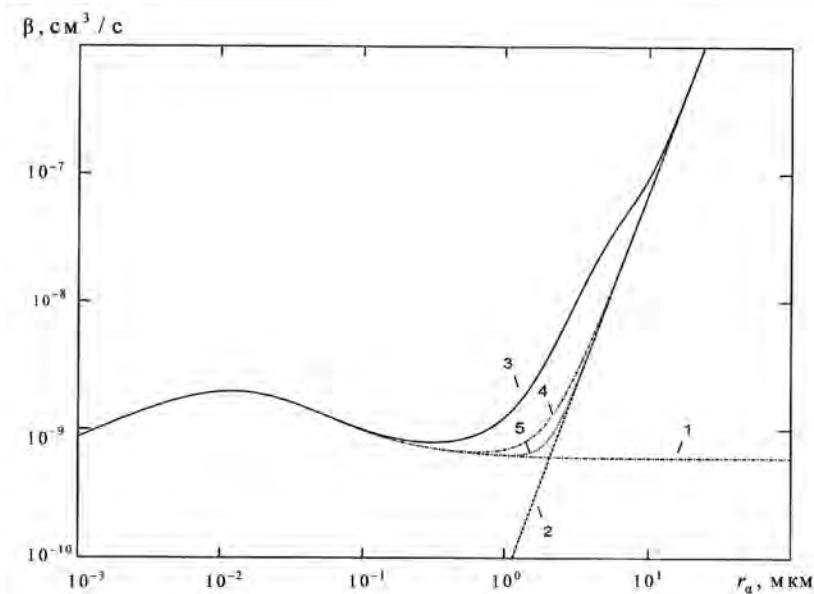


Рис. 4. Зависимость ядра коагуляции от размера частиц:
 1 — (22), 2 — (23), 3 — (20), 4 — (24), 5 — (25)

2.5. Эволюция спектра капель по размерам

Эволюция спектра капель по размерам в результате нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции описывается кинетическим уравнением для функции плотности вероятности распределения по размерам (массам):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m}{\partial \tau} + \frac{\partial V_i P_m}{\partial x_i} + \frac{\partial J P_m}{\partial m} = I \delta(m - m_*) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^m \int_0^m \beta(m_1, m_2) P_m(m_1) P_m(m_2) \delta(m - m_1 - m_2) dm_1 dm_2 - \\ - P_m(m) \int_0^\infty \beta(m, m_1) P_m(m_1) dm_1, \end{aligned} \quad (26)$$

где m — масса капель; m_* — критическая масса зародышеобразователя. Здесь первый и второй члены в левой части описывают изменение ФПВ распределения капель во времени и конвекцию в пространстве. Последний член в левой части уравнения и первый член в правой его части опре-

деляют соответственно эволюцию спектра капель в результате гетерогенных и гомогенных фазовых переходов. Последние два члена в правой части характеризуют образование капель массы m из более мелких и исчезновение их за счет слияния с другими [38; 39]. Скорость мелкодисперсной влаги V_i принимается равной среднемассовой скорости двухфазной среды W_i . Как уже упоминалось, для решения уравнения (26) используются три метода.

Первый метод (метод моментов) основан на использовании уравнений для моментов ФПВ [40; 41]. Он требует относительно небольших вычислительных затрат, поскольку использует в расчетах только уравнения для нескольких первых моментов (в данной статье привлекаются уравнения для четырех моментов). В то же время область применения первого метода ограничена случаем очень мелких капель, скорости и температуры которых незначительно отличаются от соответствующих характеристик газовой фазы.

Второй подход к описанию полидисперсных течений — метод фракций [6; 42]). Он основан на разделении спектра капель на ряд фракций с фиксированными границами и предположении о возможности обмена каплями между разными фракциями в результате фазовых переходов, коагуляции, фрагментации и т. д. В рамках этого метода ФПВ аппроксимируется кусочно-равновероятным распределением, и задача описания спектра капель сводится к решению уравнений для массовых концентраций отдельных фракций. Метод фракций является существенно более универсальным по сравнению с методом моментов, так как может использоваться для построения многоскоростного и многотемпературного континуального описания полидисперсной среды. Однако в случае моделирования течений со спонтанной конденсацией или при существенной роли коагуляции необходимо введение очень большого числа фракций для корректного моделирования формирования и роста капель. Поэтому для таких течений метод фракций становится слишком громоздким, поскольку требует оперирования с несколькими десятками (а то и сотнями) фракций. Аналогичные выводы делаются в [43], где лагранжев метод групп (фракций) применялся к расчету течений влажного пара со спонтанной конденсацией, а также в [44; 45], где сеточный метод, который близок к методу фракций, применялся к расчету коагулирующих систем при больших промежутках времени.

В [7; 44; 46] были предложены эквивалентные методы моделирования эволюции спектра частиц, базирующиеся на аппроксимации непрерывного распределения в виде суммы дельта-функций. Следует отметить, что обычно аппроксимация непрерывного спектра дельта-функциями, т. е. представление полидисперсной системы частиц в виде суммы монодисперсных групп, используется в рамках лагранжева подхода, когда уравнения движения и теплопереноса для дисперсной фазы интегрируются вдоль

отдельных траекторий частиц. Методы [7; 44; 46] приспособлены к эйлерову континуальному подходу к моделированию двухфазных течений.

Умножая (26) на m^k и интегрируя по всему спектру капель, получаем систему уравнений для моментов ФПВ:

$$L_k = \int_0^{\infty} m^k P_m dm, \quad \frac{\partial L_k}{\partial \tau} + \frac{\partial V_i L_k}{\partial x_i} = Im_*^k + k \int_0^{\infty} m^{k-1} J P_m(m) dm + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [(m_1 + m_2)^k - m_1^k - m_2^k] \beta(m_1, m_2) P_m(m_1) P_m(m_2) dm_1 dm_2. \quad (27)$$

В свободномолекулярном режиме конденсации/испарения, когда скорость фазовых переходов согласно (17) при $r \gg r_c$ определяется соотношением $J = am^{2/3}$, где $a = \text{const}$, и при незначительной роли коагуляции в качестве характерных моментов, описывающих распределение капель по размерам (массам), целесообразно выбрать $L_{n/3}$ при $n = 0, 1, 2, 3$ [40; 41]. В этом случае система уравнений (27) становится замкнутой и, следовательно, могут быть найдены все представляющие интерес моменты ФПВ. В общем случае, когда скорость фазовых переходов характеризуется выражением (19) и существенна роль коагуляции, для замыкания (27) нужно использовать какую-либо аппроксимацию ФПВ $P_m(m)$.

Метод фракций предполагает осреднение параметров каждой γ -фракции капель в пределах изменения массы $m \in [m_{\gamma-1}, m_{\gamma}]$ или радиуса $r \in [r_{\gamma-1}, r_{\gamma}]$. Будем аппроксимировать ФПВ кусочно-равновероятным распределением капель по массе

$$P_{m,\gamma}(m_{\gamma-1} < m \leq m_{\gamma}) = \frac{2Z_{\gamma}}{m_{\gamma}^2 - m_{\gamma-1}^2}. \quad Z_{\gamma} = \int_{m_{\gamma-1}}^{m_{\gamma}} m P_m dm. \quad (28)$$

В результате интегрирования кинетического уравнения (26), умноженного на m , в пределах интервала $[m_{\gamma-1}, m_{\gamma}]$ с учетом аппроксимации (28) получается следующая система уравнений для массы γ -фракций капель в единице объема [6; 42]:

$$\frac{\partial Z_{\gamma}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_i Z_{\gamma}}{\partial x_i} = \kappa_0 \delta_{i\gamma} + \chi_{\gamma} + \omega_{\gamma}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, \Gamma. \quad (29)$$

Члены в правой части (29) соответственно определяют скорости изменения массы каплей γ -фракции вследствие нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции. Так, интенсивность образования жидкой фазы в результате гомогенной конденсации, представленная в (29) при условии, что масса зародышей не превышает граничного значения массы первой фракции, равна

$$\kappa_0 = m_* I, \quad m_* = \frac{4\pi}{3} \rho_l r_*^3. \quad (30)$$

Интенсивность конденсации/испарения в (18) определяется соотношением

$$\chi_\gamma = \frac{J(\bar{m}_\gamma) Z_\gamma}{\bar{m}_\gamma} + m_{\gamma-1} J(m_{\gamma-1}) \times \begin{cases} P_{m,\gamma-1}, & J > 0 \\ P_{m,\gamma}, & J < 0 \end{cases} - m_\gamma J(m_\gamma) \times \begin{cases} P_{m,\gamma}, & J > 0 \\ P_{m,\gamma+1}, & J < 0 \end{cases}, \quad (31)$$

$$\bar{m}_\gamma = \frac{m_{\gamma-1} + m_\gamma}{2}.$$

Источниковый член в (29), описывающий коагуляцию, представляется в виде

$$\omega_\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\gamma_1=1}^{\gamma} \sum_{\gamma_2=1}^{\gamma} \alpha_{\gamma_1\gamma_2} A_{\gamma_1\gamma_2} Z_{\gamma_1} Z_{\gamma_2} - Z_\gamma \sum_{\gamma_1=1}^{\gamma} B_{\gamma\gamma_1} Z_{\gamma_1}, \quad (32)$$

$$A_{\gamma_1\gamma_2} = \frac{\bar{m}_\gamma}{\bar{m}_{\gamma_1} \bar{m}_{\gamma_2}} \beta(\bar{m}_{\gamma_1}, \bar{m}_{\gamma_2}), \quad B_{\gamma\gamma_1} = \frac{\beta(\bar{m}_\gamma, \bar{m}_{\gamma_1})}{\bar{m}_{\gamma_1}},$$

$$\alpha_{\gamma_1\gamma_2} = \frac{2}{(m_{\gamma-1} + m_\gamma)(m_{\gamma_1} - m_{\gamma_1-1})(m_{\gamma_2} - m_{\gamma_2-1})} \int_{m_{\gamma_1-1}}^{m_{\gamma_1}} \int_{m_{\gamma_2-1}}^{m_{\gamma_2}} \varphi(m_1, m_2) dm_1 dm_2,$$

$$\varphi(m_1, m_2) = \begin{cases} m_1 + m_2, & \text{при } m_1 + m_2 \in [m_{\gamma-1}, m_\gamma], \\ 0, & \text{при } m_1 + m_2 \notin [m_{\gamma-1}, m_\gamma]. \end{cases}$$

Число и масса всех каплей в единице объема согласно (17) определяются соотношениями

$$N = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \frac{Z_\gamma}{\bar{m}_\gamma}, \quad M = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} Z_\gamma.$$

В рамках метода дельта-аппроксимации [7] полидисперсный ансамбль капель моделируется системой монодисперсных групп, для чего непрерывная ФПВ аппроксимируется в виде суммы дельта-функций:

$$P_m = \sum_{\alpha=1}^A N_{\alpha} \delta(m - \bar{m}_{\alpha}), \quad (33)$$

где N_{α} — числовая концентрация капель α -группы (число капель в единице объема); \bar{m}_{α} — средняя масса капель α -группы, определяемая как отношение массы капель α -группы M_{α} к их числовой концентрации N_{α} ,

$$\bar{m}_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}. \quad (34)$$

Для нахождения N_{α} и M_{α} привлечем уравнения для моментов ФПВ, следующие из кинетического уравнения (26):

$$L_{\gamma k} = \int_{m_{\gamma}^0}^{m_{\gamma+1}^0} m^k P_m(m) dm, \quad \frac{\partial L_{\alpha k}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_i L_{\alpha k}}{\partial x_i} = I m_{\alpha}^k \delta_{1\alpha} + k \int_{m_{\alpha}^0}^{m_{\alpha+1}^0} m^{k-1} J(m) P_m(m) dm + \\ + \frac{1}{2} \int_{m_{\alpha}^0}^{m_{\alpha+1}^0} \int_0^{\infty} \left[(m_1 + m_2)^k - m_1^k - m_2^k \right] \beta(m_1, m_2) P_m(m_1) P_m(m_2) dm_1 dm_2. \quad (35)$$

Здесь m_{α}^0 — некоторое значение массы, заключенное между $\bar{m}_{\alpha-1}$ и \bar{m}_{α} . Кроме того, предполагается, что образующиеся в результате нуклеации капли относятся к первой группе. Уравнения для N_{α} и M_{α} следуют из (35) с учетом (33) соответственно при $k=0$ и $k=1$:

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_i N_{\alpha}}{\partial x_i} = I \delta_{1\alpha} - \frac{N_{\alpha}}{2} \sum_{\alpha_1=1}^A \beta(\bar{m}_{\alpha}, \bar{m}_{\alpha_1}) N_{\alpha_1}, \\ \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_i M_{\alpha}}{\partial x_i} = I \bar{m}_{\alpha} \delta_{1\alpha} + J(\bar{m}_{\alpha}) N_{\alpha}. \quad (36)$$

Число и масса всех капель в единице объема согласно (33) и (34) определяются соотношениями

$$N = \sum_{\alpha=1}^A N_{\alpha}, \quad M = \sum_{\alpha=1}^A M_{\alpha}.$$

Как видно из (36), имеет место расщепление решения по физическим процессам вследствие того, что при гетерогенных фазовых переходах сохраняется число частиц, а при коагуляции — их масса. Таким образом, задача моделирования эволюции спектра полидисперсного ансамбля частиц сводится к решению системы уравнений для числовых и массовых концентраций взаимодействующих (благодаря коагуляции) групп монодисперсных частиц. Начальные условия для уравнений (36) могут быть получены из требования, чтобы аппроксимация (36) обеспечивала точные значения нескольких моментов заданной начальной ФПВ.

Отметим, что в ряде случаев метод дельта-аппроксимации может давать точные решения для интегральных характеристик N и M . Так, если нуклеация отсутствует, а скорость конденсации/испарения и ядро коагуляции описываются соотношениями $J(m) = J_0 + J_1 m$ и $\beta(m_1, m_2) = \beta_0 + \beta_1(m_1 + m_2) + \beta_2 m_1 m_2$, где $J_0, J_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2 = \text{const}$, точные значения для N и M могут быть получены даже при использовании одной группы капель, т. е. при $A = 1$. В другом случае, когда нуклеация и коагуляция отсутствуют, а скорость конденсации/испарения имеет вид $J = am^{2/3}$, где $a = \text{const}$, можно получить точное решение для M с помощью двух групп капель, т. е. при $A = 2$, если (22) удовлетворяет начальным значениям для четырех моментов $L_{n/3}$ при $n = 0, 1, 2, 3$.

Для верификации развиваемого метода проведем сравнение с результатами решения кинетического уравнения для ФПВ, полученными другими методами для двух модельных задач. Вначале рассмотрим случай без нуклеации, когда скорость конденсации и ядро коагуляции имеют вид

$$J = m^{2/3}, \quad \beta = 2, \quad (37)$$

а начальное распределение капель по массам задается в виде параболы:

$$P_{m0} = \frac{3m}{2} - \frac{3m^2}{4}, \quad N(0) = M(0) = 1. \quad (38)$$

На рис. 5 показано изменение во времени числовых и массовых концентраций капель, рассчитанных методами дельта-аппроксимации и фракций. Кривые 1, 2, 3 соответствуют решениям при использовании одной, двух и четырех дельта-функций в аппроксимации (33), т. е. при $A = 1, 2$ и 4. При $A = 1$ можно обеспечить только выполнение начальных условий для N и M . В случае $A = 2$ удовлетворяются начальные условия для четырех моментов $L_{n/3}$ при $n = 0, 1, 2, 3$, а в случае $A = 4$ обеспечивается выполнение начальных условий для восьми моментов $L_{n/3}$ при $k = 0, \dots, 7$.

Из рис. 5 следует очень быстрая сходимость метода дельта-аппроксимации — расчетные кривые для $\Lambda = 2$ и $\Lambda = 4$ практически совпадают. В методе фракций границы отдельных групп (фракций) выбираются в соответствии с законом геометрической прогрессии

$$m_\gamma = m_{\gamma-1} + m_1 s^{\gamma-1}, \quad m_0 = 0.$$

Кривыми 4 и 5 на рис. 5 представлены результаты расчетов, полученные соответственно при $m_1 = 0,3726$, $s = 1,2$ ($\Gamma = 48$) и $m_1 = 0,0845$, $s = 1,05$ ($\Gamma = 128$). Видно, что сходимость метода фракций по отношению к полной массе каплей значительно хуже по сравнению с методом дельта-аппроксимации. Таким образом, можно сделать вывод, что для достижения одинаковой точности метод фракций требует привлечения существенно большего количества групп (а соответственно и вычислительных затрат), чем метод дельта-аппроксимации.

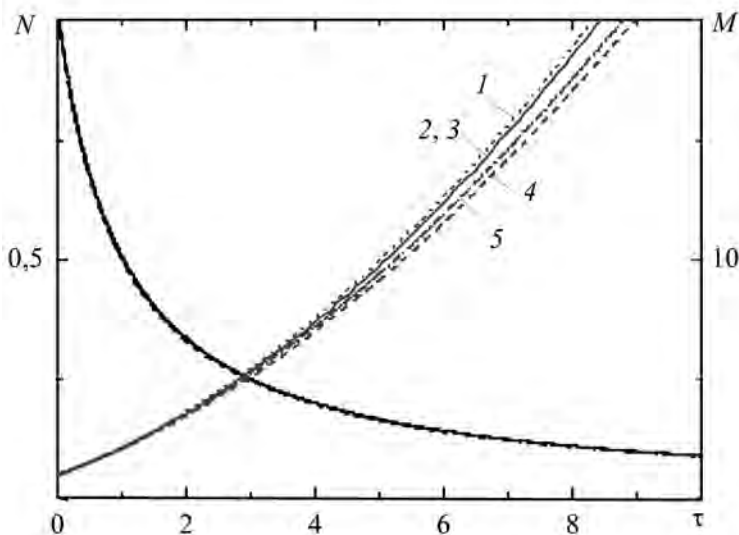


Рис. 5. Изменение во времени числовой и массовой концентраций каплей при конденсации и коагуляции в соответствии с (37), (38). 1, 2, 3 — метод дельта-аппроксимации ($\Lambda = 1, 2, 4$); 4, 5 — метод фракций ($\Gamma = 48, 128$)

Далее рассмотрим случай броуновской коагуляции в континуальном режиме, когда согласно (20) ядро коагуляции представляется в виде

$$\beta = (m_1^{1/3} + m_2^{1/3}) \left(\frac{1}{m_1^{1/3}} + \frac{1}{m_2^{1/3}} \right), \quad (39)$$

а начальный спектр капель задается логнормальным распределением с медианным параметром $m_{\text{med}} = 0,6065$:

$$P_{m0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \exp \left[-\frac{\ln^2(m/m_{\text{med}})}{2\sigma^2} \right], \quad \sigma = \left(2 \ln \frac{1}{m_{\text{med}}} \right)^{1/2},$$

$$N(0) = M(0) = 1. \quad (40)$$

На рис. 6 показаны результаты расчета во времени числовой концентрации, полученные при использовании одной, двух и четырех дельта-функций. Все кривые очень близки, а значения, получаемые при использовании четырех дельта-функций, практически совпадают с расчетами [44; 45]. В [47] было получено асимптотическое решение $N = 0.4674 / \tau$ при $\tau \rightarrow \infty$. Метод дельта-аппроксимации предсказывает асимптотическую зависимость $N = a / \tau$, где коэффициент a равняется 0,5, 0,473 и 0,471 при использовании соответственно одной, двух и четырех дельта-функций.

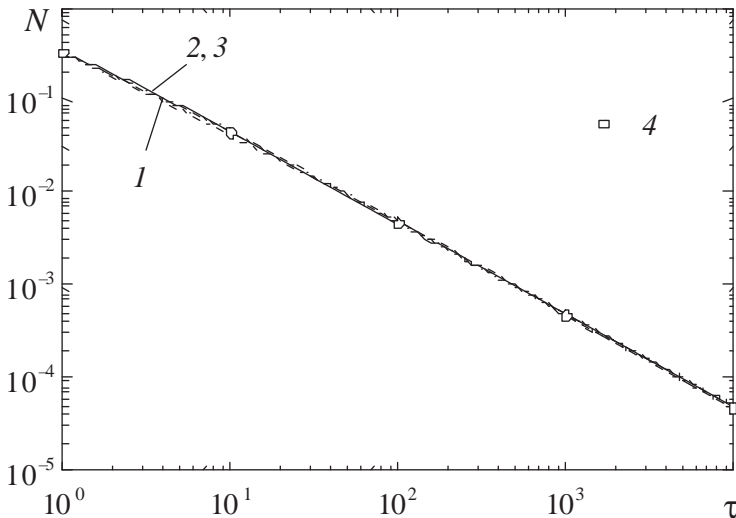


Рис. 6. Изменение во времени числовой концентрации капель при коагуляции в соответствии с (39) и (40):

1, 2, 3 — метод дельта-аппроксимации ($A = 1, 2, 4$); 4 — расчеты [44; 45]

2.6. Модель турбулентности

Турбулентные характеристики течения рассчитываются на основе так называемой k - ε -модели, включающей уравнения для энергии турбулентности и скорости ее диссипации. В рамках k - ε -модели турбулентности Рейнольдсовы напряжения и турбулентные тепловые потоки в (2) и (3) определяются градиентными соотношениями с изотропной вихревой вязкостью:

$$\langle u'_i u'_j \rangle = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_T \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial W_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad \langle u'_i t'_j \rangle = -\frac{\nu_T}{Pr_T} \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (41)$$

В рассматриваемых двухфазных потоках, характеризующихся небольшими значениями массовых концентраций и размеров дисперсной фазы, разность между среднemasсовой скоростью потока и скоростью газовой фазы незначительна. Поэтому в (41) входит скорость двухфазной среды W_i .

Уравнения для турбулентной энергии и скорости ее диссипации при высоких числах Рейнольдса представляются в виде

$$\frac{\partial \rho k}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho W_i k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho \nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \rho \Pi - \rho \varepsilon + S_k, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho W_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho \nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \rho \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} \Pi - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + S_\varepsilon, \quad (43)$$

где $\Pi \equiv -\langle u'_i u'_j \rangle \partial W_i / \partial x_j$ обозначает генерацию энергии турбулентности; S_k и S_ε — источниковые члены, обусловленные присутствием капель в потоке.

Стандартная k - ε -модель турбулентности (СМТ) замыкается при помощи следующего соотношения для вихревой вязкости [48]:

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (44)$$

Значения констант в (41)—(44) обычно принимаются следующими: $C_\mu = 0,09$, $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $Pr_T = 0,9$.

Стандартная k - ε -модель, включающая уравнения (41)—(44) при $S_k = S_\varepsilon = 0$, представляет собой наиболее распространенную модель турбулентности и вследствие простоты широко используется для расчета различных типов течений. Однако, несмотря на большую практическую по-

лезность, хорошо известны недостатки этой модели. Например, СМТ приводит к большим ошибкам при моделировании сильно неравновесных течений с большими градиентами скоростей, сильно искривленных течений, при резком расширении или сжатии потока и т. д. Строго говоря, эта модель применима только для расчета квазиравновесных течений, характеризуемых приближенным равенством генерации и диссипации турбулентности ($\Pi \approx \varepsilon$). Перечисленные причины делают СМТ непригодной для расчета спонтанно конденсирующихся течений в соплах и межлопаточных каналах турбин [49; 50]. Поэтому стандартная k - ε -модель модифицируется в двух аспектах. Во-первых, вместо стандартного выражения (44) для коэффициента турбулентной вязкости вводится функциональная зависимость ν_T от отношения генерации к диссипации турбулентной энергии Π/ε . Во-вторых, учитывается влияние капель на турбулентность.

Значительно лучшие результаты могут быть получены с помощью простой модификации стандартной k - ε -модели. Эта модификация относится только к соотношению для коэффициента вихревой вязкости (44), оставляя без изменений уравнения (42) и (43). Соотношение для коэффициента вязкости получается путем разложения системы неявных алгебраических уравнений для рейнольдсовых напряжений относительно градиента средней скорости [51; 52]. Первый член разложения дает

$$\nu_T = \frac{C_\mu}{1 + (\Pi/\varepsilon - 1)/C_1} \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (45)$$

Коэффициент турбулентной вязкости (45) зависит от отношения генерации к диссипации турбулентности Π/ε и содержит дополнительную постоянную C_1 по отношению к СМТ. Эта постоянная представляет собой константу в известной аппроксимации Ротта корреляций пульсаций давления со скоростями деформаций [53]. При $C_1 \rightarrow \infty$ или $\Pi/\varepsilon = 1$ выражение (45) переходит в (44). Минимально допустимое значение постоянной C_1 равняется единице [54]. При $C_1 = 1$ (45) принимает особенно простой вид, а именно $\nu_T = C_\mu k^2 / \Pi$. Однако, как впервые было показано в [55], константа C_1 играет существенную роль в устойчивости турбулентного течения и с целью обеспечения устойчивости должна принимать значение, превышающее (хотя и не намного [56]) единицу.

Сопоставим результаты расчета на основе стандартной и модифицированной k - ε -моделей для однородных турбулентных течений с постоянными скоростями деформации и сдвига. Сравнение выполнено при $C_1 = 1$ в

(45). Градиенты средней скорости для рассматриваемых течений определяются соотношениями

$$\frac{\partial W_i}{\partial x_j} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial W_i}{\partial x_j} = S \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На рис. 7 и 8 показано изменение во времени турбулентной энергии, отнесенной к начальному значению. На первом из них представлены результаты расчета для однородного потока с осесимметричной деформацией сжатия, полученные с использованием стандартной и модифицированной k - ε -моделей и путем прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation — DNS) [57].

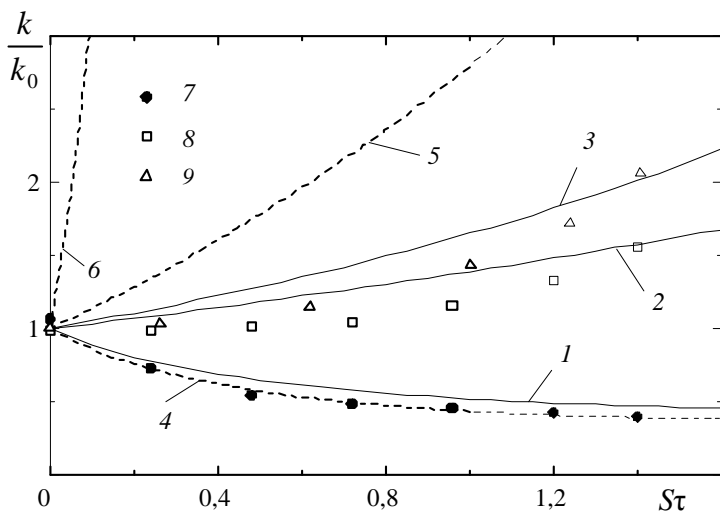


Рис. 7. Изменение во времени турбулентной энергии в однородном потоке с деформацией сжатия:

1—3 — CMT; 4—6 — MMT; 7—9 — DNS [57]; 1, 4, 7 — $Sk_0/\varepsilon_0 = 0,557$;
2, 5, 8 — $Sk_0/\varepsilon_0 = 5,57$; 3, 6, 9 — $Sk_0/\varepsilon_0 = 55,7$

Видно, что модифицированная k - ε -модель турбулентности (MMT) дает результаты, существенно лучше согласующиеся с данными DNS, чем CMT, которая приводит к нереально большим значениям турбулентной энергии при больших значениях Sk_0/ε_0 . Из рис. 8 следует, что аналогичная ситуация имеет место и по отношению к данным моделирования однородного потока со сдвигом скорости на основе метода крупных вихрей (LES) при

$Sk_0/\varepsilon_0 = 3,38$ [58]. Как и в случае осесимметричного сжатия, СМТ приводит к слишком высокому уровню турбулентной энергии. Сравнение с экспериментальными данными и результатами DNS также свидетельствует, что ММТ существенно лучше описывает однородный сдвиговый поток, чем СМТ.

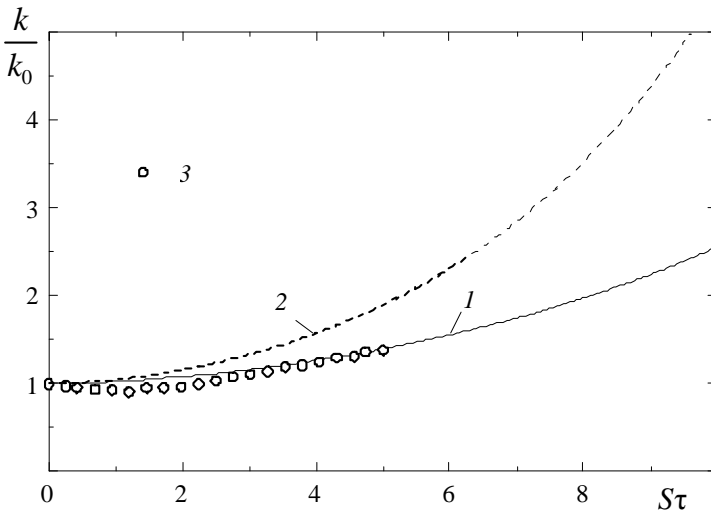


Рис. 8. Изменение во времени турбулентной энергии в однородном потоке со сдвигом скорости:
1 — СМТ, 2 — ММТ, 3 — LES [58]

Хотя значение $C_1 = 1$ лучше всего соответствует экспериментальным данным и результатам численного моделирования, в дальнейшем, чтобы избежать неустойчивости, постоянная C_1 принята равной 1,1. Следует подчеркнуть, что введение соотношения (45) вместо (44) не требует какого-либо изменения численной процедуры по сравнению с используемой для СМТ. Поэтому в расчетах используются стандартные пристеночные функции в качестве граничных условий на поверхности сопла [48].

Источниковый член в уравнении для турбулентной энергии (42), учитывающий дополнительную диссипацию благодаря присутствию капель в потоке, представляется в виде

$$S_k = \frac{2M}{\tau_p} (1 - f_u) k, \quad f_u = \frac{1}{\tau_p} \int_0^\infty \Psi_L(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) d\tau,$$

где f_u — коэффициент вовлечения каплей в турбулентное движение несущего потока; $\Psi_L(\tau)$ — лагранжева автокорреляционная функция пульсаций скорости несущего потока вдоль траектории капли. Для определения f_u используется биекспоненциальная автокорреляционная функция [59]. Эта аппроксимация приводит к следующему выражению для коэффициента вовлечения [60]:

$$f_u = \frac{2\Omega + z^2}{2\Omega + 2\Omega^2 + z^2}, \quad \Omega = \frac{\tau_p}{T_L}, \quad z = \frac{\tau_T}{T_L}.$$

Лагранжев интегральный временной масштаб турбулентности T_L определяется соотношением

$$T_L = C_\mu^{1/2} \frac{k}{\varepsilon}.$$

Тейлоровский временной микромасштаб τ_T находится как

$$\tau_T = \left(\frac{2 \operatorname{Re}_\lambda}{15^{1/2} a_0} \right)^{1/2} \tau_k, \quad \operatorname{Re}_\lambda = \left(\frac{20k^2}{3\varepsilon v_g} \right)^{1/2},$$

где коэффициент амплитуды флуктуаций ускорения a_0 при больших числах Рейнольдса согласно экспериментальным данным [61] равен 7.

Источниковый член в уравнении (43) предполагается пропорциональным соответствующему члену в уравнении (42):

$$S_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} S_k.$$

3. Результаты моделирования течения пара в транзвуковых соплах

3.1. Расчеты в газодинамическом (нетурбулентном) приближении

Вначале представим результаты моделирования в газодинамическом приближении (нетурбулентная модель), когда не учитывается вклад турбулентного переноса импульса и тепла. Движение и теплоперенос двухфазной среды описывается системой уравнений (1)—(3), в которых величины

$\langle u'_i u'_j \rangle$ и $\langle u'_i t' \rangle$ положены равными нулю. Расчеты выполнены для условий, соответствующих экспериментальным исследованиям при тчении водяного пара в плоском [62] и круглом [63] соплах при отсутствии и наличии начальной влаги во входном сечении. Для моделирования эволюции распределения капель по размерам в результате гомогенных и гетерогенных фазовых переходов и коагуляции используются метод моментов (27), метод фракций (29)—(32) и метод дельта-аппроксимации (36).

На рис. 9 показано распределение давления по длине сопла при отсутствии начальной влаги для условий тестов 1 и 3 из [62] (расстояние от входного сечения сопла до критического составляет 0,268 м). В этих тестах полное давление P_0 и температура T_0 равны соответственно $3,67 \cdot 10^4$ Па, 353 К и $2,63 \cdot 10^4$ Па, 342 К.

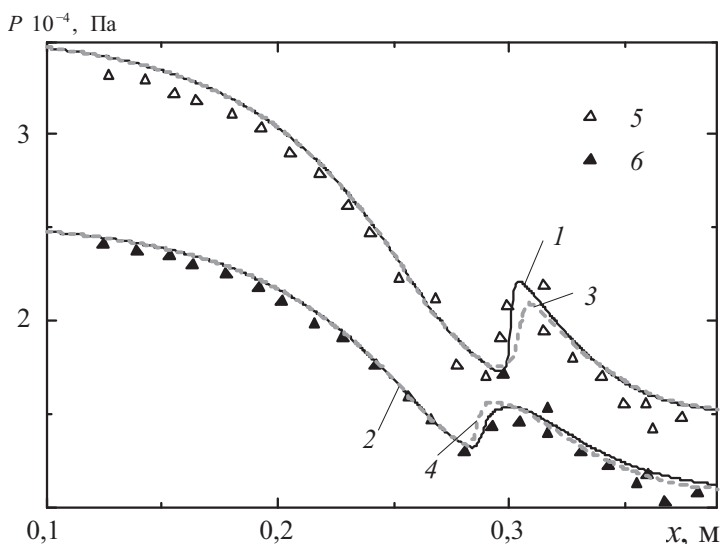


Рис. 9. Распределение давления по длине сопла при спонтанной конденсации: 1, 3, 5 — тест 1 из [59]; 2, 4, 6 — тест 3 из [59]; 1, 2 — метод моментов; 3, 4 — метод дельта-аппроксимации; 5, 6 — эксперименты [62]

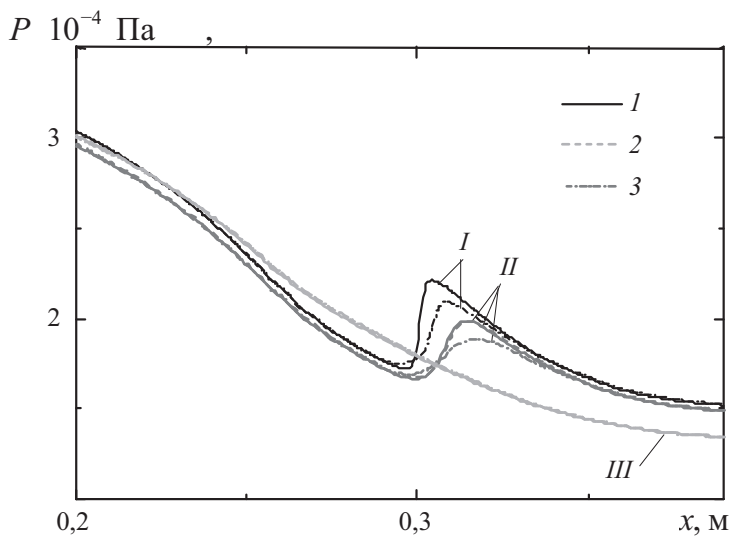
Расчеты выполнены с использованием метода моментов и метода дельта-аппроксимации. В случае спонтанной конденсации без начальной влаги метод моментов дает более точные результаты, так как обеспечивает моделирование четырех моментов ФПВ. Однако в рамках метода дельта-аппроксимации можно использовать только одну дельта-функцию и тем самым обеспечить моделирование только двух моментов. Как видно из

рис. 9, оба метода предсказывают близкие распределения давления по длине сопла и, в частности, одно и то же местоположение скачка конденсации. Хорошая точность метода дельта-аппроксимации в этом случае объясняется тем, что спектр капель, образующихся вследствие спонтанной конденсации, очень узок и поэтому может быть аппроксимирован одной дельта-функцией. Данные рис. 9 свидетельствуют, что расчетные распределения давления включая положение и форму скачка конденсации согласуются с экспериментальными данными.

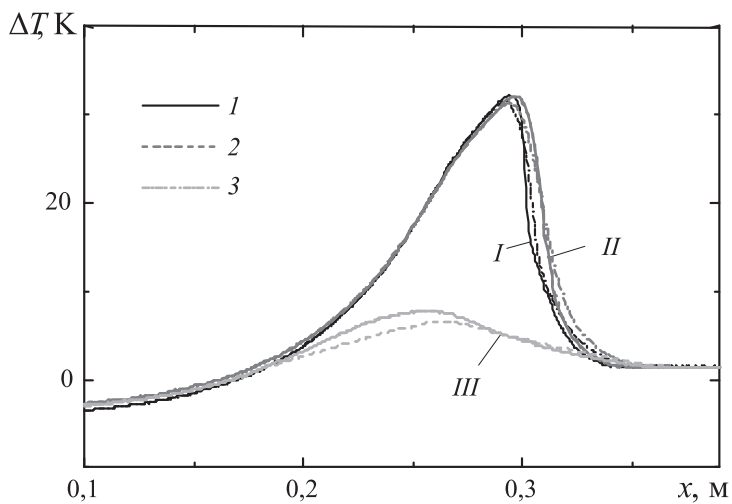
На рис. 10 показано распределение давления, переохлаждения пара и влажности по длине сопла в присутствии начальной влаги при $P_0 = 3,67 \cdot 10^4$ Па и $T_0 = 353$ К. Результаты представлены для начальной влажности $X_0 = 0,001$ и двух значений начального среднемаассового диаметра капель d_0 . Здесь переохлаждение определяется как разница между температурой насыщения и температурой пара $\Delta T = T_s - T$, а влажность — как отношение массы жидкой фазы в единице объема к плотности парокапельной среды $X = M / \rho$. На рис. 10 приведены результаты расчетов, полученные с помощью: 1) комбинированного подхода на основе метода моментов для описания влаги, образующейся вследствие спонтанной конденсации, и метода дельта-аппроксимации с двумя дельта-функциями для описания влаги, поступающей на вход в сопло; 2) комбинированного подхода на основе метода моментов для влаги, образующейся вследствие спонтанной конденсации, и метода фракций для влаги, поступающей на вход в сопло; 3) единого подхода на основе метода дельта-аппроксимации с одной дельта-функцией для влаги, образующейся вследствие спонтанной конденсации, и двумя дельта-функциями для влаги, поступающей на вход в сопло.

Видно, что распределения всех характеристик течения (особенно наиболее важной из них в практическом отношении влажности), полученные различными методами, достаточно хорошо согласуются, хотя расчеты с использованием метода фракций требуют намного большего времени по сравнению с методом дельта-аппроксимации. Так, расчеты, проведенные на основе метода дельта-аппроксимации (кривые 1 и 3), требуют на порядок меньшего времени, чем при использовании метода фракций (кривые 2, полученные для 20 фракций).

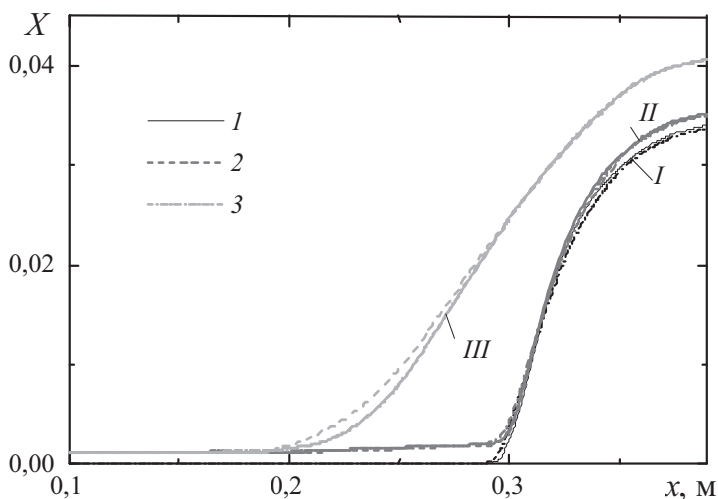
Как следует из рис. 10, начальная влага сглаживает скачок конденсации и может даже приводить к его полному исчезновению. Этот эффект обусловлен снижением переохлаждения пара вследствие конденсации на поступающих в сопло каплях.



a



б



в

Рис. 10. Влияние размера капель начальной влаги на распределения давления (а), переохлаждения пара (б) и влажности (в) по длине сопла:

I — $X_0 = 0$; II — $X_0 = 0,001$, $d_0 = 14$ мкм; III — $X_0 = 0,001$, $d_0 = 0,07$ мкм; 1 — методы моментов и дельта-аппроксимации, 2 — методы моментов и фракций, 3 — метод дельта-аппроксимации

Очевидно, что влияние поступающей на вход в сопло влаги возрастает с увеличением начальной влажности X_0 и уменьшением начального диаметра капель d_0 , так как эффект пропорционален поверхности конденсации.

Интересно, что вследствие снижения роли спонтанной конденсации в присутствии начальной влаги зависимость выходной влажности (на выходе из сопла) X_* от начальной влажности и размера капель имеет немонотонный вид и характеризуется наличием минимумов (рис. 11 и 12).

На рис. 13 показаны распределения давления, переохлаждения пара и влажности по длине сопла при отсутствии начальной влаги для условий экспериментов [63] (расстояние от входного сечения сопла до критического составляет 0,025 м). В этих экспериментах полное давление P_0 было постоянным — $3,16 \cdot 10^4$ Па, а полная температура T_0 варьировалась. Таким образом, рис. 13 демонстрирует влияние начального перегрева пара на процесс спонтанной конденсации.

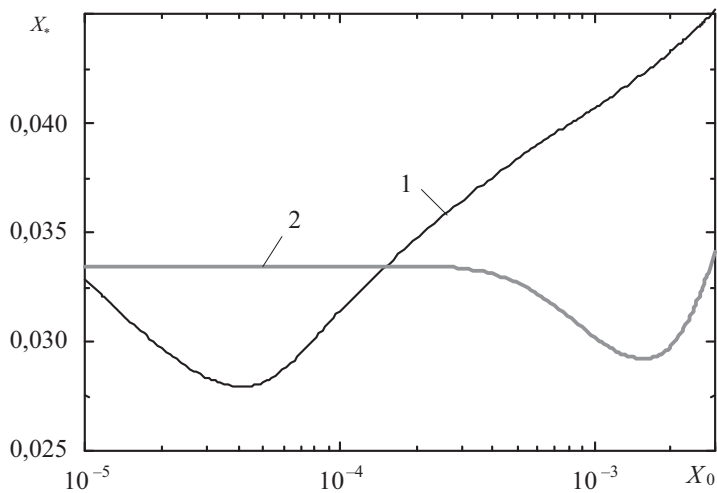


Рис. 11. Влияние начальной влажности на выходную влажность:
1 — $d_0 = 0,11$ мкм, 2 — $d_0 = 0,5$ мкм

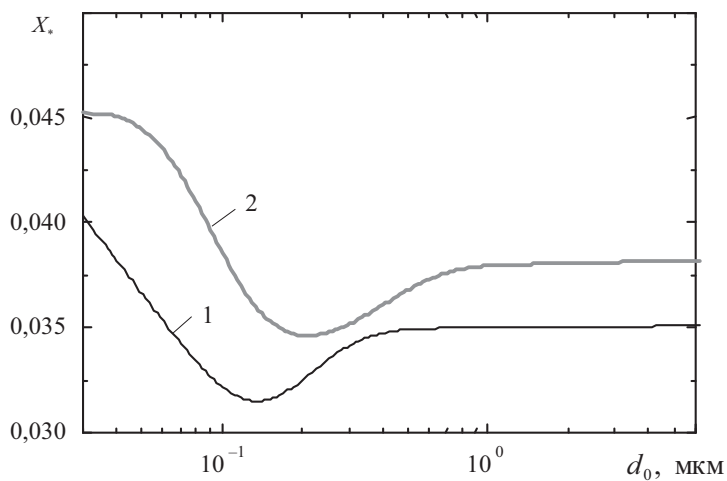
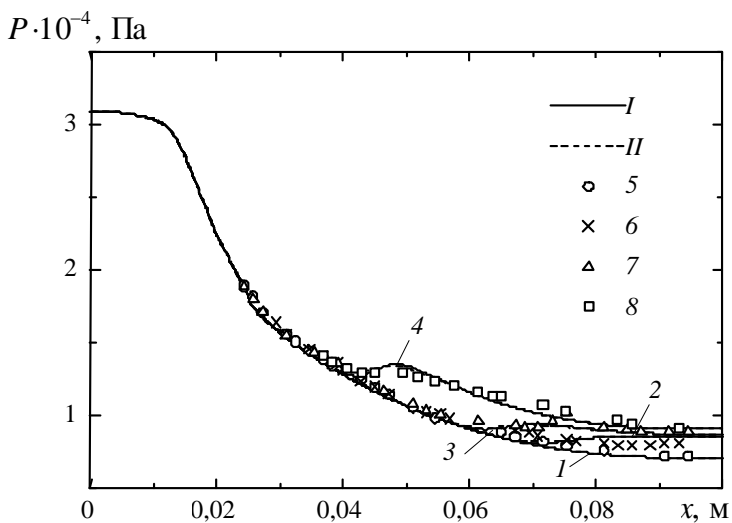
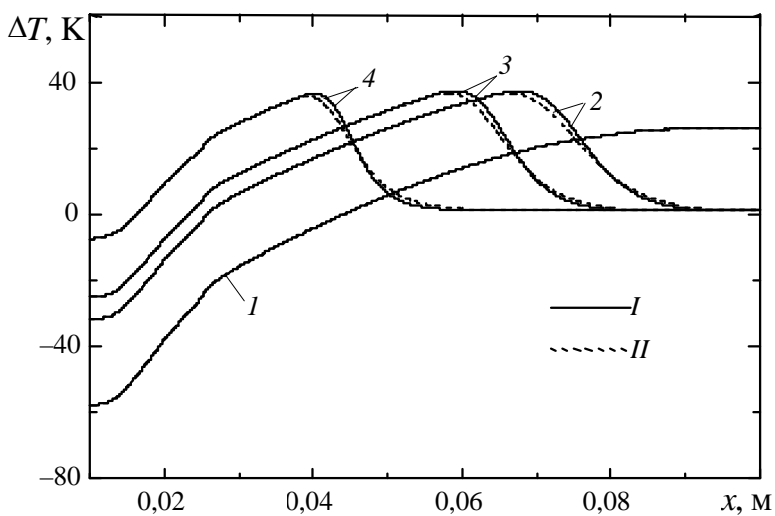


Рис. 12. Влияние начального диаметра капель на выходную влажность:
1 — $X_0 = 0,001$, 2 — $X_0 = 0,003$



a



b

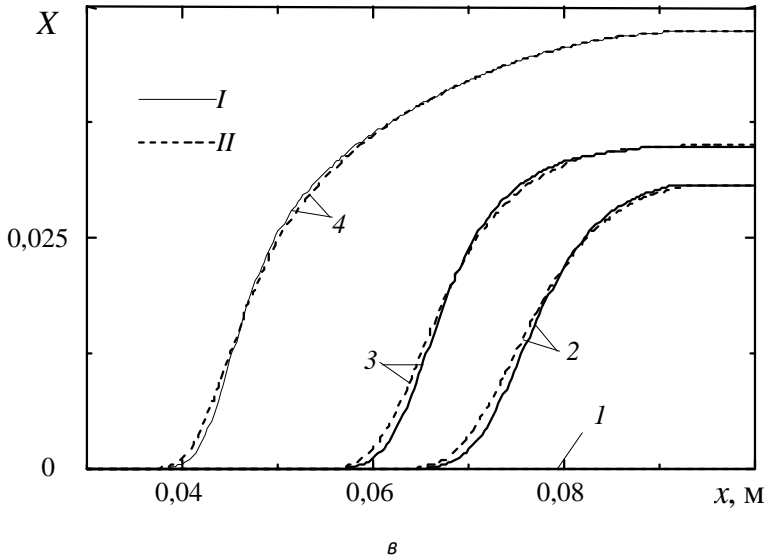


Рис. 13. Влияние начального перегрева на распределения давления (а),
 переохлаждения пара (б) и влажности (в) по длине сопла:
 I — метод моментов, II — метод дельта-аппроксимации; 1—4 — расчеты; 5—8 —
 эксперименты [63]; 1, 5 — $T_0 = 403$ К; 2, 6 — $T_0 = 377$ К;
 3, 7 — $T_0 = 370$ К; 4, 8 — $T_0 = 352$ К

Расчеты выполнены с использованием метода моментов и метода дельта-аппроксимации. Видно, что при большом значении начального перегрева (кривые 1) спонтанной конденсации не происходит. По мере снижения начального перегрева растет давление и увеличивается влажность потока. Результаты расчета распределения давления соответствуют экспериментальным данным.

3.2. Влияние турбулентности на стационарную спонтанную конденсацию водяного пара

Расчеты выполнены для условий, соответствующих экспериментальным данным, полученным при течении водяного пара в плоском [62] и круглом [63] соплах при отсутствии и наличии начальной влаги во входном сечении. Движение и теплоперенос двухфазной среды описывались системой уравнений (1)—(3) и (41)—(43) с учетом соотношений (44) или (45). Расчеты выполнены в двумерной постановке. Для моделирования эволюции спектра капель по размерам в результате гомогенных и гетерогенных фа-

зовых переходов и коагуляции привлекались методы моментов и дельта-аппроксимации.

На рис. 14 показаны распределения давления по длине сопла при отсутствии начальной влаги для условий теста 1 из [62], когда полное давление и температура равнялись соответственно $P_0 = 3,67 \cdot 10^4$ Па и $T_0 = 353$ К. С целью анализа влияния турбулентности расчеты выполнены при низкой (0,02) и высокой (0,2) интенсивности пульсаций скорости (степени турбулентности) χ_0 на входе в сопло ($\chi_0 = (k^{1/2} / W)_0$), а также без учета турбулентного переноса импульса и тепла, т. е. в газодинамическом приближении (нетурбулентная модель). Соответствующие рис. 14 распределения турбулентной энергии вдоль оси сопла, отнесенные к осредненной скорости потока на оси, $\chi = k^{1/2} / W$ представлены на рис. 15.

Из рис. 14 видно, что распределения давления, полученные на основе ММТ при низкой входной степени турбулентности и без учета турбулентности, оказываются близкими, однако кардинально отличаются от соответствующих распределений для СМТ при низкой и ММТ при высокой входной степени турбулентности потока. Так, формы конденсационного скачка, предсказываемые ММТ при низкой степени турбулентности и нетурбулентной моделью, подобны, хотя положение скачка, полученное при использовании нетурбулентной модели, несколько ближе к горлу сопла. Вследствие больших значений турбулентной вязкости при высоком уровне входной турбулентности конденсационный скачок «размывается», а аксиальные распределения давления и других параметров становятся достаточно пологими.

Как следует из рис. 15 (кривая 3), СМТ предсказывает слишком высокий уровень турбулентности даже при низком входном значении, что также приводит к исчезновению скачка конденсации. Так как экспериментальные данные [62] однозначно свидетельствуют о наличии скачка давления при рассматриваемых условиях, полученные результаты позволяют сделать вывод о неприменимости СМТ для расчета спонтанной конденсации переохлажденного пара в соплах Лавала.

На рис. 16 показаны распределения влажности в различных сечениях плоского сопла (y — расстояние от оси сопла в поперечном направлении, h — полуширина сопла), рассчитанные на основе ММТ при низкой входной степени турбулентности и нетурбулентной модели (влажность — отношение массы жидкой фазы в единице объема к плотности парокапельной среды $X = M / \rho$). Сопоставление этих распределений показывает, что влияние турбулентности на процесс конденсации проявляется главным образом в пристеночной области.

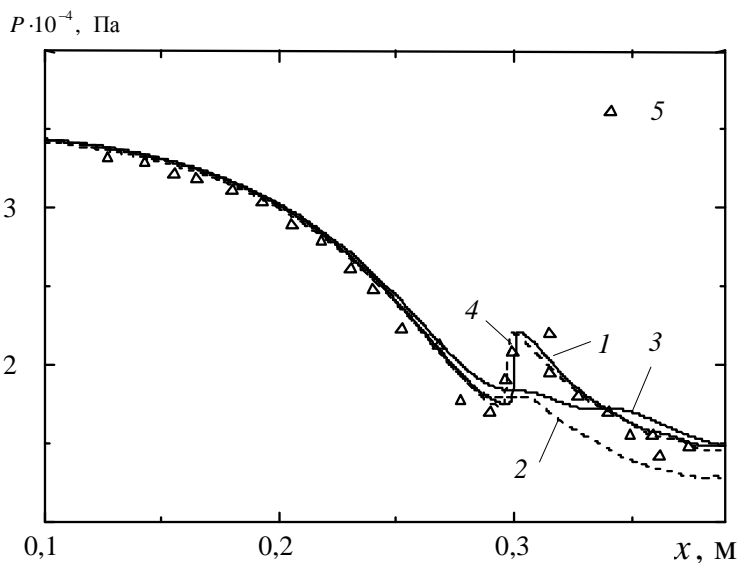


Рис. 14. Распределения давления по длине плоского сопла:
 1 — ММТ при $\chi_0 = 0,02$, 2 — ММТ $\chi_0 = 0,2$, 3 — СМТ $\chi_0 = 0,02$,
 4 — нетурбулентная модель, 5 — эксперименты [62]

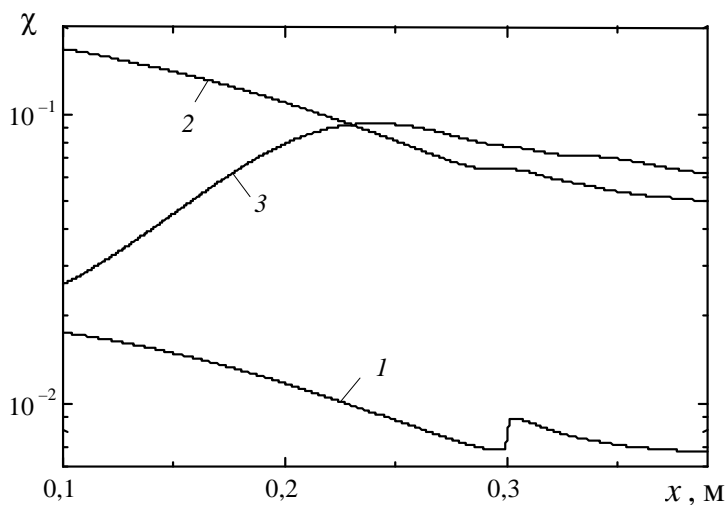


Рис. 15. Распределения степени турбулентности по длине плоского сопла. Линии 1—3 соответствуют рис. 14

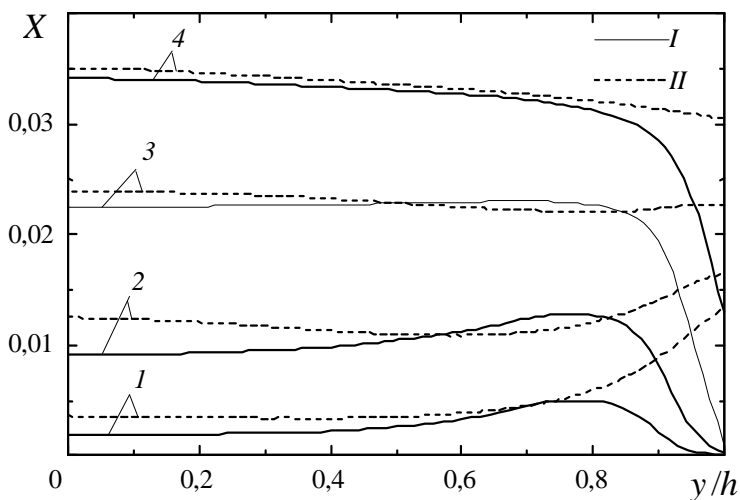


Рис. 16. Профили влажности в различных сечениях плоского сопла: I — ММТ при $\chi_0 = 0,02$, II — нетурбулентная модель, 1 — $x = 0,30$, 2 — $x = 0,31$, 3 — $x = 0,34$, 4 — $x = 0,39$ м

$P \cdot 10^{-4}$, Па

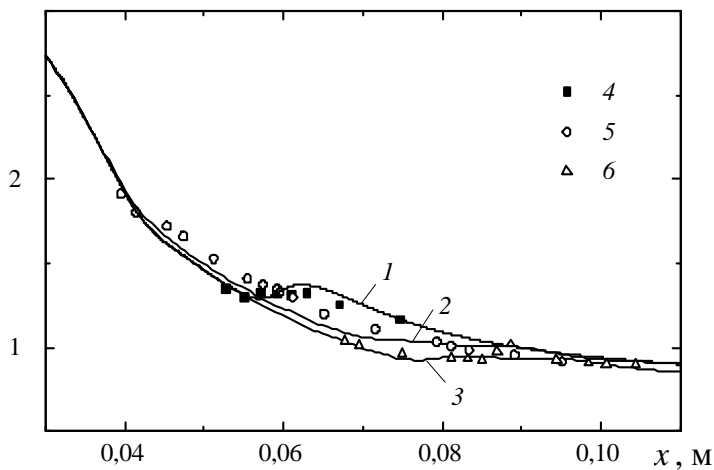


Рис. 17. Распределения давления по длине круглого сопла: 1—3 — расчеты; 4—6 — эксперименты [63]; 1, 4 — $T_0 = 352$ К, $X_0 = 0$; 2, 5 — $T_0 = 352$ К, $X_0 = 0,004$; 3, 6 — $T_0 = 370$ К, $X_0 = 0$

Различие в профилях влажности обусловлено увеличением температуры вблизи стенки вследствие торможения потока, что, в свою очередь, приводит к подавлению конденсации пара. Очевидно, что этот эффект может учитываться только при использовании турбулентной модели, так как не-турбулентная модель полностью игнорирует явления в пристеночных пограничных слоях.

На рис. 17 представлены рассчитанные с привлечением МТМ при низкой входной степени турбулентности и измеренные в [63] распределения давления вдоль оси круглой трубы. В этих экспериментах полное давление P_0 было постоянным — $3,16 \cdot 10^4$ Па, а полная температура T_0 и влажность на входе в сопло X_0 варьировались. Таким образом, рис. 17 демонстрирует влияние начального перегрева пара и входной влажности на процесс спонтанной конденсации. Видно, что в соответствии с экспериментальными данными увеличение давления, вызванное спонтанной конденсацией, а следовательно, и сама интенсивность спонтанной конденсации, уменьшаются по мере увеличения как начального перегрева пара, так и входной влажности.

3.3. Влияние турбулентности на нестационарную спонтанную конденсацию пара

Расчеты выполнены для условий, соответствующих экспериментальным данным, полученным при течении водяного пара в плоских соплах при отсутствии начальной влаги во входном сечении [62; 64]. Представление о форме сопел может быть получено из рис. 18. Движение и тепломассоперенос двухфазной среды описывались системой уравнений (1)—(3), (27), (42) и (43), которая решалась в двумерной постановке. На входе в сопло варьировались полное давление P_0 и температура T_0 . Для анализа влияния турбулентности расчеты выполнены при разных интенсивностях пульсаций скорости (степени турбулентности χ) на входе в сопло χ_0 . Таким образом, варьировалась турбулентная энергия во входном сечении $k_0 = (\chi_0 W_0)^2$. Скорость диссипации турбулентной энергии на входе в сопло задавалась соотношением $\varepsilon_0 = k_0^{3/2} / h_0$, где h_0 — полуширина входного сечения сопла.

В результате расширения при движении в сопле Лаваля сухой пар с параметрами на входе вблизи линии насыщения может достичь переохлаждения (порядка 30—40 К), достаточного для возникновения значительной спонтанной нуклеации. В рассматриваемых соплах это наблюдается в сверхзвуковой части сопла, поскольку расширение пара в дозвуковой части является недостаточным для обеспечения требуемого переохлаждения. Если эффект торможения потока вследствие выделения тепла благодаря

спонтанной конденсации преобладает над ускорением за счет расширения сопла, то имеет место замедление течения и соответственно повышение давления. Поскольку рост давления может быть довольно крутым, этот эффект получил наименование скачка конденсации.

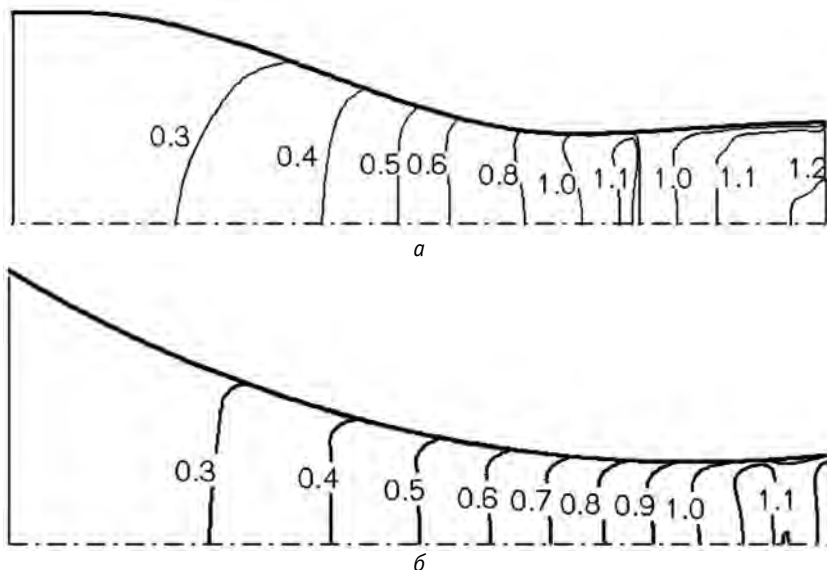


Рис. 18. Изолинии равных чисел Маха:
а — сопло [62], б — сопло [64]

На рис. 14, 15, 19 и 20 показаны распределения статического давления, отнесенного к входному полному давлению, и степени турбулентности по длине сопел, использованных соответственно в [62] и [64]. Входные условия для этих течений: $P_0 = 3,67 \cdot 10^4$ Па, $T_0 = 353$ К [62] и $P_0 = 7,81 \cdot 10^4$ Па, $T_0 = 376$ К [64]. Изомахи для данных режимов приведены на рис. 18. Представленные зависимости, как следует из рис. 14 и 19, соответствуют режимам течения со стационарными конденсационными скачками. Видно, что распределения давления, полученные на основе модифицированной $k-\varepsilon$ -модели при низкой входной степени турбулентности, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными для обоих сопел. При высоком уровне входной турбулентности вследствие больших значений турбулентной вязкости конденсационный скачок «размывается», а аксиальные распределения давления и других параметров становятся достаточно пологими.

Как следует из рис. 14, 15, 19 и 20, стандартная k - ε -модель предсказывает слишком высокий уровень турбулентности даже при низком входном значении (сопоставимый в сверхзвуковой части сопла со степенью турбулентности, получаемой при высоком входном значении), что также приводит к сглаживанию параметров течения и исчезновению скачка конденсации. Таким образом, подтверждается вывод, что СМТ может приводить к существенным погрешностям при расчетах спонтанной конденсации переохлажденного пара в соплах Лаваля.

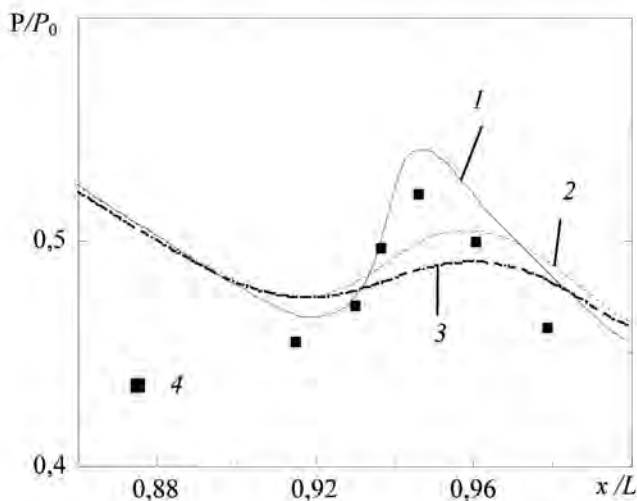


Рис. 19. Распределения давления вдоль оси сопла [64] при стационарной конденсации:

1 — ММТ при $\chi_0 = 0,02$, 2 — СМТ при $\chi_0 = 0,02$,

3 — ММТ при $\chi_0 = 0,2$, 4 — эксперименты [64]

При снижении начального перегрева ΔT_0 стационарный скачок конденсации смещается против потока к горлу сопла в область меньших чисел Маха, и в конечном счете может возникнуть кризис течения, характеризуемый образованием нестационарных ударных волн (автоколебаний) [1]. Возникновение автоколебаний связано с механизмом обратной связи, реализуемым ударными волнами: перемещаясь против потока, эти волны снижают переохлаждение пара и уничтожают тем самым причину своего образования (т. е. спонтанную конденсацию). После этого вновь возникает

сверхзвуковое расширение, и процесс повторяется, выражаясь в появлении самоподдерживающихся осцилляций всех переменных.

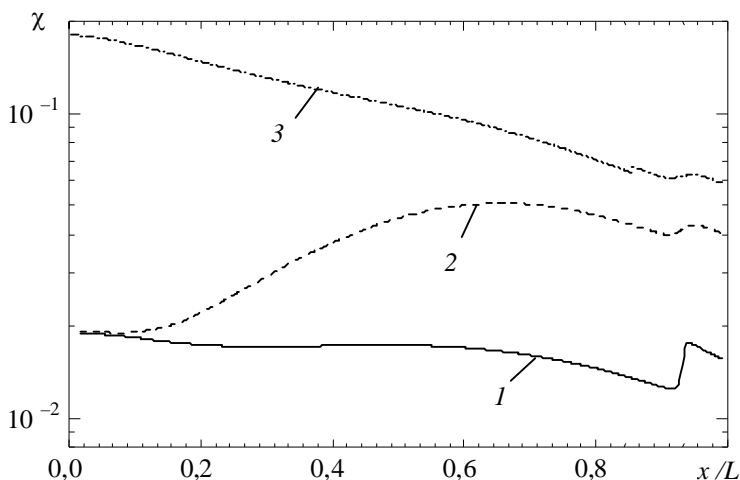


Рис. 20. Распределения степени турбулентности вдоль оси сопла [64] при стационарной конденсации. 1—3 соответствуют рис. 19

На рис. 21 и 22 показаны распределения давления и степени турбулентности по длине сопел в разные моменты времени при следующих входных условиях: $P_0 = 3,51 \cdot 10^4$ Па, $T_0 = 348$ К [62] и $P_0 = 9,34 \cdot 10^4$ Па, $T_0 = 376$ К [64]. Представленные на этих рисунках результаты соответствуют низкой входной степени турбулентности $\chi_0 = 0,02$. В рассматриваемых условиях как в экспериментах, так и в расчетах, выполненных с использованием ММТ, реализуются нестационарные автоколебательные режимы течения. Измеренные в [62] и [64] частоты колебаний параметров потока составляли соответственно 380 и 810 Гц, а рассчитанные частоты равнялись 410 и 840 Гц. Вычисления, проведенные на основе СМТ, не предсказывают возникновения автоколебаний, а дают стационарное плавное изменение всех переменных.

Таким образом, применение стандартной k - ε -модели может приводить к неправильному предсказанию режима и структуры течения.

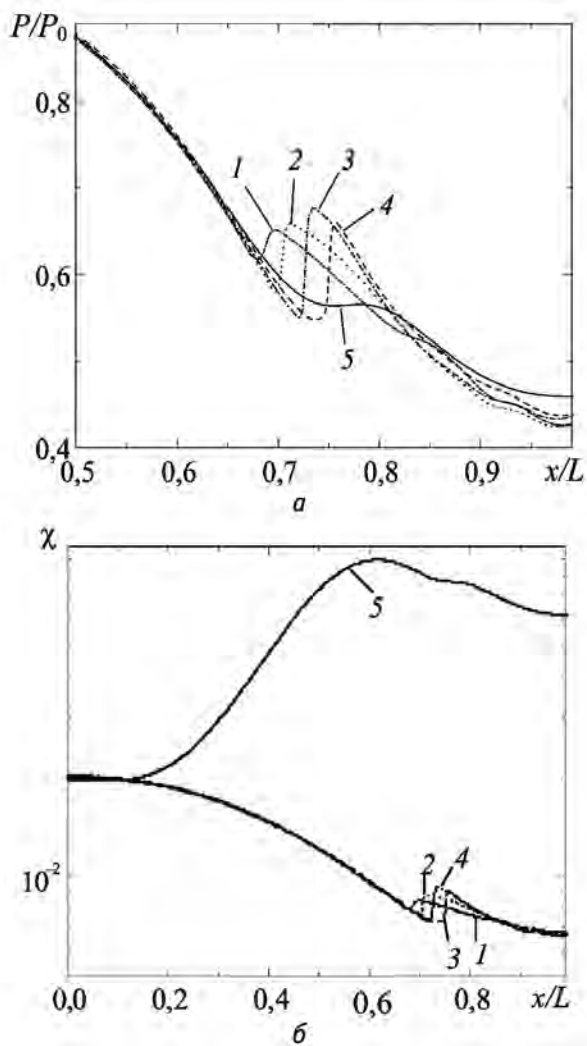


Рис. 21. Распределения давления (а) и степени турбулентности (б) вдоль оси сопла [62] при нестационарной конденсации для $\chi_0 = 0,02$:
 1—4 — ММТ; 1 — $\tau = 3,3$ мс, 2 — $\tau = 3,9$ мс, 3 — $\tau = 4,5$ мс,
 4 — $\tau = 5,1$ мс; 5 — СМТ

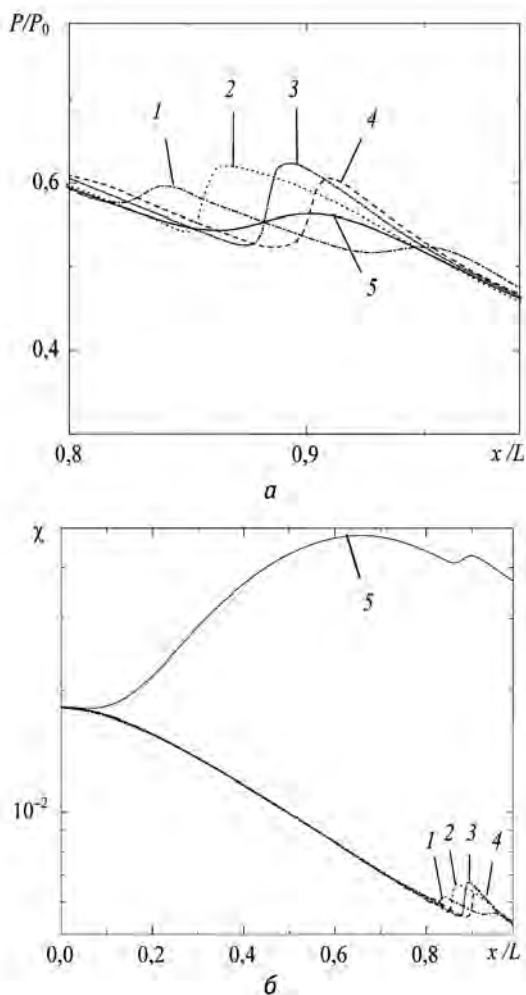


Рис. 22. Распределения давления (а) и степени турбулентности (б) вдоль оси сопла [61] при нестационарной конденсации для $\chi_0 = 0,02$:

1—4 — ММТ; 1 — $\tau = 6,0$ мс, 2 — $\tau = 7,0$ мс, 3 — $\tau = 7,9$ мс,
4 — $\tau = 8,7$ мс; 5 — СМТ

На рис. 23 и 24 представлены осцилляции давления на оси вблизи выходных сечений сопел при разных значениях начальной степени турбулентности. Основной результат, полученный в расчетах, заключается в вырождении нестационарного режима конденсации и исчезновении ударных волн при высокой степени турбулентности.

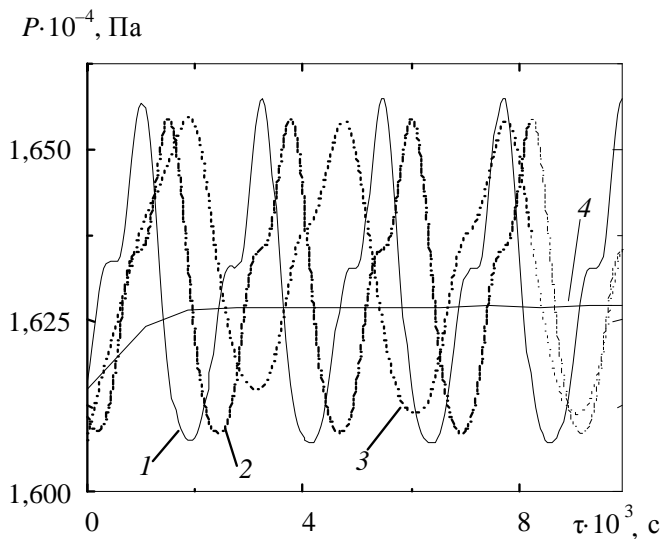


Рис. 23. Осцилляции давления в сопле [62]:

1 — $\chi_0 = 0,02$, 2 — $\chi_0 = 0,06$, 3 — $\chi_0 = 0,10$, 4 — $\chi_0 = 0,15$

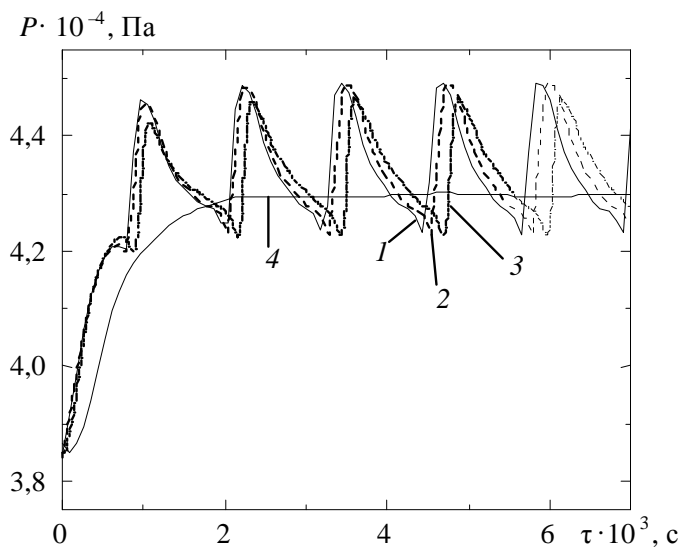


Рис. 24. Осцилляции давления в сопле [64]:

1 — $\chi_0 = 0,02$, 2 — $\chi_0 = 0,04$, 3 — $\chi_0 = 0,06$, 4 — $\chi_0 = 0,10$

4. Влияние поверхностно-активных веществ на течение спонтанно конденсирующегося пара в трансзвуковых соплах

ПАВ находят широкое применение в различных отраслях промышленности. Их применение обусловлено рядом особенностей, важнейшими из которых являются адсорбция на границах раздела фаз и способность понижать поверхностное натяжение. Одним из наиболее перспективных поверхностно-активных веществ представляется октадециламин (ОДА) $C_{18}H_{37}NH_2$, относящийся к классу высших алифатических аминов.

В экспериментальных исследованиях [65] установлено сильное влияние добавок ОДА на процесс неравновесной спонтанной конденсации переохлажденного водяного пара в соплах Лавалья. В результате были выявлены следующие основные эффекты, обусловленные присутствием ПАВ: более раннее появление конденсированной фазы, смещение скачка конденсации вниз по потоку, рост среднего размера образующихся капель, вырождение скачка конденсации при больших концентрациях ПАВ, стабилизация нестационарного потока и переход от автоколебательного к стационарному квазиравновесному течению. Как показано в [1; 65], эти экспериментальные результаты находятся в качественном согласии с расчетами, полученными на основе модели гомогенной (спонтанной) конденсации водяного пара в присутствии гетерогенных центров (примеси ОДА). В [66] предлагается другая модель влияния ОДА на механизм конденсации водяного пара. Принимается, что вначале происходит гомогенная конденсация водяного пара и образуются зародыши, состоящие из молекул воды. Эти зародыши служат центрами гетерогенной конденсации водяного пара и ОДА. Конденсация ОДА приводит к образованию мономолекулярной пленки на поверхности капли, что затормаживает дальнейший процесс конденсации, вызывает рост переохлаждения и смещает зону интенсивной конденсации вниз по потоку. Однако модель [66], правильно предсказывая смещение зоны интенсивной спонтанной конденсации вниз по потоку, не позволяет объяснить такие экспериментальные факты, как появление конденсированной фазы задолго до скачка конденсации и увеличение среднего размера капель, образующихся в процессе конденсации водяного пара при наличии ОДА.

В данной статье рассматриваются три модели влияния ОДА на механизм конденсации при трансзвуковом течении переохлажденного водяного пара в сопле Лавалья. Первая модель (двухзонная) основана на предположении о наличии двух зон спонтанной конденсации (ОДА и водяного пара): вначале имеет место гомогенная конденсация паров ОДА, на образовавшихся зародышах происходит гетерогенная конденсация паров воды, что снижает переохлаждение потока и приводит к снижению интенсивно-

сти или даже вырождению гомогенной конденсации водяного пара. Вторая модель предполагает бинарную нуклеацию в двухкомпонентной среде, т. е. образование зародышей, содержащих молекулы воды и ОДА. Третья модель представляет собой развитие гомогенно-гетерогенного механизма конденсации, рассмотренного ранее в [1; 65]. Моделирование физических процессов выполнено в такой же постановке, как и в предыдущих параграфах, с учетом обобщения на случай течения двухкомпонентной среды.

Двухзонная модель гомогенной конденсации. В рамках этой модели считается, что может иметь место образование двух зон спонтанной конденсации в результате нуклеации паров воды и ОДА. Вначале конденсируются пары ОДА вследствие существенно более низкого давления насыщения по сравнению с водяным паром (рис. 25). Скорости зародышеобразования (нуклеации) паров воды и ОДА предполагаются независимыми и рассчитываются на основе классической теории Фолмера — Френкеля — Зельдовича, см. (4) и (5). Далее принимается, что гетерогенной конденсацией ОДА в силу его очень малой концентрации в газовой фазе можно пренебречь, а гетерогенная конденсация водяного пара может происходить как на зародышах воды, так и на ОДА, и описывается формулами (17)—(19). Для расчета эволюции капель по размерам в результате фазовых переходов привлекается метод моментов (27). Поскольку могут иметь место две группы капель, образовавшихся соответственно на зародышах воды и ОДА, то используются две системы уравнений для моментов, каждая из которых описывает одну из групп капель.

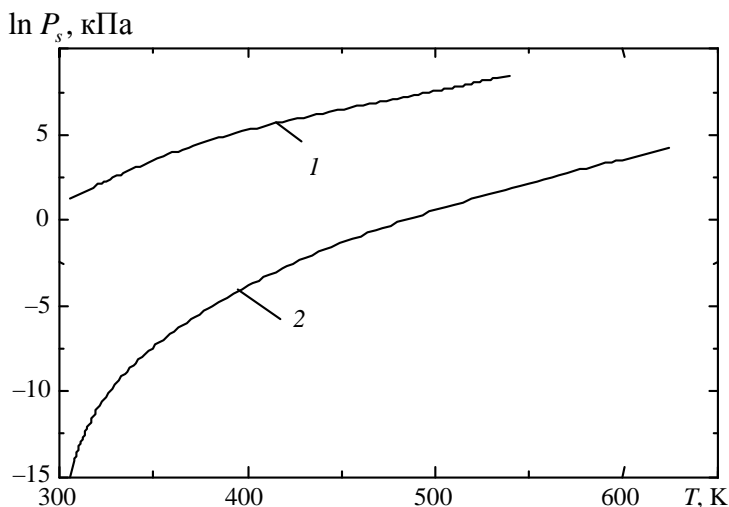


Рис. 25. Давления насыщения паров воды (1) и ОДА (2)

Модель бинарной гомогенной конденсации. Данная модель предполагает, что аналогично бинарной нуклеации в присутствии паров кислот (например, [67—69]) может иметь место бинарная спонтанная конденсация в двухкомпонентной среде паров воды и ОДА. В случае бинарной нуклеации критический зародыш характеризуется двумя параметрами — критическими значениями радиуса r_* и X_* ($X = n_2 / (n_1 + n_2)$, n_1 и n_2 — число молекул воды и ОДА в зародыше). Согласно теории бинарной конденсации эти критические параметры определяются из системы алгебраических уравнений

$$r_* = \frac{2\sigma(X_*)}{\rho_{1\ell} R_1 T \ln(P_1/P_{1s}(X_*))}, \quad \ln\left(\frac{P_1}{P_{1s}(X_*)}\right) = \frac{\rho_{2\ell} R_2}{\rho_{1\ell} R_1} \ln\left(\frac{P_2}{P_{2s}(X_*)}\right). \quad (46)$$

Здесь $P_{1s}(X_*)$ и $P_{2s}(X_*)$ — равновесные парциальные давления насыщения паров воды и кислоты над плоской поверхностью раствора H_2O/ODA , в котором мольная доля ОДА равна X_* ; $\sigma(X_*)$ — поверхностное натяжение раствора состава X_* . Значения $P_{1s}(X_*)$ и $P_{2s}(X_*)$ оцениваются с помощью законов Рауля и Генри.

Гетерогенной конденсацией ОДА в силу малой концентрации в газовой фазе можно пренебречь, а гетерогенная конденсация водяного пара на зародышах раствора H_2O/ODA рассчитывается на основе соотношений (17)—(19). Эволюция капель по размеру вследствие конденсации моделируется методом моментов.

Гомогенно-гетерогенная модель конденсации. Модель основана на предположении, что в гомогенной конденсации участвуют только молекулы водяного пара, а гетерогенная конденсация может происходить как на образующихся зародышах воды, так и на молекулах ОДА. Таким образом, в рамках этой модели присутствие ОДА рассматривается как добавка дополнительных центров гетерогенной конденсации. Нуклеация водяного пара описывается в соответствии с (4) и (5), а гетерогенная конденсация на зародышах воды и молекулах ОДА рассчитывается с помощью (17)—(19). Для моделирования эволюции спектра капель по размерам в результате конденсации применяется комбинированный подход, основанный на методе моментов для влаги, образующейся вследствие спонтанной конденсации, и методе дельта-аппроксимации для влаги, конденсирующейся на молекулах ОДА.

Расчеты выполнены для условий, соответствующих экспериментальным исследованиям при течении водяного пара в плоском сопле Лавала с оптически прозрачными боковыми стенками [65]. Пар на входе в сопло был слабо перегрет или насыщен. Водная эмульсия ОДА инжесктировалась таким образом, что на вход в сопло поступала однородная смесь паров воды

и ОДА. Результаты измерения давления по длине сопла вдоль оси приведены на рис. 26 (T_0 и C_0 обозначают температуру пара и концентрацию ОДА на входе в сопло, x — расстояние от входа в сопло). Видно, что при относительно большом перегреве пара на входе конденсация отсутствует и наблюдается монотонное снижение давления (кривая 1). При поступлении в сопло чистого слегка насыщенного водяного пара возникает скачок конденсации, обусловленный нуклеацией (кривая 2). При введении ОДА происходит смещение скачка конденсации вниз по потоку в область больших чисел Маха и его сглаживание (кривая 3), причем с увеличением концентрации ОДА эта тенденция усиливается (кривая 4). Зондирование потока лазерным лучом свидетельствует, что при введении ОДА влага появляется значительно раньше, т. е. выше по потоку по сравнению с расположением скачка конденсации при течении чистого водяного пара. При высоких концентрациях ОДА влага появляется даже в дозвуковой части сопла. Измерения по рассеянию света показывают, что размер капель возрастает с увеличением концентрации ОДА.

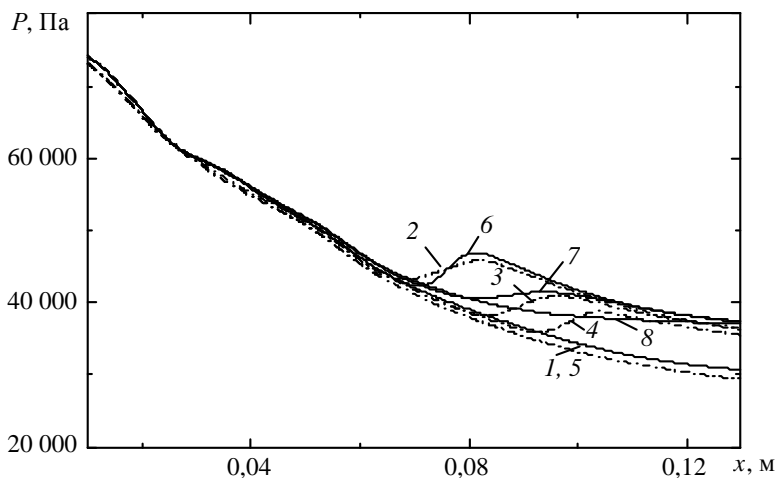


Рис. 26. Распределение давления по длине сопла:

- 1—4 — эксперименты; 5—8 — расчеты; 1, 5 — $T_0 = 433,15$ К, $C_0 = 0$;
2, 6 — $T_0 = 378,15$ К, $C_0 = 0$; 3, 7 — $T_0 = 378,65$ К, $C_0 = 8,2$ мг/л;
4, 8 — $T_0 = 378,15$ К, $C_0 = 12$ мг/л

Перейдем к анализу результатов расчетов. Прежде всего следует указать, что при имеющих место в экспериментах концентрациях ($C_0 < 100$ мг/л) спонтанной конденсации паров ОДА не происходило, поскольку пересыще-

ние P_2 / P_{2s} было слишком мало для возникновения нуклеации. Поэтому механизм влияния ОДА в соответствии с двухзонной моделью гомогенной конденсации в условиях проведенных экспериментов не реализовывался, хотя, возможно, он может наблюдаться при более высоких концентрациях ОДА. Модель бинарной гомогенной конденсации также не дает адекватного описания наблюдаемого в экспериментах влияния ОДА на характеристики течения. Согласно (46) основной эффект, учитываемый этой моделью, заключается в снижении поверхностного натяжения благодаря присутствию ОДА, что, в свою очередь, приводит к уменьшению критического радиуса конденсации r_* , а следовательно, и значения пересыщения P_2 / P_{2s} , при котором может начинаться процесс нуклеации. Поэтому модель бинарной конденсации предсказывает смещение зоны интенсивной конденсации пара вверх по потоку, что противоречит экспериментальным данным.

Проведенные расчеты показывают, что из рассмотренных моделей только гомогенно-гетерогенная модель конденсации, учитывающая гетерогенную конденсацию на зародышах воды и на молекулах ОДА, может воспроизвести все наблюдаемые в экспериментах эффекты при добавке ОДА. Эта модель способна предсказывать как более раннее появление мелкодисперсной влаги, так и смещение зоны интенсивной конденсации вниз по потоку. При проведении расчетов принимается, что гетерогенная конденсация происходит только на некоторой части молекул ОДА. С этой целью вводится коэффициент, учитывающий долю активных молекул, являющихся центрами гетерогенной конденсации водяного пара. Этот коэффициент во всех проведенных расчетах принимается равным 0,01. Сравнение расчетных и экспериментальных распределений давления по длине сопла представлено на рис. 26.

На рис. 27 показано полученное в расчетах влияние ОДА на распределения переохлаждения пара и влажности. Здесь переохлаждение ΔT определяется как разница между температурой насыщения и температурой пара, а влажность X — как отношение массы жидкой фазы в единице объема к плотности парокapельной среды. Как следует из рис. 27, присутствие ОДА сглаживает скачок конденсации и при высоких концентрациях может приводить даже к его исчезновению. Этот эффект обусловлен снижением переохлаждения пара вследствие конденсации на поступающих в сопло молекулах ОДА.

На рис. 28 представлено изменение среднеобъемных радиусов капель r_{30} вдоль оси сопла. Кривые 1—3 изображают эволюцию радиусов капель, образующихся в результате спонтанной конденсации водяного пара (H_2O -капель); кривые 4 и 5 относятся к каплям, формирующимся на молекулах ОДА (ОДА-капли); кривые 6 и 7 — средним радиусам всей системы капель, включающей капли обоих типов (H_2O +ОДА-капель).

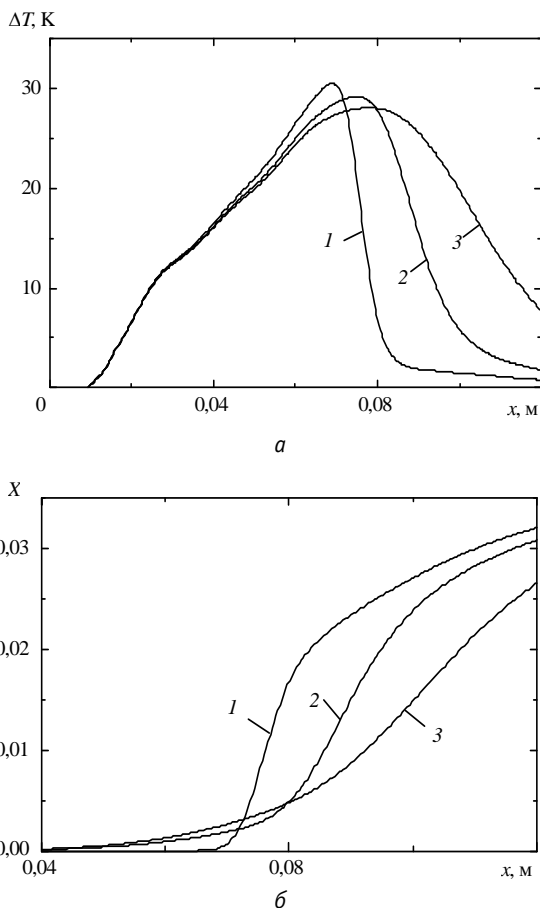


Рис. 27. Влияние концентрации ОДА на распределение переохлаждения пара (а) и влажности (б) по длине сопла:

1 — $T_0 = 378,15$ К, $C_0 = 0$; 2 — $T_0 = 378,65$ К, $C_0 = 8,2$ мг/л;

3 — $T_0 = 378,15$ К, $C_0 = 12$ мг/л

Очевидно, что вследствие гетерогенной конденсации имеет место монотонный рост как H_2O -капель, так и ОДА-капель. При наличии ОДА рост H_2O -капель вначале происходит более медленно, однако на выходном участке сопла размер этих капель возрастает с увеличением концентрации ОДА. С ростом концентрации ОДА наблюдается небольшое увеличение размера ОДА-капель на выходном участке сопла. Немонотонный характер изменения среднего размера системы H_2O +ОДА-капель объясняется существенно

бóльшим размером ОДА-капель и значительно меньшим их количеством (числовой концентрацией) по сравнению с H_2O -каплями. Поэтому на входном (дозвуковом) участке сопла средний размер системы H_2O +ОДА-капель соответствует радиусу ОДА-капель, а после образования зародышей в результате нуклеации водяного пара приближается к радиусу H_2O -капель. Увеличение среднего размера капель вблизи от выхода из сопла с ростом концентрации ОДА соответствует экспериментальным данным [65].

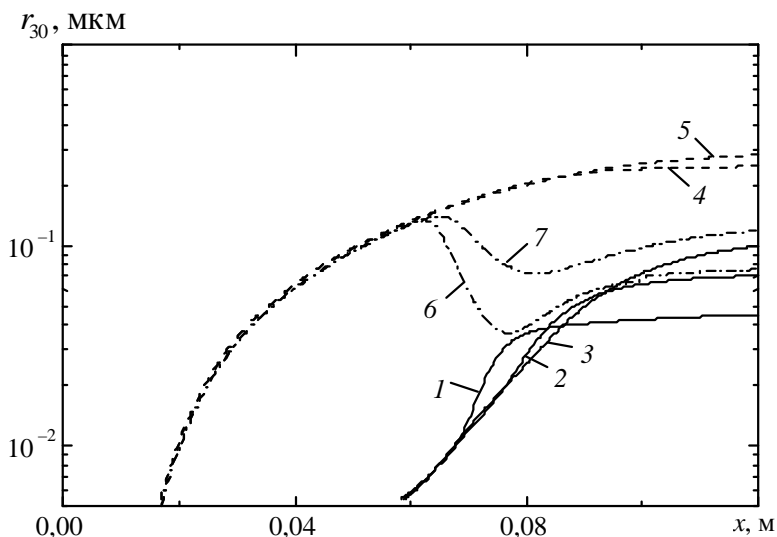


Рис. 28. Изменение среднеобъемных радиусов капель по длине сопла:

1, 2, 3 — H_2O -капли; 4, 5 — ОДА-капли; 6, 7 — H_2O +ОДА-капли;

1 — $T_0 = 378,15 \text{ K}$, $C_0 = 0$; 2, 4, 6 — $T_0 = 378,65 \text{ K}$, $C_0 = 8,2 \text{ мг/л}$;

3, 5, 7 — $T_0 = 378,15 \text{ K}$, $C_0 = 0$

Одна из важных особенностей течений спонтанно конденсирующегося пара состоит в возможности возникновения нестационарных автоколебательных режимов. Это явление обусловлено скрытой теплотой парообразования при конденсации, образованием нестационарных волн и их взаимодействием с зоной конденсации. Возникновение автоколебаний может быть опасным с точки зрения усталостного разрушения выходных кромок сопловых решеток при совпадении значений собственных и вынужденных частот. Проведенные расчеты подтвердили, что введение ОДА приводит к стабилизации нестационарного потока и переходу от автоколебательного к стационарному квазиравновесному течению.

5. Выводы

1. Метод дельта-аппроксимации при моделировании эволюции спектра капель по размерам имеет достаточно высокую точность даже при небольшом количестве групп капель. Этот метод обладает существенно большей вычислительной эффективностью по сравнению с методом фракций и может применяться для расчета спектра капель в случае нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции.
2. Особенностью влияния начальной влаги на спонтанную конденсацию в соплах Лаваля является наличие минимумов в зависимостях выходной влажности от начальной влажности и размера капель.
3. Стандартная k - ϵ -модель турбулентности неприменима для расчета процесса спонтанной конденсации влажного пара в трансзвуковых соплах. Эта модель может приводить к неправильным результатам — исчезновению стационарного скачка конденсации и нестационарных ударных волн при низком уровне входной турбулентности.
4. Модифицированная k - ϵ -модель турбулентности позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными, и воспроизвести принципиальные особенности стационарной и нестационарной спонтанной конденсации в соплах Лаваля.
5. Влияние высокой степени турбулентности на входе в сопло приводит к исчезновению стационарного скачка конденсации и нестационарных ударных волн.
6. Из трех рассмотренных моделей спонтанной конденсации только гомогенно-гетерогенная модель, учитывающая гетерогенную конденсацию на зародышах воды и на молекулах ОДА, адекватно описывает наблюдаемые в экспериментах эффекты. Гомогенно-гетерогенная модель предсказывает более раннее появление конденсированной фазы при введении ОДА, смещение скачка конденсации вниз по потоку, рост среднего размера образующихся капель, вырождение скачка конденсации при больших концентрациях ОДА, стабилизацию нестационарного потока и переход от автоколебательного к стационарному квазиравновесному течению.

Литература

1. *Салтанов Г. А.* Неравновесные и нестационарные процессы в газодинамике. — М.: Наука, 1979.
2. *Young J. B.* Two-dimensional nonequilibrium wet steam calculations for nozzles and turbine cascades // *ASME J. Turbomachinery*. — 1992. — Vol. 114. — P. 569.
3. *Delale C. F., Schnerr G. H., Zieper J.* Asymptotic solution of transonic nozzle flows with homogeneous condensation: 1. Subcritical flows // *Phys. Fluids A*. — 1993. — Vol. 5, № 11. — P. 2969—2981.
4. *White A. J., Young J. B.* Time-marching method for the prediction of two-dimensional, unsteady flows of condensing steam // *J. Propulsion and Power*. — 1993. — Vol. 9, № 4. — P. 579—587.
5. *Косолапов Ю. С., Проценко Е. Ю., Чирихин А. В.* Метод расчета стационарных и нестационарных двухмерных течений спонтанно конденсирующегося пара в соплах // *ЖВМ и МФ*. — 1994. — Т. 34, № 4. — С. 597.
6. *Болдарев А. С., Гасилов В. А., Зайчик Л. И., Ольховская О. Г.* Численное моделирование квазидномерных и двухмерных течений спонтанно конденсирующегося пара в транзвуковых соплах // *ТВТ*. — 1998. — Т. 36, № 1. — С. 135—140.
7. *Аветисян А. Р., Алипченков В. М., Зайчик Л. И.* Моделирование течения спонтанно конденсирующегося влажного пара в соплах Лавала // *ТВТ*. — 2002. — Т. 40, № 6. — С. 938—946.
8. *Bakhtar F., White A. J., Mashmouhy H.* Theoretical treatments of two-dimensional two-phase flows of steam and comparison with cascade measurements // *J. Mech. Eng. Sci.* — 2005. — Vol. 219. — P. 1335—1355.
9. *Schnerr G. H.* Unsteadiness in condensing flow: Dynamics of internal flows with phase transition and application to turbomachinery // *J. Mech. Eng. Sci.* — 2005. — Vol. 219. — P. 1369—1410.
10. *Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.* Турбулентность и горение. — М.: Наука, 1986.
11. *Libby P. A., Williams F. A.* *Turbulent Reacting Flows*. — New York: Academic Press, 1994.
12. *Шиян А. А., Чесноков М. Н.* Влияние турбулентных пульсаций температуры на конденсационный рост частиц // *ТВТ*. — 1984. — Т. 22, № 1. — С. 181—184.
13. *Ватажин А. Б., Клименко А. Ю., Лебедев А. Б., Сорокин А. А.* Гомогенная конденсация в турбулентных затопленных изобарических струях // *Изв. АН СССР. МЖГ*. — 1988. — № 2. — С. 43—52.

14. Жуховицкий Д. И. Коалесценция в неизотермическом турбулентном потоке // ТВТ. — 1989. — Т. 27, № 6. — С. 515—521.
15. Lesniewski T., Friedlander S. K. The effect of turbulence on rates of particle formation by homogeneous nucleation // Aerosol Science and Technology. — 1995. — Vol. 23. — P. 174—182.
16. Корценштейн Н. М., Самуилов Е. В. Влияние пульсаций термодинамических параметров на процесс конденсационной релаксации пересыщенного пара // Докл. РАН. 2001. — Т. 381, № 12. — С. 777—781.
17. Корценштейн Н. М., Самуилов Е. В. Влияние пульсаций термодинамических параметров на образование аэрозоля из пересыщенного пара // Хим. физика. — 2004. — Т. 23, № 8. — С. 85—93.
18. Shaw B. D. Asymptotic evaluation of probability density functions for mean aerosol particle formation rates by homogeneous nucleation in turbulent gas jets // Aerosol Science and Technology. — 2004. — Vol. 35. — P. 177—184.
19. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — Ч. 2. — М.: Наука, 1967.
20. Frisch U. Turbulence. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
21. Pope S. B. Turbulent Flows. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
22. Tavoularis S., Corrsin S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient: Pt. 1 // J. Fluid Mech. — 1981. — Vol. 104. — P. 311—347.
23. Ferchichi M., Tavoularis S. Scalar probability density function and fine structure in uniformly sheared turbulence // J. Fluid Mech. — 2002. — Vol. 461. — P. 155—182.
24. Spalding D. B. Concentration fluctuations in a round free jet // Chem. Engng. Sci. — 1971. — Vol. 26. — P. 95.
25. Khalil E. E., Spalding D. B., Whitelaw J. H. The calculation of local flow properties in two-dimensional furnaces // Int. J. Heat and Mass Transfer. — 1975. — Vol. 186. — P. 775.
26. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.
27. Зайчик Л. И., Соловьев А. Л. Ядра столкновений и коагуляции при броуновском и турбулентном движении аэрозольных частиц // ТВТ. — 2002. — Т. 40, № 3. — С. 460—465.
28. Зайчик Л. И., Алипченков В. М. Коагуляция аэрозольных частиц в турбулентном потоке // ТВТ. — 2008. — Т. 46, № 5. — С. 730—739.
29. Talbot L., Cheng R. K., Schefer R. W., Willis D. R. Thermophoresis of particles in a heated boundary layer // J. Fluid Mech. — 1980. — Vol. 101. — P. 737—758.

30. Williams M. M. R. A Unified theory of aerosol coagulation // J. Phys. D. Appl. Phys. — 1988. — Vol. 21. — P. 875.
31. Brunk B. K., Koch D. L., Lion L. W. Hydrodynamic pair diffusion in isotropic random velocity fields with application to turbulent coagulation // Phys. Fluids. — 1997. — Vol. 9, № 9. — P. 2670—2691.
32. Park S. H., Lee K. W., Otto E., Fissan H. The log-normal size distribution theory of Brownian aerosol coagulation for the entire particle size range. — Pt. 1: Analytical solution using the harmonic mean coagulation kernel // J. Aerosol Sci. — 1999. — Vol. 30, № 1. — P. 3.
33. Saffman P. G., Turner J. S. On the collision of drops in turbulent clouds // J. Fluid Mech. — 1956. — Vol. 1, № 1. — P. 16—30.
34. Wang L.-P., Wexler A. S., Zhou Y. On the collision rate of small particles in isotropic turbulence. — I: Zero-inertia case // Phys. Fluids. — 1998. — Vol. 10, № 1. — P. 266—276.
35. Brunk B. K., Koch D. L., Lion L. W. Turbulent coagulation of colloidal particles // J. Fluid Mech. — 1998. — Vol. 364. — P. 81—113.
36. Chun J., Koch D. L. The effect of non-continuum hydrodynamics on the Brownian coagulation of aerosol particles // J. Aerosol Sci. — 2006. — Vol. 37. — P. 471—482.
37. Chun J., Koch D. L. Coagulation of monodisperse aerosol particles by isotropic turbulence // Phys. Fluids. — 2005. — Vol. 17, № 2. — P. 027102.
38. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. — Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
39. Williams M. M. R., Loyalka S. K. Aerosol Science, Theory and Practice. — [S. l.]: Pergamon Press. 1991.
40. Hill P. G. Condensation of water vapour during supersonic expansion in nozzles // J. Fluid Mech. — 1966. — Vol. 25, № 3. — P. 593—620.
41. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. — М.: Машиностроение, 1974.
42. Зайчик Л. И., Лебедев А. Б., Савельев А. М., Старик А. М. Моделирование бинарной конденсации H_2O/H_2SO_4 в струях реактивных двигателей на основе эйлера метода фракций // ТВТ. — 2000. — Т. 38, № 1. — С. 81—90.
43. White A. J., Hounslow H. J. Modelling droplet size distributions in polydispersed wet-steam flows // Int. J. Heat and Mass Transfer. — 2000. — Vol. 43, № 11. — P. 1873—1884.
44. Пискунов В. Н., Голубев А. И. Метод определения динамических параметров коагулирующих систем // Докл. РАН. — 1999. — Т. 366, № 3. — С. 341—344.

45. Пискунов В. Н. Теоретические модели кинетики формирования аэрозолей. — Саров: РФЯЦ ВНИИЭФ, 2000.
46. Marchisio D. L., Fox R. O. Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments // J. Aerosol Sci. — 2005. — Vol. 36. — P. 43—73.
47. Friedlander S. K., Wang C. S. The self-preserving particle size distribution for coagulation by Brownian motion // J. Col. Sci. — 1966. — Vol. 22. — P. 126.
48. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1974. — Vol. 3, № 1. — P. 269—289.
49. Аветисян А. Р., Алипченков В. М., Зайчик Л. И. Влияние турбулентности на течение спонтанно конденсирующегося влажного пара в соплах Лаваля // ТВТ. — 2003. — Т. 41, № 1. — С. 65—69.
50. Avetissian A. R., Philippov G. A., Zaichik L. I. The effect of turbulence on spontaneously condensing wet-steam flow // Nuclear Eng. and Design. — 2005. — Vol. 235. — P. 1215—1223.
51. Speziale C. G. On nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence // J. Fluid Mech. — 1987. — Vol. 178. — P. 459—475.
52. Gatski T. B., Speziale C. G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // J. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 254. — P. 59—78.
53. Rotta J. C. Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz // Z. Physik. — 1951. — Vol. 129. — P. 547—572.
54. Lumley J. L. The second-order models of turbulent flows // Prediction Methods for Turbulent Flows. — New York: Hemisphere, 1980.
55. Sarkar S., Speziale C. G. A simple nonlinear model for the return to isotropy in turbulence // Phys. Fluids A. — 1990. — Vol. 2, № 1. — P. 84—93.
56. Abid R., Speziale C. G. Predicting equilibrium states with Reynolds stress closures in channel flow and homogeneous shear flow // Phys. Fluids A. — 1993. — Vol. 5. — P. 1776—1782.
57. Lee M. J., Reynolds W. C. Numerical experiments on the structure of homogeneous turbulence / Stanford Univ. — [S. l.], 1985. — (Technical Report TF-24).
58. Bardina J., Fersiger J. H., Reynolds W. C. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows / Stanford Univ. — [S. l.], 1983. — (Technical Report TF-19).
59. Sawford B. L. Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion // Phys. Fluids A. — 1991. — Vol. 3. — P. 1577—1586.

60. *Zaichik L. I., Simonin O., Alipchenkov V. M.* Two statistical models for predicting collision rates of inertial particles in homogeneous isotropic turbulence // *Phys. Fluids*. — 2003. — Vol. 15, № 10. — P. 2995—3005.
61. *Voth G. A., Satyanarayan K., Bodenschatz E.* Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds numbers // *Phys. Fluids*. — 1998. — Vol. 10, № 9. — P. 2268—2280.
62. *Skillings S. A., Walters P. T., Moore M. J.* A study of supercritical heat addition as potential loss mechanism in condensing steam turbines // *Int. Mech. Eng. Conf. C259/87*. — [S. 1.], 1987. — P. 125—134.
63. *Дейч М. Е., Филиппов Г. А.* Газодинамика двухфазных сред. — М.: Энергоатомиздат, 1981.
64. *Barschdorff D.* Droplet formation, influence of shock waves and in stationary flow patterns by condensation phenomena at supersonic speeds // *Intern. Conf. of Rain Erosion and Associated Phenomena*. — Farnborough, 1970. — P. 691—705.
65. *Филиппов Г. А., Салтанов Г. А., Кукушкин А. Н.* Гидродинамика и тепломассообмен в присутствии ПАВ. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
66. *Агеев В. А., Селезнев Л. И.* Конденсация пара в потоке с поверхностно-активными веществами // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт*. — 1982. — № 6. — С. 136—140.
67. *Mirabel P., Katz J. L.* Binary homogeneous nucleation as a mechanism for the formation of aerosols // *J. Chem. Phys.* — 1974. — Vol. 60, № 3. — P. 1138—1144.
68. *Jaeger-Voirol A., Mirabel P.* Nucleation rate in a binary mixture of sulfuric acid and water vapor // *J. Chem. Phys.* — 1988. — Vol. 92, № 12. — P. 3518—3521.
69. *Kulmala M., Laaksonen A.* Binary nucleation of water-sulfuric acid system: Comparison of classical theories with different H₂SO₄ saturation vapor pressures // *J. Chem. Phys.* — 1990. — Vol. 93, № 1. — P. 696—701.

Надсеточное моделирование однородной изотропной турбулентности в одномерном и двумерном случаях

*В. М. Головизнин, С. А. Карабасов, И. А. Короткин,
О. С. Сорокикова*

1. Введение

Для понимания и предсказания большинства процессов в природе и промышленных установках необходимо математическое моделирование турбулентных течений. В настоящее время мало у кого вызывает сомнение, что турбулентное движение описывается уравнением Навье—Стокса, которое может быть решено численно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (u_i \mathbf{u}) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \mathbf{u} — скорость; t — время; x_i — пространственная координата; μ — коэффициент динамической вязкости; p — давление.

Однако при практической реализации такого подхода, получившего название прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation — DNS), масштабы неоднородностей, которые должны быть надежно разрешены, зависят от числа Рейнольдса, и для практически интересных случаев столь малы, что имеющихся вычислительных ресурсов оказывается недостаточно. Поэтому прямое численное моделирование в настоящее время ограничено простыми геометрическими областями и весьма низкими числами Рейнольдса.

Для инженерных расчетов используются приближенные модели. Остановимся кратко на основных идеях, заложенных в их основание.

Все типы моделей турбулентности базируются на том или ином осреднении исходных уравнений (1.1). Впервые эта идея была высказана в 1885 г. Рейнольдсом [1], предложившим разложить мгновенное поле скоростей на две составляющие:

$$u = \bar{u} + u', \quad (1.2)$$

где \bar{u} — скорость, осредненная по ансамблю реализаций; u' — флуктуация поля скоростей. Он также предположил, что для любых переменных потока φ и ψ должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \overline{\varphi + \psi} &= \bar{\varphi} + \bar{\psi}; & \overline{\alpha\varphi} &= \alpha \cdot \bar{\varphi}, & \bar{\alpha} &= \alpha, & \forall \alpha = \text{const}, \\ \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \right) &= \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right), & \overline{\varphi \cdot \psi} &= \bar{\varphi} \cdot \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставляя разложение (1.2) в исходные уравнения Навье—Стокса и проводя осреднение по ансамблю с учетом (1.3), Рейнольдс пришел к системе уравнений для осредненных скоростей, получившей название уравнений Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}_i \bar{\mathbf{u}}) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j} + \mu \Delta \bar{u}_i, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\tau_{i,j}$ — так называемый тензор рейнольдсовских напряжений:

$$\tau_{i,j} = \overline{u'_i \cdot u'_j}. \quad (1.5)$$

Для замыкания системы (1.4) и (1.5) Буссинеск в 1877 г. [2] заменил (1.5) тензором вязкости

$$\tau_{ij} = -\mu_T \cdot \bar{S}_{i,j}, \quad \bar{S}_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.6)$$

Здесь μ_T — коэффициент турбулентной вязкости, величина которого определяется из модели пути смешения Прандтля [3]:

$$\mu_T \sim \frac{l_0^2}{\tau_0},$$

где l_0 — характерная длина; τ_0 — характерное время, значения которых определяются характеристиками турбулентного потока.

За последние сто лет разработано значительное число математических моделей (замыканий первого порядка), описывающих зависимость этих переменных от кинетической энергии турбулентности, скорости диссипации и других характеристик, нахождение которых связано с решением тех или

иных уравнений переноса и генерации этих величин. Кроме того, значительное распространение получили и некоторые модели замыкания второго порядка [4]. Следует отметить, что они содержат эмпирические константы, требующие тщательной настройки на те или иные типы течений.

Таким образом, построенные на экспериментальных данных модели Рейнольдсовых напряжений (RANS) обеспечивают возможность вычисления как первых моментов (осредненной скорости и осредненного давления), так и вторых моментов (кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации энергии) и являются удовлетворительными для многих практически важных случаев.

Другой подход к моделированию турбулентных течений (LES) был предложен Смагоринским [5] в 1963 г. Он заключается в аккуратном описании динамики крупномасштабных структур — взаимодействия вихрей, превышающих по своим размерам характерный размер расчетной сетки.

LES, как и RANS, базируется на представлении течения в виде (1.2), однако в операцию осреднения вкладывается иной смысл. Сейчас под осреднением понимается свертка решения уравнения Навье—Стокса с финитным бесконечно гладким ядром [6]:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Delta_f) \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}', \quad (1.7)$$

где $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Delta_f)$ — ядро осреднения; Δ_f — масштаб осреднения. Флуктуация скорости $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ в этом случае называется скоростью подсеточного масштаба (SGS). В результате свертки (1.7) исходное поле скоростей избавляется от флуктуаций, пространственный масштаб которых не превышает Δ_f . Оператор свертки коммутирует с временной и пространственными производными, и для него справедливы соотношения (1.3).

Применение фильтра (1.7) к уравнениям Навье—Стокса снова приводит к системе (1.4), где влияние подсеточного масштаба на осредненное течение описывается тензором

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}, \quad (1.8)$$

где $L_{ij} = \left(\overline{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j} - \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \right)$ — так называемый тензор напряжений Леонарда;

$C_{ij} = \left(\overline{u'_i \cdot \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i \cdot u'_j} \right)$ — перекрестный тензор; $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ — тензор напряжений Рейнольдса [7].

Как и в случае RANS, для определения тензора τ_{ij} необходимо привлекать модельные представления. Простейшая модель, предложенная Смагоринским, состоит в замене τ_{ij} искусственной вязкостью:

$$C_{ij} + R_{ij} \sim -2\mu_T \cdot \bar{S}_{ij}, \quad \mu_T = C_S \cdot \Delta_f^2 \cdot \bar{S}, \quad \bar{S} = \left(\sum_{i,j=1}^n \bar{S}_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.9)$$

Дальнейшее развитие метода LES связано с аппроксимацией обратного оператора свертки и представлением тензоров $L_{ij} + C_{ij}$ через параметры осредненного поля $\bar{\mathbf{u}}$ [8]. Различным вариантам реализации этого подхода посвящено значительное количество публикаций, обзор которых содержится, например, в [7; 9; 10]. Параметры, содержащиеся в этих моделях, также требуют настройки, которая обычно осуществляется методом прямого численного моделирования уравнений Навье—Стокса.

Методы LES в силу своей природы предназначены быть промежуточным звеном между DNS и RANS.

Модели LES описываются дифференциальными уравнениями, отличными от исходных уравнений Навье—Стокса, и поскольку они предназначены для приближенного описания решений последних, при стремлении интервала сглаживания к нулю должны аппроксимировать основные уравнения по крайней мере с первым порядком точности относительно интервала осреднения. В расчетах интервалы осреднения близки к пространственным шагам расчетной сетки. Поэтому все дополнительные члены, отличающие модели LES от уравнений (1.1), должны иметь порядок малости, сравнимый с порядком аппроксимации исходных уравнений. Это значит, что усилия по совершенствованию вычислительных моделей турбулентности можно (может быть, даже с бóльшим успехом) сосредоточить на разработке разностных схем для уравнений Навье—Стокса с улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами. Последнее направление [11; 12] получило название неявного метода крупных вихрей (Implicit LES) и в настоящее время успешно конкурирует с классическим LES.

Неявные методы LES в основном базируются на разностных схемах высокой разрешимости, разработанных в последние тридцать лет для уравнений газовой динамики [13; 14; 15]. К числу таких схем относится и схема «Кабаре», развиваемая в ИБРАЭ РАН и отличающаяся большей простотой и вычислительной эффективностью [16—21]. Можно ожидать, что ее использование в неявном LES-алгоритме приведет к значимым результатам. Кроме того, интересно проверить на классической задаче о распаде одномерной и изотропной турбулентности и другие классические разностные схемы.

Настоящая работа посвящена исследованию возможности применимости классических разностных схем и схемы «Кабаре» для моделирования однородной и изотропной турбулентности в одномерном и двумерном случаях.

2. Надсеточное моделирование однородной и изотропной турбулентности в одномерном случае

2.1. Прямое численное моделирование одномерной однородной турбулентности

Широко распространено мнение, что одномерным аналогом уравнений Навье—Стокса является уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (2.1)$$

Действительно, их роднит квадратичная нелинейность в адвективном слагаемом и линейная вязкость в правой части. Что касается свойств решений, то они совершенно разные. У уравнения Бюргерса при коэффициенте вязкости μ , стремящемся к нулю, формируются как сильные (ударные волны), так и слабые разрывы, в то время как решения уравнений Навье—Стокса такими особенностями не обладают. Уравнение (2.1) с помощью преобразования Хопфа сводится к линейному уравнению параболического типа, что позволяет проанализировать все особенности решения при произвольных начальных данных. Отсюда, в частности, следует, что все стохастические свойства ансамбля решений полностью определяются стохастическими свойствами начальных данных.

Тем не менее уравнение Бюргерса является объектом пристального внимания исследователей, изучающих свойства турбулентности [22—25]. Задача обычно ставится следующим образом: на отрезке $x \in [0, 2\pi]$ задаются случайные начальные данные с заданными статистическими свойствами, и решается нестационарное уравнение (2.1) с периодическими граничными условиями и заданной случайной функцией f .

Начальные данные задаются рядом Фурье с заданными коэффициентами c_k и случайными фазами θ_k , равномерно распределенными на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$u(x, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp[i(kx + \theta_k)]. \quad (2.2)$$

Коэффициенты c_k вычисляются по формуле

$$c_k = Ak^\alpha \exp(-\lambda k^2), \quad (2.3)$$

где A — нормировочный множитель; α, λ — заданные константы.

Цель расчетов — изучение поведения во времени некоторых средних по ансамблю величин, например, полной кинетической энергии, спектральных функций этих величин и так называемых структурных функций случайного поля скоростей. Если внешняя случайная сила $f = 0$, то говорится, что исследуется затухание однородной изотропной «бюргуленции», в противном случае — влияние «форсинга» (от англ. forcing) на статистически установившееся состояние. Известно, что коэффициент наклона спектральной кривой на логарифмической плоскости в одномерном случае равен не $-5/3$, как в трехмерном случае, а -2 . Это обстоятельство обычно используется для тестирования трехмерных LES-алгоритмов [26]. Мы исследовали свойства известных классических разностных схем и схемы «Кабаре» на этой задаче при параметрах, использованных в данной работе.

Начальный спектр энергии задается следующим образом [27] (рис. 2.1):

$$E_{q_0} \equiv E(k_q, 0) = A\sigma^5 k_q^4 e^{-\sigma^2 k_q^2/2}, \quad (2.4)$$

где константа $A = \frac{U_0^2}{3\sqrt{2\pi}}$; $U_0^2 \equiv \langle u_0^2(x) \rangle$ — средняя кинетическая энергия в момент $t = 0$;

$\sigma = \frac{0,05L}{2\pi}$ — параметр, характеризующий ширину начального спектра энергии; $k_q = \frac{2\pi q}{L}$ — волновое число.

Спектр энергии E_{q_0} достигает максимального значения в точке

$$(k_q)_{\max} = \frac{2}{\sigma} = \frac{80\pi}{L}.$$

При расчете по методу типа «уголок» из [27] спектр кинетической энергии, осредненный по 32 реализациям, имеет вид, приведенный на рис. 2.2.

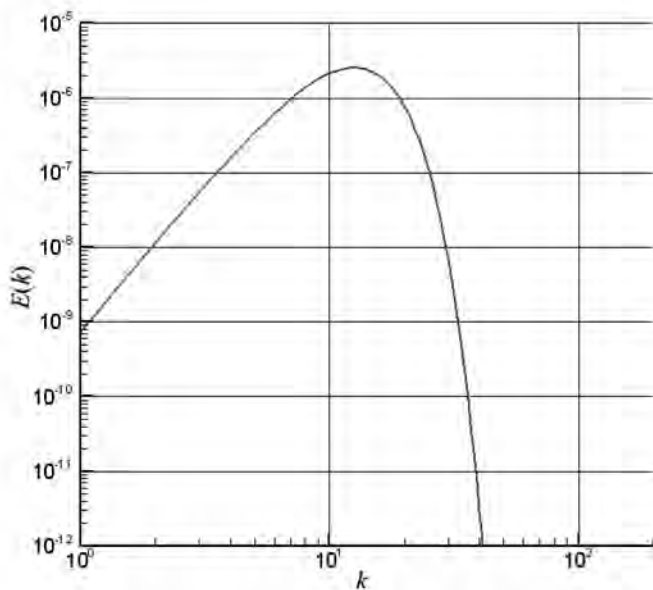


Рис. 2.1. Начальный спектр возмущений

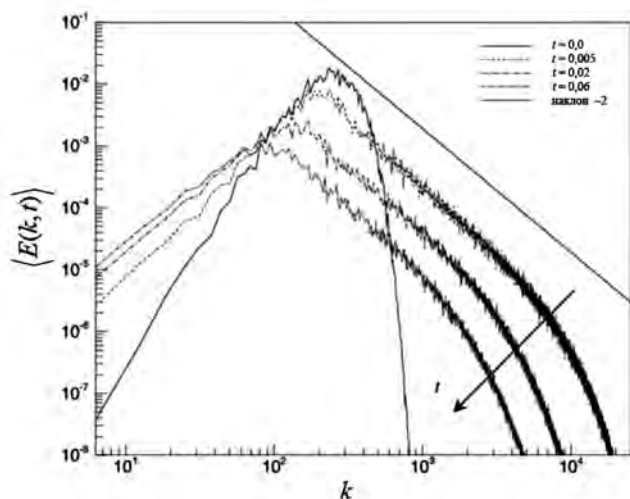


Рис. 2.2. Спектры энергии в логарифмическом масштабе

Ставшим уже классическими LES-алгоритмам мы противопоставим классические разностные схемы Годунова, Лакса—Вендроффа, Аракавы, схему «Крест», а также схему «Кабаре».

Разобьем отрезок $x \in [0, 2\pi]$ на N ячеек и занумеруем узлы полученной расчетной сетки от 0 до N . Проекцию флуктуации скорости на узлы расчетной сетки обозначим u_i , где $i \in [0, N]$ — номер узла. Пространственный шаг сетки постоянный — $h = 2\pi/N$, шаг по времени — τ . Номер шага по времени $n = 0, 1, 2, \dots$

Приведем краткое описание использованных схем.

Схема Годунова имеет сеточный шаблон в виде «уголка», ориентация которого зависит от направления средней скорости в ячейке (рис. 2.3).

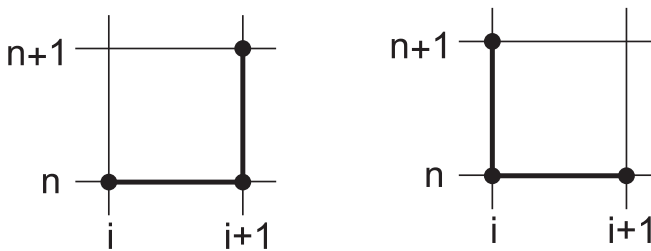


Рис. 2.3. Сеточные шаблоны схемы Годунова

Схема выглядит следующим образом:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = - \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{h}, \quad (2.5)$$

где

$$F_{i+1/2}^n = \begin{cases} (u_i^n)^2 / 2, & \text{если } (u_i^n + u_{i+1}^n) / 2 \geq 0, \\ (u_{i+1}^n)^2 / 2, & \text{если } (u_i^n + u_{i+1}^n) / 2 < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

С учетом вязкости схема принимает вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = - \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{h} + \mu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \quad (2.7)$$

Следует отметить, что для предотвращения возникновения в численном решении «стоячих волн» требуется осуществить коррекцию скоростей в

области распада разрыва. Эта область идентифицируется следующим образом. Если значения скоростей в соседних ячейках по отношению к i -й имеют различные знаки ($u_{i+1}^n u_{i-1}^n \leq 0$) и одновременно градиент скорости в i -м узле положителен ($u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \geq 0$), то новое значение скорости в текущем узле принимается равным полусумме скоростей в соседних узлах:

$$u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) / 2.$$

Этот метод имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству и является устойчивым (при малых коэффициентах вязкости) при числах Куранта от нуля до единицы.

Схема «Крест». Это трехслойная явная разностная схема с сеточным шаблоном в виде креста (рис. 2.4).

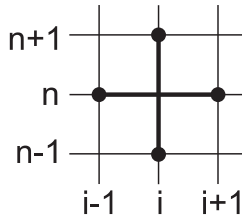


Рис. 2.4. Сеточный шаблон схемы «Крест»

На первом временном слое значения неизвестных переменных могут быть рассчитаны с помощью схемы Годунова (2.5). На остальных слоях новые переменные рассчитываются по следующей схеме:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{i+1}^2 - u_{i-1}^2}{4h} = \mu \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2}. \quad (2.8)$$

Следует обратить внимание на то, что вязкость берется с нижнего временного слоя ($n-1$).

Эта схема при нулевой вязкости имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству. В линейном приближении она устойчива при числах Куранта, меньших единицы. В нелинейном случае схема неустойчива, и для стабилизации нелинейной неустойчивости требуется задание ненулевого коэффициента вязкости $\mu_a > 0$, величина которого зависит от решения.

Схема Аракавы во многом напоминает схему «Крест», но в отличие от последней аппроксимирует уравнение, записанное в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 \right). \quad (2.9)$$

Таким образом, разностная схема принимает вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = -\frac{1}{3} \left[u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) + \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2h} \right]. \quad (2.10)$$

В потоковой форме:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = -\frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{2h}, \quad (2.11)$$

где

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{3} \left[(u_{i+1}^n)^2 + u_i^n u_{i+1}^n + (u_i^n)^2 \right]. \quad (2.12)$$

С учетом вязкости:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = -\frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{2h} + \mu \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2}. \quad (2.13)$$

Схема также имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству и устойчива с введением искусственной вязкости $\mu_a > 0$.

Схема Лакса—Вендроффа. Это двухслойная разностная схема (рис. 2.5).

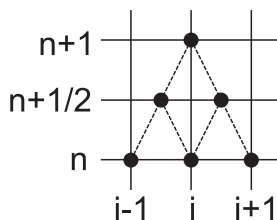


Рис. 2.5. Сеточный шаблон схемы Лакса—Вендроффа

Алгоритм Лакса—Вендроффа может быть представлен в так называемой двухэтапной форме. На первом этапе находятся промежуточные переменные на временном слое $n + 1/2$:

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2}}{\frac{\tau}{2}} = -\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h}, \quad F_i^n = \frac{(u_{i+1}^n)^2}{2}. \quad (2.14)$$

На втором этапе по найденным промежуточным переменным вычисляются переменные на новом временном слое:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -\frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{h}, \quad F_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{(u_{i+1/2}^{n+1/2})^2}{2}. \quad (2.15)$$

С учетом вязкости:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -\frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} + \mu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \quad (2.16)$$

Метод имеет (при исчезающей вязкости) второй порядок аппроксимации по времени и пространству. Для обеспечения устойчивости схемы также требуется введение искусственной вязкости μ_a .

Схема «Кабаре» имеет компактный двухслойный шаблон (рис. 2.6).

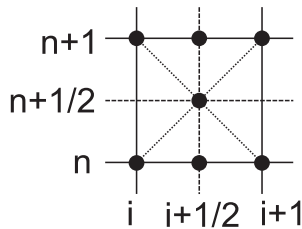


Рис. 2.6. Сеточный шаблон схемы «Кабаре»

Отличительная особенность этой схемы состоит в том, что она оперирует с двумя типами переменных: с потоковыми, относящимися к узлам сетки, и с консервативными, относящимися к центрам расчетных ячеек. Начальные данные задаются для консервативных переменных, начальные потоковые переменные при этом вычисляются простым переносом соседней консервативной переменной по направлению скорости.

Алгоритм расчета переменных на новом временном слое состоит из четырех последовательных шагов. На первом шаге вычисляются промежуточные консервативные переменные на промежуточном временном слое (рис. 2.7):

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^n}{\tau/2} = -\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h} + Q_{i+1/2}^n, \quad (2.17)$$

где

$$F_i^n = \frac{(u_i^n)^2}{2}, \quad (2.18)$$

и «вязкое» слагаемое

$$Q_{i+1/2}^n = \mu \frac{u_{i+3/2}^n - 2u_{i+1/2}^n + u_{i-1/2}^n}{h^2}. \quad (2.19)$$

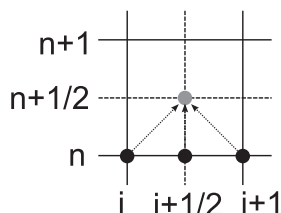


Рис. 2.7. Иллюстрация к первому шагу по схеме «Кабаре»

На втором шаге в зависимости от направления скорости вычисляются предварительные значения потоковых переменных на новом временном слое (рис. 2.8).

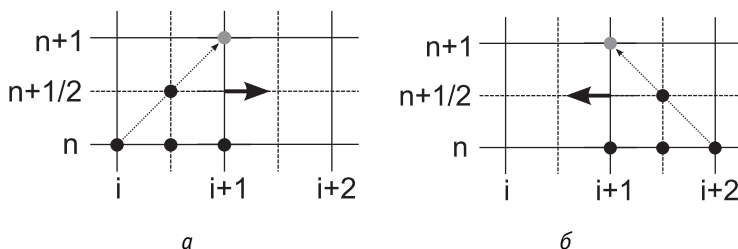


Рис. 2.8. Иллюстрация ко второму шагу по схеме «Кабаре»: а — (2.20); б — (2.21)

Если $(u_{i+1/2}^n + u_{i+3/2}^n)/2 \geq 0$, то

$$\tilde{u}_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n, \quad (2.20)$$

иначе

$$\tilde{u}_{i+1}^{n+1} = 2u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+2}^n. \quad (2.21)$$

На третьем шаге согласно принципу максимума осуществляется коррекция полученных потоковых переменных.

Если $(u_{i+1/2}^n + u_{i+3/2}^n)/2 \geq 0$, то

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_{i+1}^{n+1}, & \text{если } \min_{i+1/2} \leq \tilde{u}_{i+1}^{n+1} \leq \max_{i+1/2}, \\ \min_{i+1/2}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < \min_{i+1/2}, \\ \max_{i+1/2}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > \max_{i+1/2}, \end{cases} \quad (2.22)$$

иначе

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_{i+1}^{n+1}, & \text{если } \min_{i+3/2} \leq \tilde{u}_{i+1}^{n+1} \leq \max_{i+3/2}, \\ \min_{i+3/2}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < \min_{i+3/2}, \\ \max_{i+3/2}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > \max_{i+3/2}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \min_{i+1/2} &= \min \{u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\} + \tau Q_{i+1/2}^n, \\ \max_{i+1/2} &= \max \{u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\} + \tau Q_{i+1/2}^n. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Дополнительно требуется осуществить коррекцию потоковых величин в области распада разрыва. Эту область можно идентифицировать по соседним консервативным переменным. Если значения соседних консервативных переменных имеют различные знаки ($u_{i+1/2}^{n+1/2} u_{i+3/2}^{n+1/2} \leq 0$) и одновременно градиент скорости в текущем узле положителен ($u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2} \geq 0$), то новая потоковая переменная в данном узле принимается равной нулю: $u_{i+1}^{n+1} = 0$.

На последнем, четвертом шаге по найденным значениям потоковых и консервативных переменных вычисляются окончательные значения консервативных переменных на новом временном слое (рис. 2.9):

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} = -\frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{h} + Q_{i+1/2}^n. \quad (2.25)$$

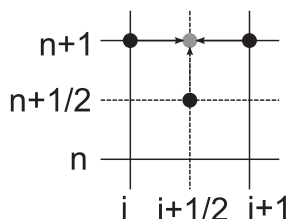


Рис. 2.9. Иллюстрация к четвертому шагу по схеме «Кабаре»

Потоки F вычисляются по переменным на новом временном слое по формуле (2.18), «вязкое» слагаемое Q берется с предыдущего временного слоя.

Схема «Кабаре» имеет второй порядок аппроксимации по времени и по пространству. Метод устойчив при выполнении условий Куранта:

$$CFL_c = \frac{\tau U_{\max}}{h} < \frac{1}{2}, \quad U_{\max} = \max \{u_i\}, \quad (2.26)$$

$$CFL_\mu = \frac{\tau \mu}{h^2} < 1. \quad (2.27)$$

В соответствии с этими условиями на каждом временном слое определяется максимально допустимый шаг по времени τ .

Для устойчивости схемы «Кабаре» не требуется введения искусственной вязкости. Дальнейшие расчеты будут проведены при $\mu = 0$.

2.2. Примеры расчетов

Заданному начальному спектру энергии (2.4) удовлетворяет бесконечное множество различных распределений пульсаций скорости. Пример одного случайного распределения пульсаций с заданным спектром и его эволюция с течением времени, рассчитанная по схеме «Кабаре», представлена на рис. 2.10—2.12.

Видно, что решение представляет собой суперпозицию ударных волн (сильных разрывов) и волн разрежения. При распространении сильных разрывов происходит диссипация энергии, причем в пределе исчезающей вязкости скорость диссипации зависит только от интенсивности разрыва и

при высоком качестве разностных схем не зависит от густоты сетки. Из приведенных графиков также видно, что коротковолновые возмущения затухают быстрее, усиливая длинноволновые моды.

Из этого наблюдения можно сделать вывод, что в одномерной однородной турбулентности существует каскад кинетической энергии, направленный в сторону длинных волн, т. е. в направлении, противоположном существующему в трехмерном случае.

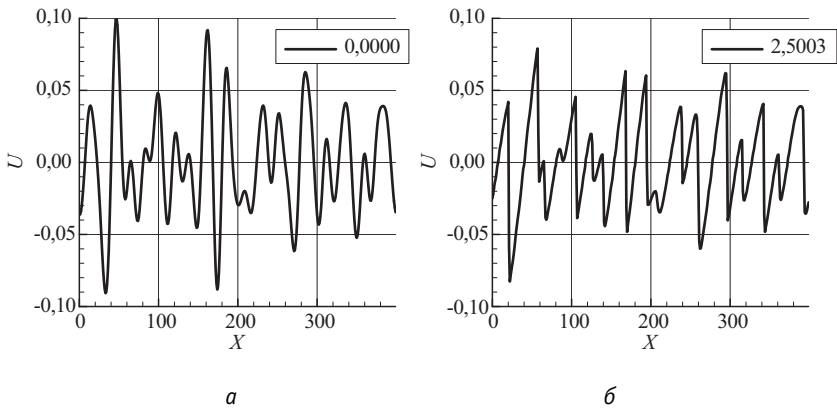


Рис. 2.10. Исходное случайное поле скоростей (а) и поле скоростей на момент времени $t = 2,5$ (б)

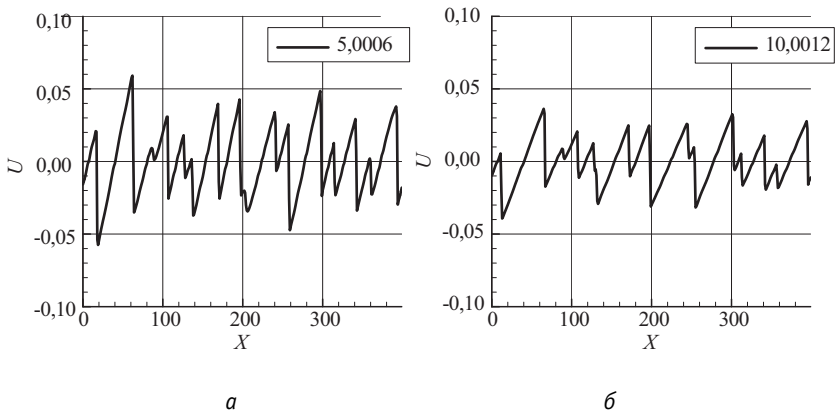


Рис. 2.11. Распределение скоростей на моменты $t = 5$ (а) и $t = 10$ (б)

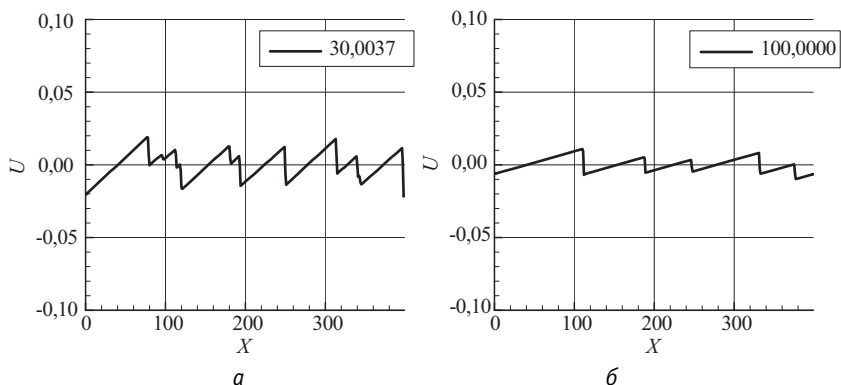


Рис. 2.12. Распределение скоростей на моменты $t = 30$ (а) и $t = 100$ (б)

2.3. Спектры энергии для различных разностных схем

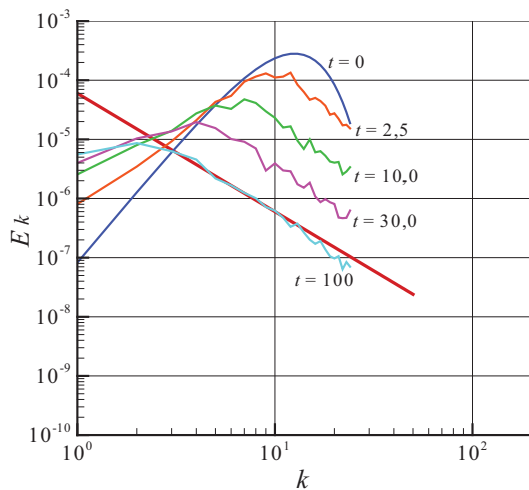
На рис. 2.13—2.15 представлены спектры энергии, рассчитанные методом «Кабаре» на различных расчетных сетках: 50, 100, 200, 400, 800 и 1600 ячеек. Осреднение спектров производилось по ансамблю из 30 реализаций. Вязкость бралась равной нулю. Моменты времени выбраны те же, что и на рис. 2.10—2.12.

Как видно, даже на грубых сетках спектры энергии удовлетворяют степенному закону с наклоном -2 . При измельчении сетки результаты становятся еще лучше.

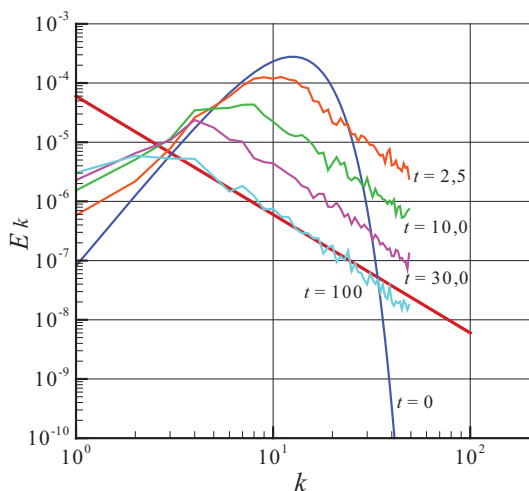
Это значит, что переток энергии по каскаду имеет одинаковую интенсивность как для средних, так и для коротких (в масштабах заданной расчетной сетки) длин волн, что говорит об аккуратном моделировании каскада на самых грубых сетках.

Классические схемы в отличие от метода «Кабаре» не могут обеспечить наклона -2 в высокочастотной области спектра. Коротковолновые гармоники решений, полученных по классическим алгоритмам, затухают заметно быстрее средних по причине наличия как аппроксимационной, так и искусственной вязкости даже на достаточно подробных сетках. На рис. 2.16 и 2.17 представлены спектральные характеристики пульсаций, полученных по классическим схемам на сетке 400 ячеек. Эти рисунки можно сравнить с результатами для схемы «Кабаре» (см. рис. 2.14б).

Характер поведения спектров в окрестности частоты Котельникова—Найквиста для классических схем свидетельствует об их излишней диссипативности.



а



б

Рис. 2.13. Спектры энергии на сетке 50 (а) и 100 (б) ячеек

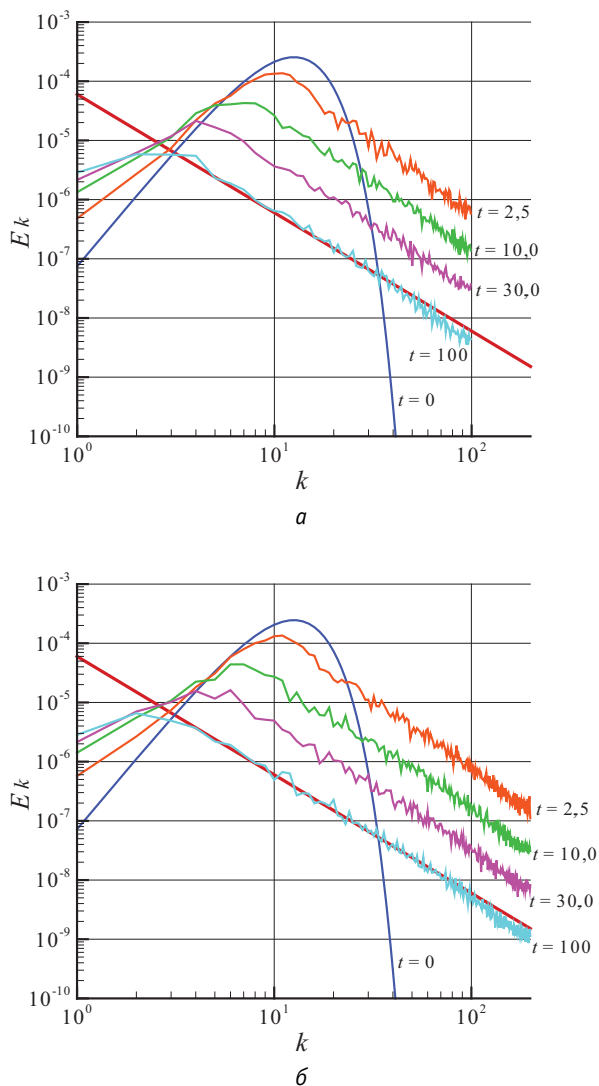


Рис. 2.14. Спектры энергии на сетке 200 (а) и 400 (б) ячеек

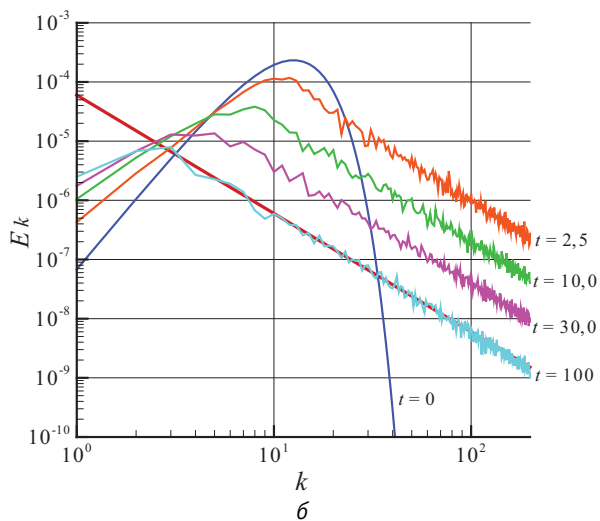
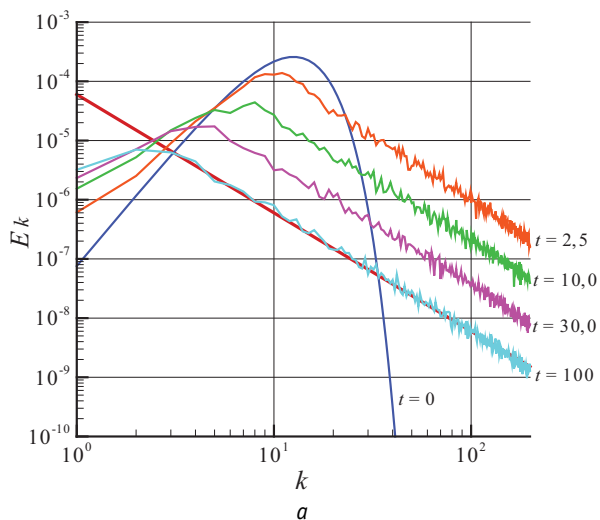


Рис. 2.15. Спектры энергии на сетке 800 (а) и 1600 (б) ячеек

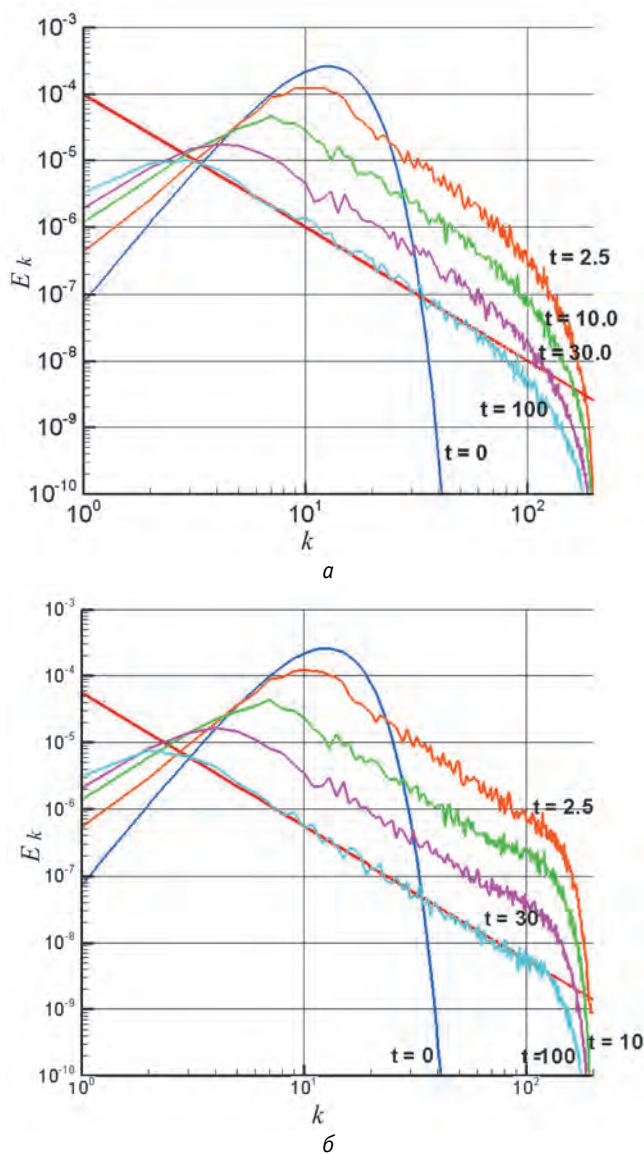


Рис. 2.16. Спектры энергии для схемы Годунова (а) и схемы «Крест» (б)

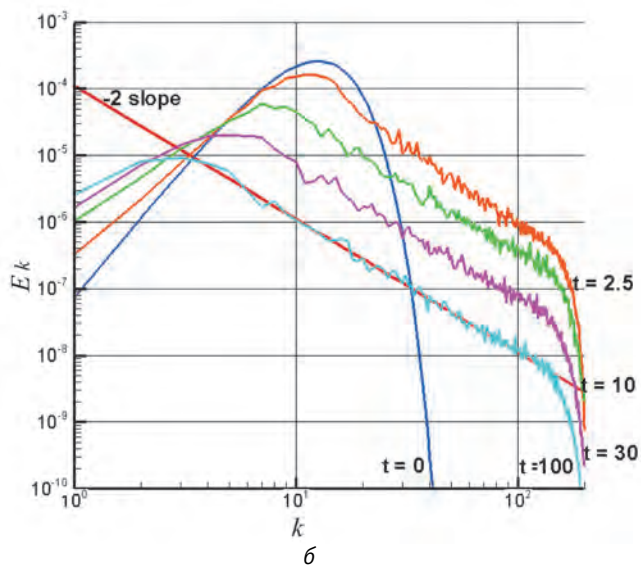
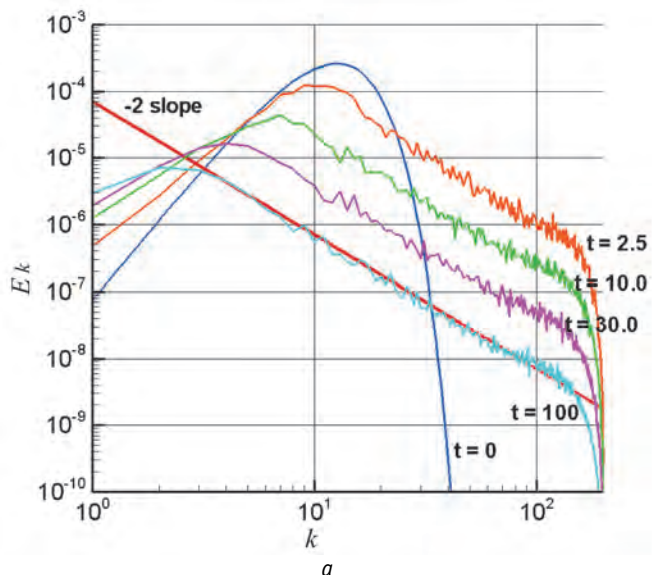


Рис. 2.17. Спектры энергии для схемы Аракавы (а) и Лакса—Вендроффа (б)

2.4. Зависимость кинетической энергии затухающей турбулентности от времени на разных сетках

Начальные скорости во всех реализациях нормируем так, чтобы полная начальная кинетическая энергия оставалась одной и той же.

Априори ясно, что скорость диссипации начальной энергии должна зависеть от коэффициента вязкости. Что будет, если на фиксированной расчетной сетке устремить этот коэффициент к нулю? Какова будет фактическая диссипация при нулевом коэффициенте (если схема это допускает)? Как такая предельная диссипация зависит от времени и от густоты расчетной сетки?

Полная кинетическая энергия в расчетной области определяется выражением

$$E_{tot} = \sum_i \frac{(u_i)^2}{2} h. \quad (2.28)$$

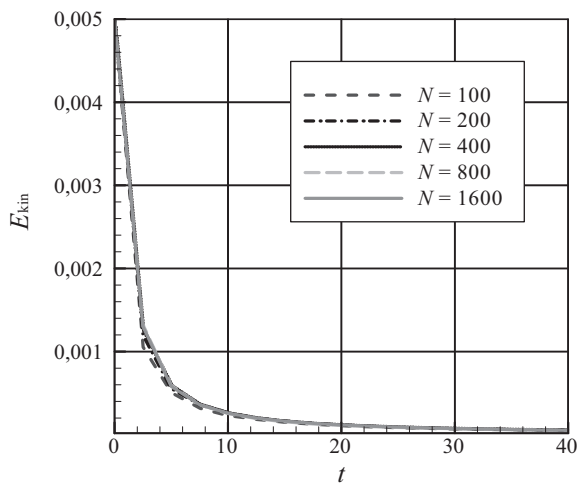
Расчеты, проведенные по схеме «Кабаре» при нулевой вязкости, показали, что зависимость полной энергии от времени в двойном логарифмическом масштабе имеет вид прямой линии с наклоном порядка -1 (рис. 2.18), т. е.

$$E_{tot}(t) \sim t^{-1}. \quad (2.29)$$

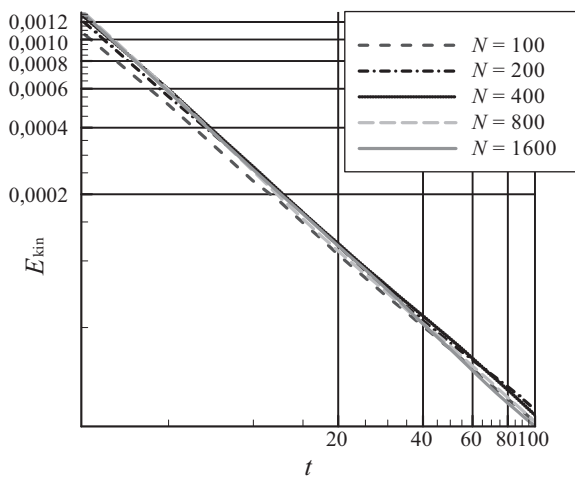
Данный результат не зависит от густоты расчетной сетки. Это говорит о том, что для заданного класса начальных распределений (2.4) одним и тем же оказывается и коэффициент пропорциональности:

$$E_{tot}(t) \sim at^{-1}, \quad a \approx \text{const.}$$

Аналогичные результаты получаются при использовании классических разностных схем (рис. 2.19—2.22).



а



б

Рис. 2.18. Зависимость кинетической энергии от времени для схемы «Кабаре» в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах

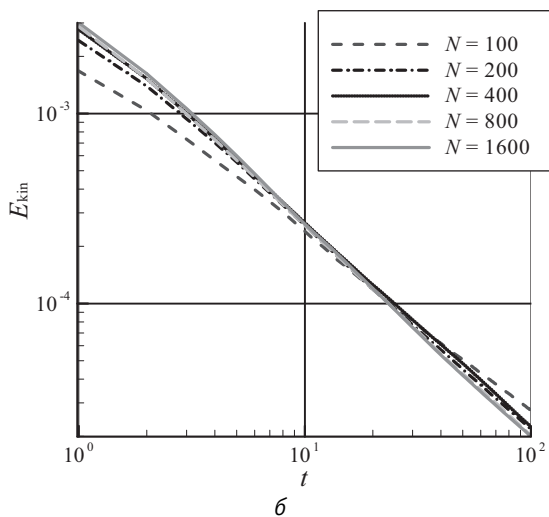
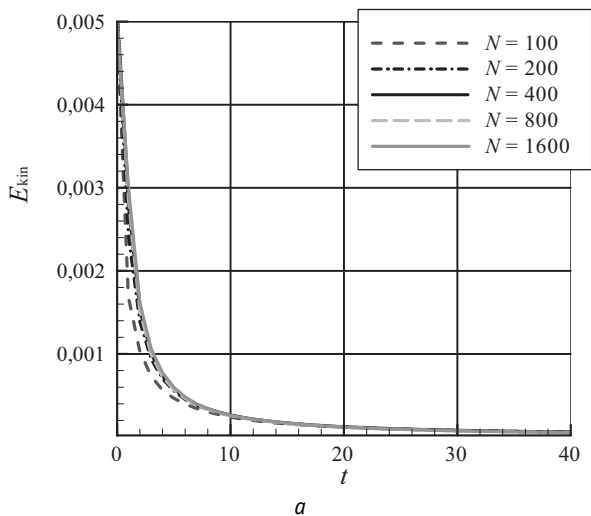


Рис. 2.19. Зависимость кинетической энергии от времени для схемы Годунова в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах

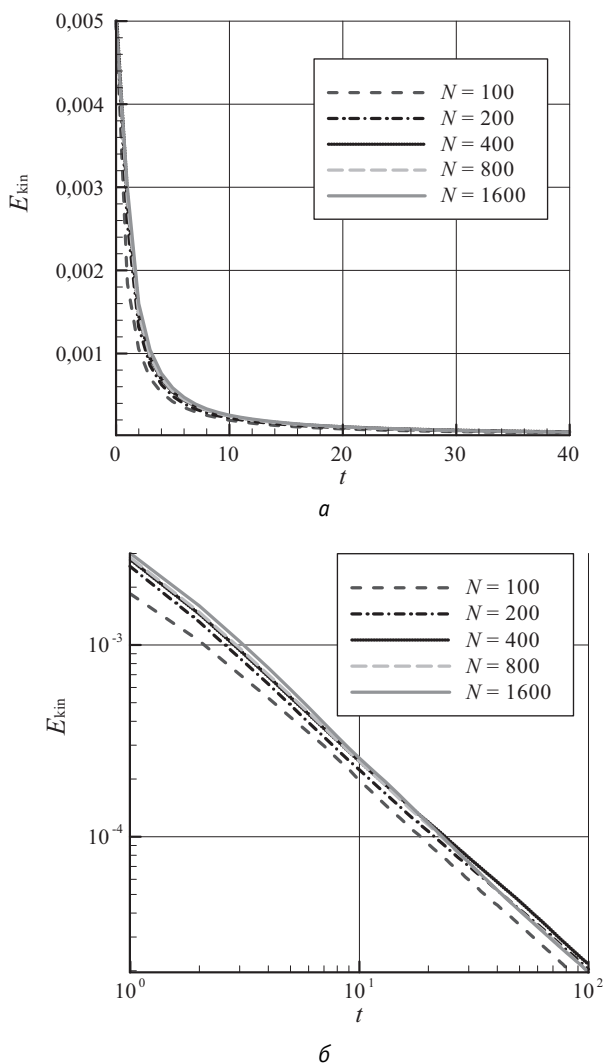


Рис. 2.20. Зависимость кинетической энергии от времени для схемы «Крест» в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах

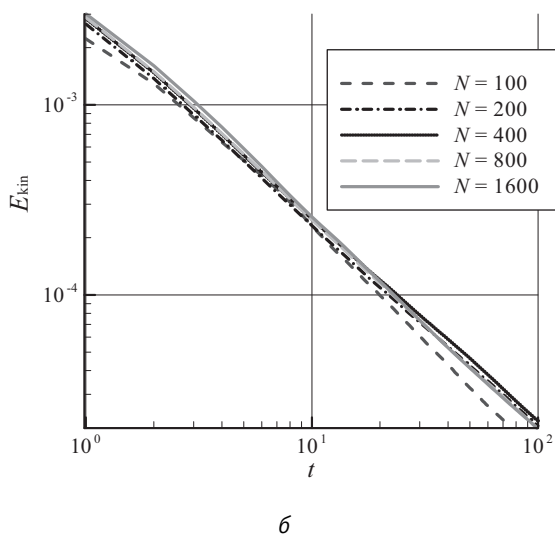
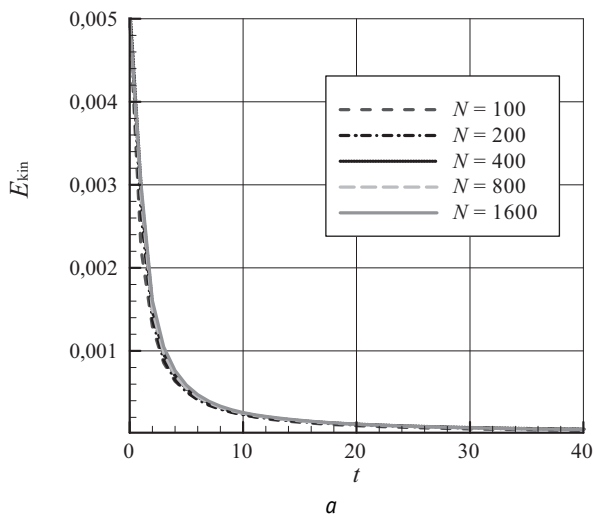
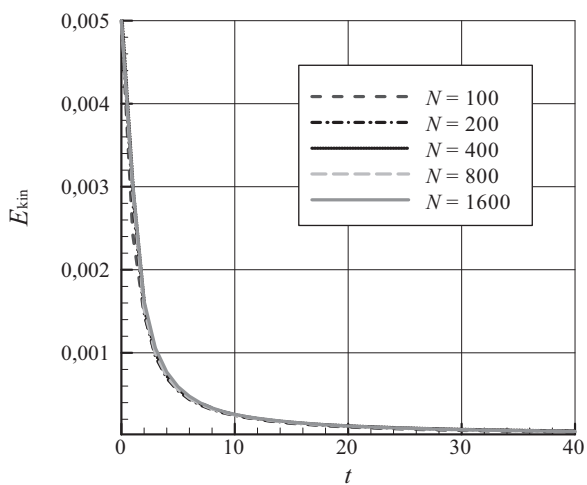
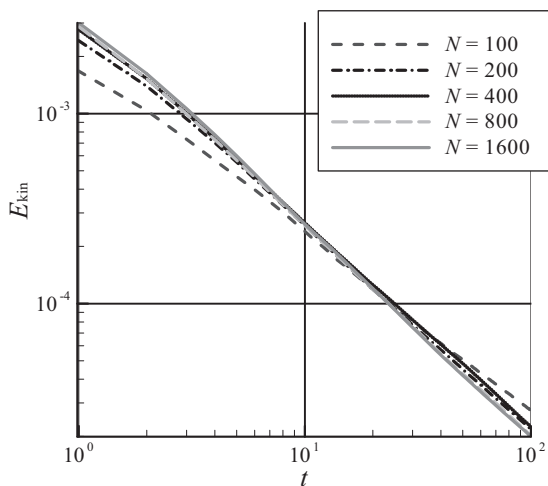


Рис. 2.21. Зависимость кинетической энергии от времени для схемы Аракавы в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах



а



б

Рис. 2.22. Зависимость кинетической энергии от времени для схемы Лакса—Вендроффа в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах

2.5. Структурные функции

Внутренняя структура однородной турбулентности характеризуется коэффициентами корреляции флуктуаций

$$\delta u_l(l) = (\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n}_l \quad (2.30)$$

и скоростью убывания этих корреляций с расстоянием. Статистические моменты этой величины

$$S_q(l) = \langle \delta u_l^q \rangle \quad (2.31)$$

называются структурными функциями.

В трехмерном случае однородной изотропной турбулентности структурные функции согласно второй гипотезе Колмогорова [28] зависят только от масштаба длины l и скорости диссипации энергии ε : $S_q(l) = F(\varepsilon, l)$. Это с привлечением соображения размерности приводит к закону Колмогорова—Обухова [28]:

$$S_q(l) \sim (\varepsilon l)^{q/3}. \quad (2.32)$$

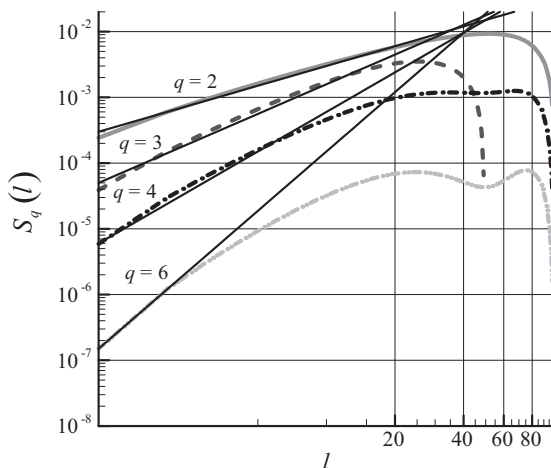


Рис. 2.23. Структурные функции для схемы «Кабаре»

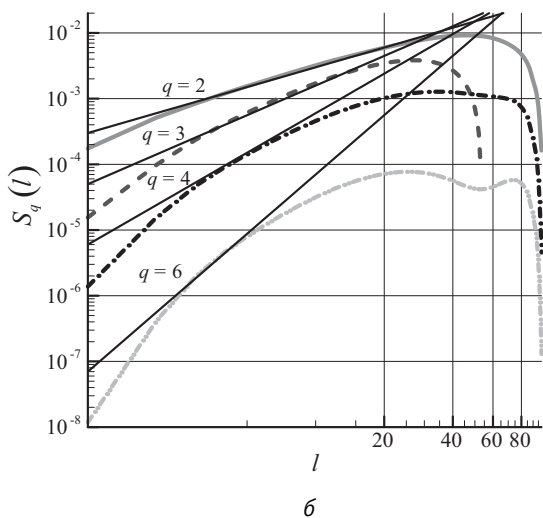
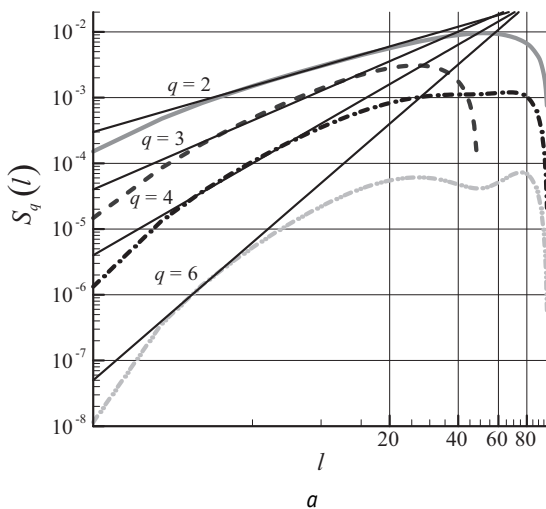
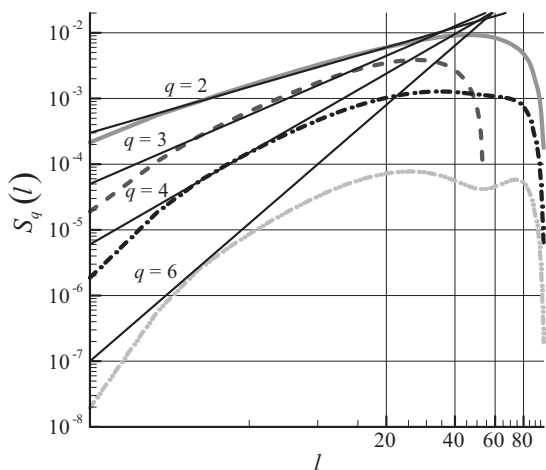
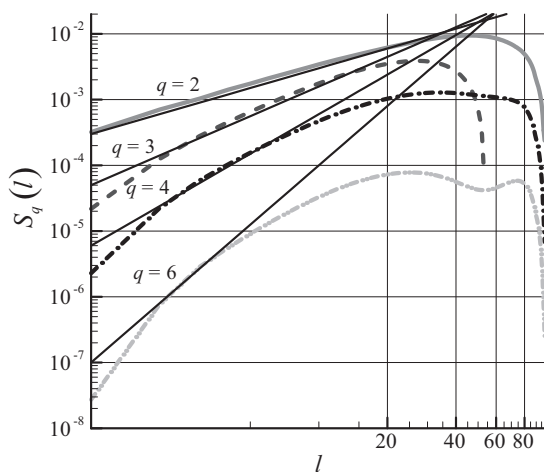


Рис. 2.24. Структурные функции для схемы Годунова (а) и схемы «Крест» (б)



а



б

Рис. 2.25. Структурные функции для схемы Аракавы (а) и схемы Лакса—Вендроффа (б)

В одномерном случае роль скорости диссипации энергии ε играет скорость диссипации максимальной вариации скорости

$$\eta = \frac{d}{dt} \left\{ \max_{x_1, x_2 \in [0, 2\pi]} \left(|u(x_1) - u(x_2)| \right) \right\}, \quad (2.33)$$

имеющая размерность м/с². Соображения размерности приводят в этом случае к зависимости

$$S_q(l) \sim (\varepsilon l)^{q/2}. \quad (2.34)$$

В расчетах с применением схемы «Кабаре» были построены структурные функции второго, третьего, четвертого и шестого порядков на сетке 100 узлов (рис. 2.23). Осреднение проводилось по 100 реализациям. Результаты показывают, что до некоторого расстояния l расчетные показатели близки к теоретическим (прямые сплошные линии). Чем ниже порядок структурной функции, тем лучше он описывается формулой (2.34).

Аналогичные расчеты проведены для классических разностных схем (рис. 2.24 и 2.25).

Для классических алгоритмов результаты практически одинаковы и также близки к теоретическим для $q \leq 4$.

2.6. Перенос пассивной примеси

Уравнение Бюргера (2.1) позволяет рассчитать распределение пульсаций скорости на произвольный момент времени. Рассмотрим задачу переноса этим случайным полем пассивной примеси, описываемым стохастическим уравнением конвекции-диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \nu_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (2.35)$$

где $C(x, t)$ — концентрация переносимой пассивной примеси; ν_c — вязкость.

Рассмотрим в качестве начального условия для (2.35) дельта-функцию, расположенную в центре расчетной области: $C(x, t = 0) = \delta(x - \pi)$. Таким образом, моделируется одномоментное введение примеси в центр области. С течением времени примесь будет распространяться по всему отрезку. Будем рассматривать случай $\nu_c = 0$.

Значения концентраций на разные моменты времени, рассчитанные на сетке 100 ячеек по схеме «Кабаре», примененной как к уравнению Бюргера, так и к уравнению (2.35), и осредненные по 1000 реализациям, представлены на рис. 2.26.

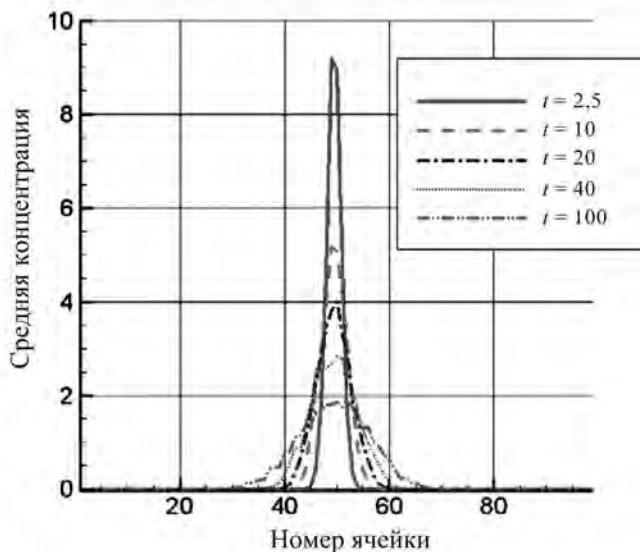


Рис. 2.26. Распределение пассивной примеси для схемы «Кабаре»

Видно, что сам характер распределений концентраций (см. рис. 2.26) аналогичен гауссовым распределениям, которые являются решением классического уравнения диффузии с постоянным коэффициентом v_{eff} :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = v_{\text{eff}} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (2.36)$$

Значения коэффициента эффективной диффузии v_{eff} для исследованных разностных алгоритмов построены методом наименьших квадратов и приведены на рис. 2.27 и 2.28.

Из приведенных графиков видно, что для всех схем включая «Кабаре» эффективный коэффициент диффузии уменьшается с течением времени, не выходя при этом на константу. Это объясняется диссипацией суммарной кинетической энергии и уменьшением величины пульсаций скоростей. Таким образом, поле концентраций с течением времени будет замедлять свое распространение, а эффективный коэффициент диффузии — стремиться к нулю.

Также следует отметить сходимость полученных результатов при измельчении расчетной сетки.

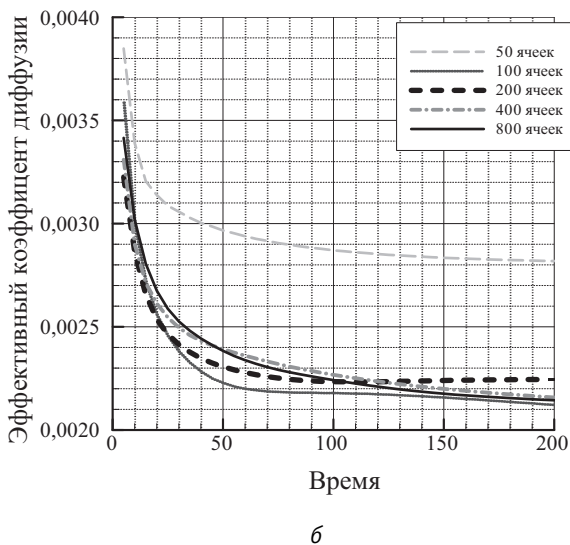
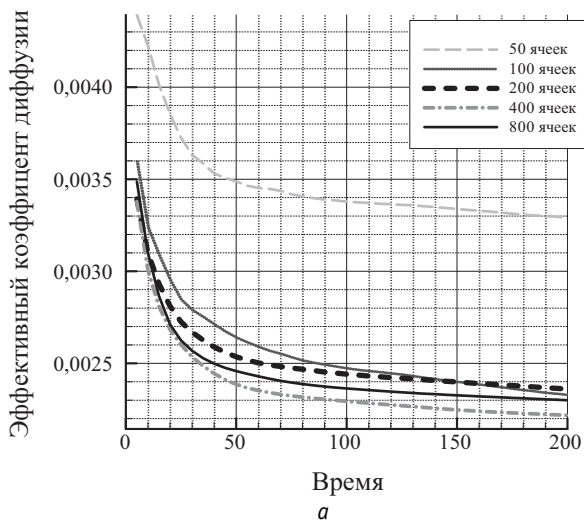


Рис. 2.27. Зависимость эффективного коэффициента диффузии от времени на различных сетках для схем «Кабаре» (а) и «Крест» (б)

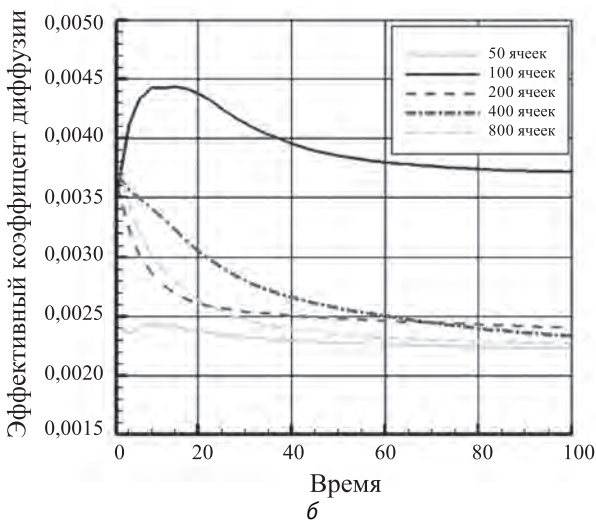
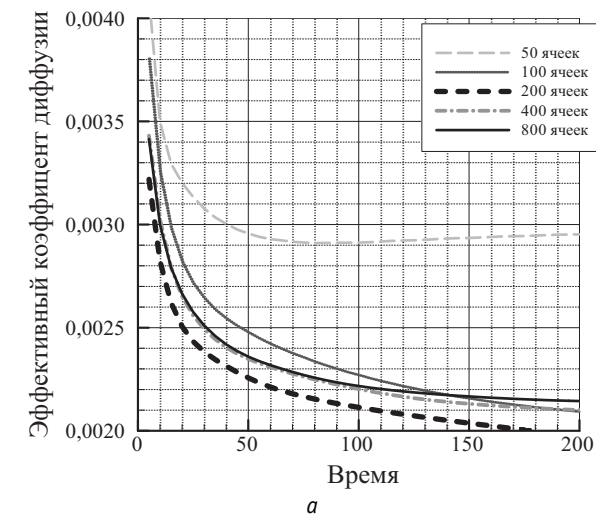


Рис. 2.28. Зависимость эффективного коэффициента диффузии от времени на различных сетках для схемы Аракавы (а) и Лакса—Вендроффа (б)

3. Моделирование двумерных вихревых течений

Для демонстрации свойств классических разностных схем рассмотрим две задачи, описывающие простейшие вихревые течения несжимаемой жидкости в случае двух пространственных переменных в квадрате $L_x = L_y = 2\pi$ с периодическими граничными условиями.

Начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x, y, t_0) &= -\cos(x)\sin(y) + u_0, \\ v(x, y) &= \cos(y)\sin(x) + v_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

отвечает так называемый двумерный вихрь Тейлора—Грина.

В вихре Тейлора—Грина при $u_0 = v_0 = 0$ течение будет стационарным, в противном случае — нестационарным периодическим. На рис. 3.1—3.4 представлены начальные профили скоростей, завихренности и давления на расчетной сетке 32×32 (грубая сетка). Максимальная скорость в вихре равна единице, характерное время одного оборота $\Delta T \sim 5$.

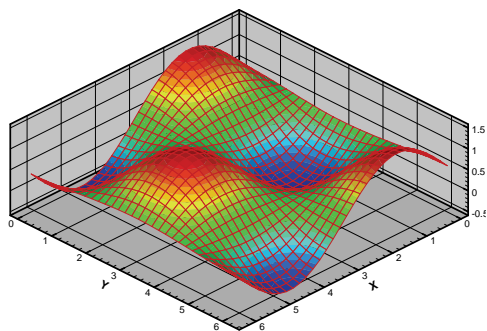


Рис. 3.1. Компонента скорости $u(x, y)$ в начальный момент

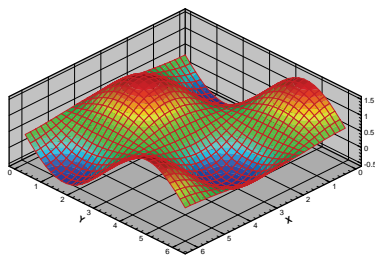


Рис. 3.2. Компонента скорости $v(x, y)$ в начальный момент

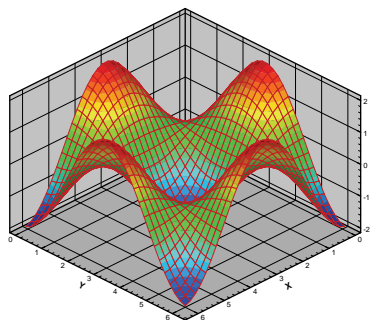


Рис. 3.3. Ротор скорости в начальный момент

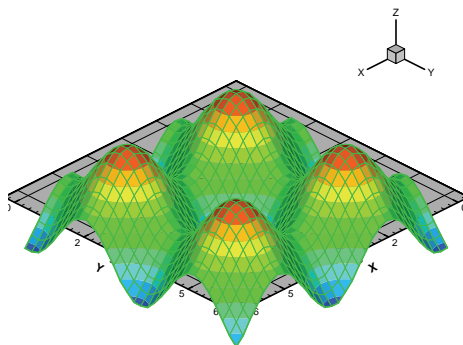


Рис. 3.4. Поле давления в начальный момент

Другой класс вихревых двумерных течений определим следующим образом. Зададим скорость кругового движения в вихре как функцию расстояния от его центра как

$$u(r) = \alpha f(r_\sigma) \exp\left[\beta\left(1 - r_\sigma^2\right)\right], \quad r_\sigma = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} / \sigma, \quad (3.2)$$

где f — полином; α , β , σ — положительные константы. Пусть $f(r_\sigma) = r_\sigma$, $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,3$, $\sigma = 0,5$. На рис. 3.5—3.6 приведены профили завихренности и одной из компонент скорости, построенные на расчетной сетке 32×32 в начальный момент времени.

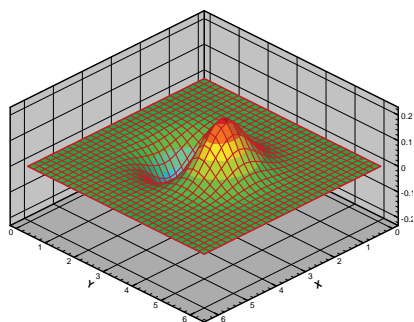


Рис. 3.5. Компонента скорости в начальный момент времени

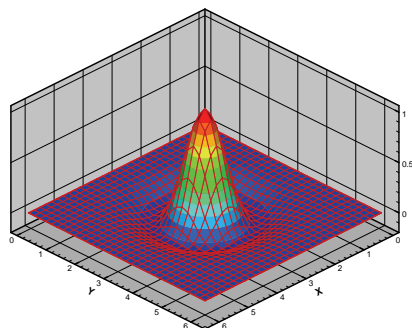


Рис. 3.6. Поле завихренности в начальный момент времени

Характерное время одного оборота такого вихря по окружности, отвечающей максимальной скорости вращения, $\Delta T \sim 6$. Приведенную постановку будем в дальнейшем называть задачей об одиночном вихре.

Будем считать, что коэффициент вязкости равен нулю. В этом случае в дифференциальной постановке задачи кинетическая энергия течений будет оставаться постоянной, а форма вихрей — неизменной. Вычислительные алгоритмы будут вносить в решение присущую им внутреннюю (сеточную) вязкость и паразитную дисперсию, что будет сказываться на поведении кинетической энергии и проявляться в деформации формы вихрей. Ниже будем исследовать собственные диссипативные и дисперсионные свойства описанных ранее схем по скорости затухания этих вихревых течений и деформации их формы на последовательности сгущающихся расчетных сеток.

3.1. Решение модельных задач по схеме Лакса—Вендроффа

Выберем в качестве основной расчетную сетку с числом узлов 64×64 и будем подбирать для нее оптимальные значения расчетных параметров. Поскольку мы рассматриваем только невязкие течения, величина μ в системе уравнений Навье—Стокса будет иметь смысл коэффициента искусственной вязкости, который определим следующим образом:

$$\mu = \xi_0 h_x^2, \quad (3.3)$$

где ξ_0 — эмпирически настраиваемый параметр.

При $\xi_0 < 0,0025$ схема Лакса—Вендроффа подвержена влиянию нелинейной неустойчивости, что приводит к катастрофической разболтке решения. При $\xi_0 = 0,0025$ решение остается ограниченным, однако его кинетическая энергия ведет себя во времени немонотонно (рис. 3.7), что свидетельствует о «нефизичности» решения.

Кинетическая энергия становится монотонно убывающей функцией при $\mu = 0,01h^2$ (рис. 3.8). Такое значение вязкости на данной сетке будем считать «оптимальным». При оптимальной вязкости динамика изменения формы стационарного вихря Тейлора—Грина со временем приведена на рис. 3.9 и 3.10. Видно, что необходимая для поддержания нелинейной устойчивости вихря искусственная вязкость оказывает существенное влияние на его форму.

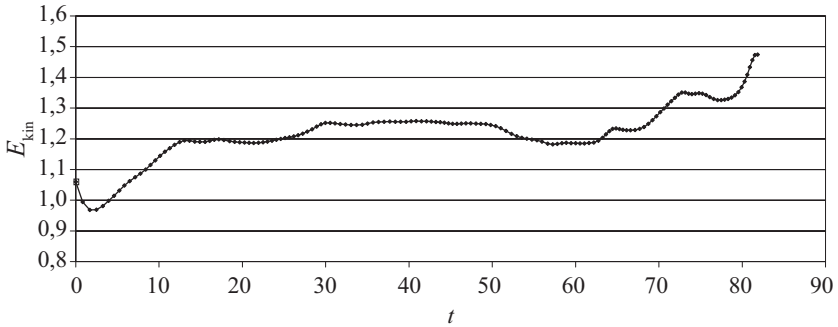


Рис. 3.7. Схема Лакса — Вендроффа. Поведение кинетической энергии на сетке 64×64 при вязкости $\mu = 0,0025h^2$ на вихре Тейлора—Грина

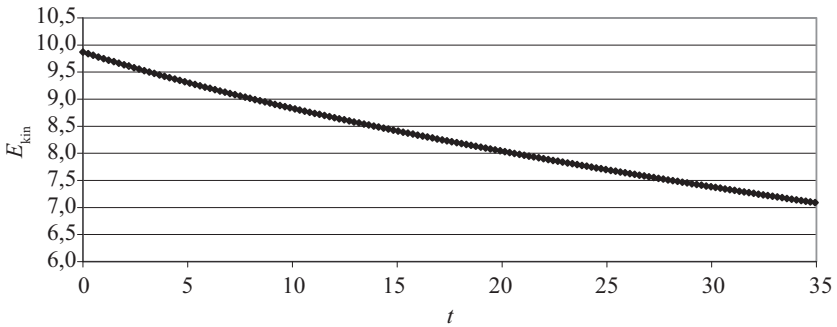


Рис. 3.8. Схема Лакса — Вендроффа. Поведение кинетической энергии на сетке 64×64 при вязкости $\mu = 0,01h^2$ на вихре Тейлора—Грина при $u_0 = v_0 = 0$

При перемещении вихря Тейлора—Грина по сетке со скоростью $u_0 = v_0 = 0,5$ характер численной диссипации дисперсии заметно меняется. На рис. 3.11 и 3.12 представлены деформации формы завихренности, а на рис. 3.13 — график изменения кинетической энергии в таком движении.

Сравнение поведения кинетической энергии в двух расчетах показывает, что имеет место довольно странный эффект — трансляционное перемещение по сетке приводит к уменьшению аппроксимационной вязкости, в то время как паразитная дисперсия возрастает.

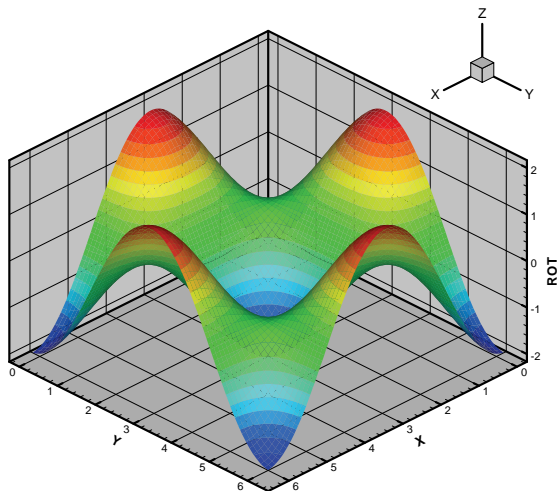


Рис. 3.9. Схема Лакса—Вендроффа. Завихренность в стационарном вихре Тейлора—Грина в начальный момент $T = 0$ на сетке 64×64

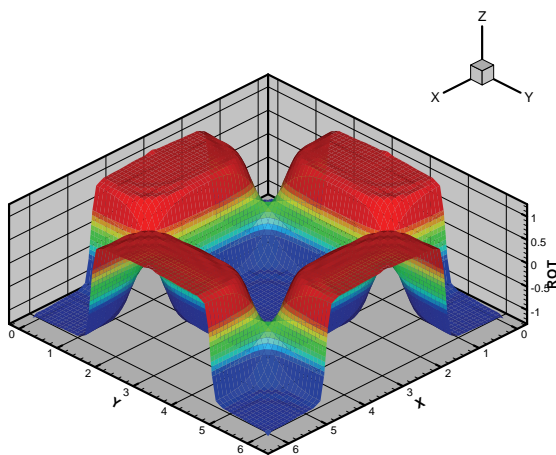


Рис. 3.10. Схема Лакса—Вендроффа. Завихренность в стационарном вихре Тейлора—Грина в момент $T = 35$ на сетке 64×64

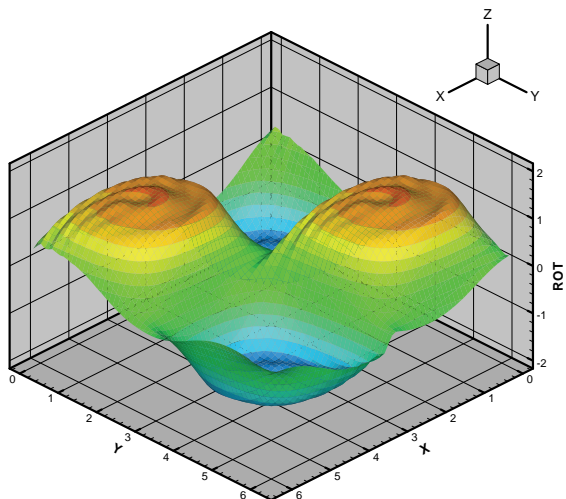


Рис. 3.11. Схема Лакса—Вендроффа. Завихренность в вихре Тейлора—Грина в момент $T = 15,7$ при трансляции со скоростью $u_0 = v_0 = 0,5$

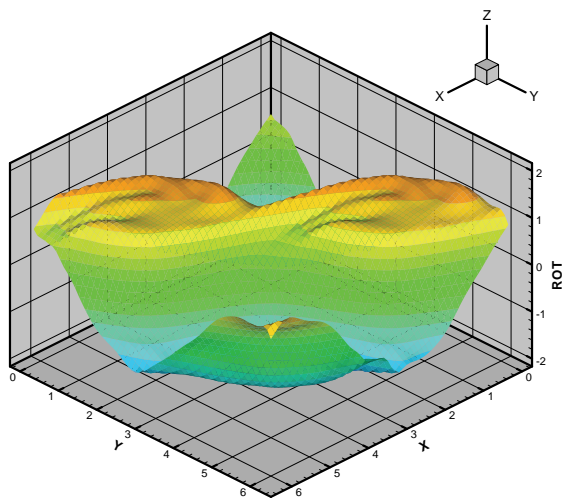


Рис. 3.12. Схема Лакса—Вендроффа. Завихренность в вихре Тейлора—Грина в момент $T = 35$ при трансляции со скоростью $u_0 = v_0 = 0,5$

К такому же выводу приводит и анализ динамики кинетической энергии в задаче об одиноком вихре. На рис. 3.14 видно, что потеря энергии в движущемся вихре на отрезке времени $\Delta T = 100$ составляет $\Delta E_{\text{kin}} \approx 0,01$, в то время как в стационарном вихре (рис. 3.19) $\Delta E_{\text{kin}} \approx 0,03$.

Форма стационарного вихря (рис. 3.15 и 3.16) за этот же период изменяется значительно сильнее формы подвижного вихря (рис. 3.17 и 3.18). Видно, что в первом случае наибольшей диссипации подвергаются высокочастотные гармоники, в то время как во втором распределение диссипации по длинам волн более равномерное. Все расчеты, представленные выше, были проделаны при числе Куранта $\text{CFL} = 0,25$.

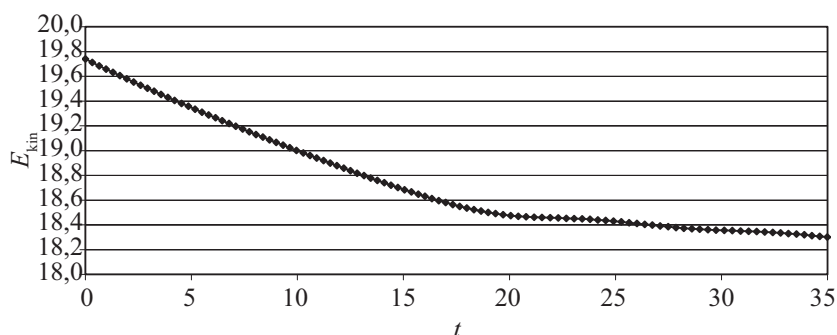


Рис. 3.13. Схема Лакса—Вендроффа. Диссипация энергии в вихре Тейлора—Грина при $u_0 = v_0 = 0,5$ на сетке 64×64

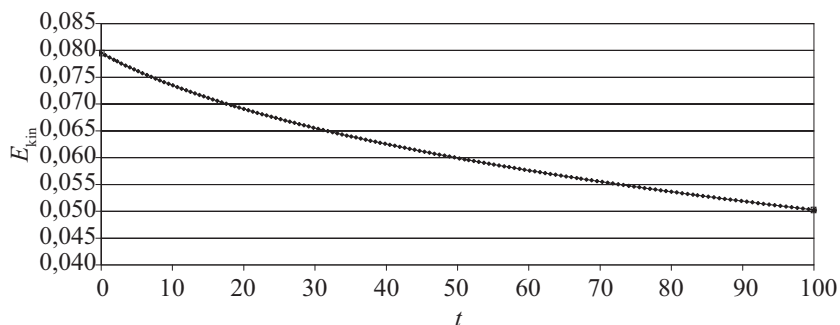


Рис. 3.14. Диссипация кинетической энергии при расчете одинокого стационарного вихря по схеме Лакса—Вендроффа на сетке 64×64

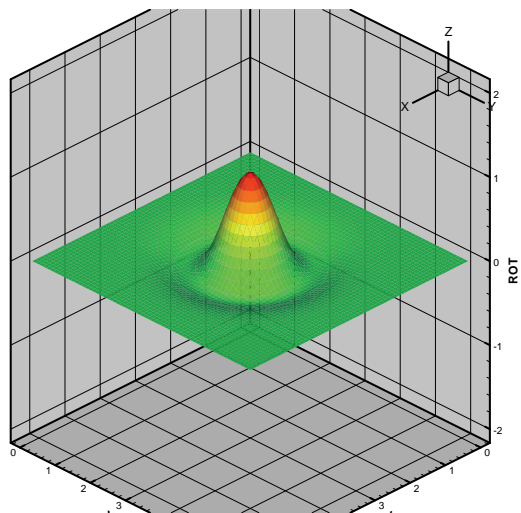


Рис. 3.15. Завихренность в стационарном одиноком вихре
в момент $T = 0$

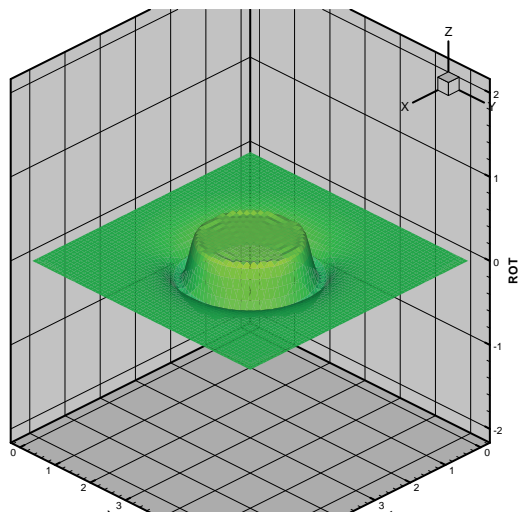


Рис. 3.16. Завихренность в стационарном одиноком вихре
в момент $T = 100$

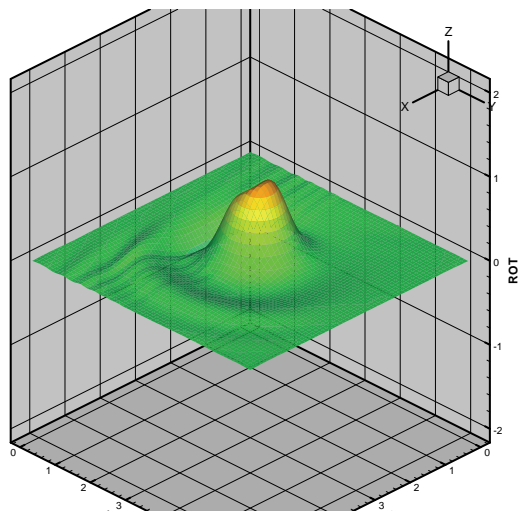


Рис. 3.17. Схема Лакса—Вендроффа. Завихренность в нестационарном одиноком вихре в момент $T = 38,8$, $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$ на сетке 64×64

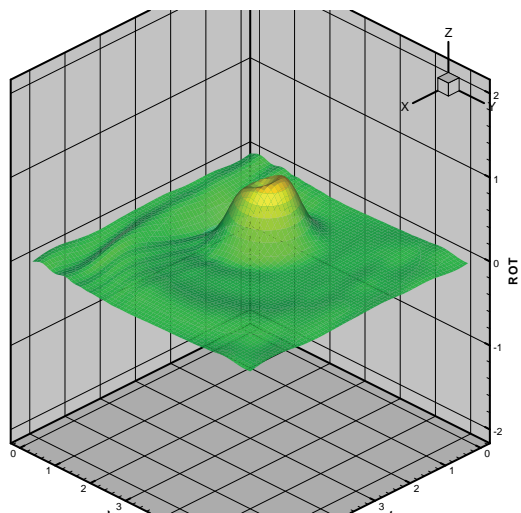


Рис. 3.18. Схема Лакса—Вендроффа. Завихренность в нестационарном одиноком вихре в момент $T = 89,9$, $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$ на сетке 64×64

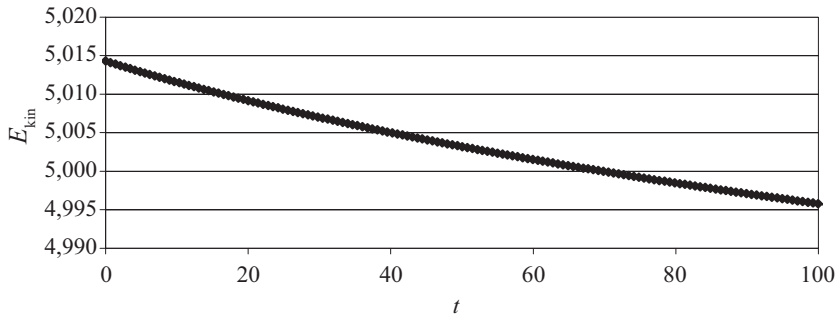


Рис. 3.19. Схема Лакса—Вендроффа. Диссипация энергии в одиноком вихре, перемещающемся по сетке 64×64 со скоростью $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$

3.2. Решение модельных задач по схеме Аракавы—Лилли («Крест»)

Нелинейная неустойчивость оказывает на трехслойную схему Аракавы—Лилли заметно большее влияние по сравнению со схемой Лакса—Вендроффа в том смысле, что для подавления ее негативного воздействия необходим значительно больший коэффициент искусственной вязкости. Стабилизация решения и поведения кинетической энергии на задаче Тейлора—Грина на сетке 64×64 происходит при $\mu = 0,1h^2$, что на порядок превышает минимально возможную величину для схемы Лакса—Вендроффа. Влияние этого обстоятельства ярко проявляется на скорости диссипации кинетической энергии (рис. 3.20)

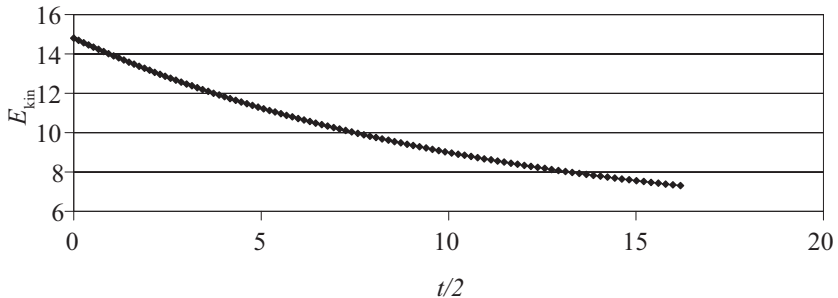


Рис. 3.20. Схема «Крест». Вихрь Тейлора—Грина, $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$ на сетке 64×64

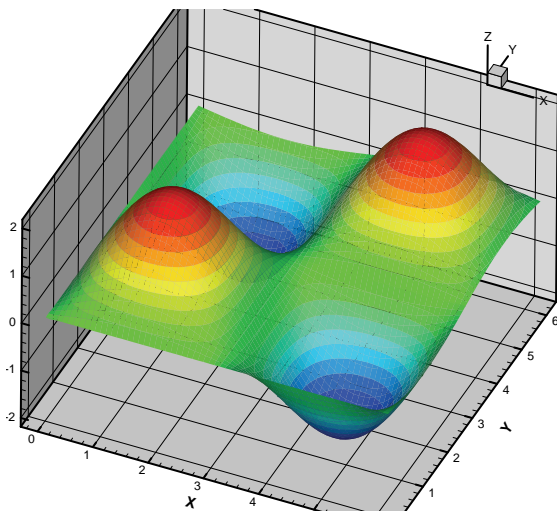


Рис. 3.21. Схема «Крест». Начальный профиль вихря Тейлора—Грина,
 $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$ на сетке 64×64

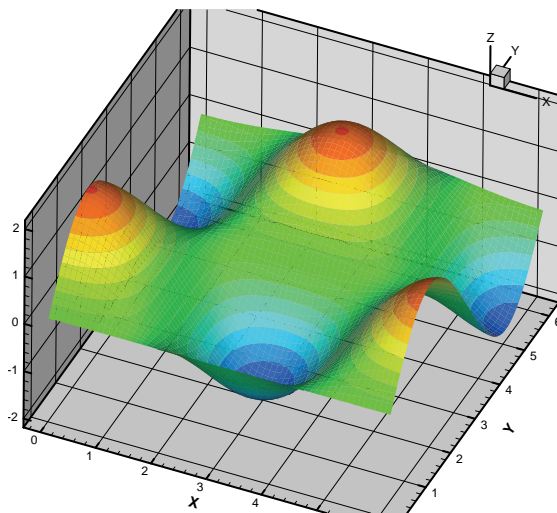


Рис. 3.22. Схема «Крест». Форма вихря Тейлора—Грина на момент $T = 9,5$,
 $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$ на сетке 64×64

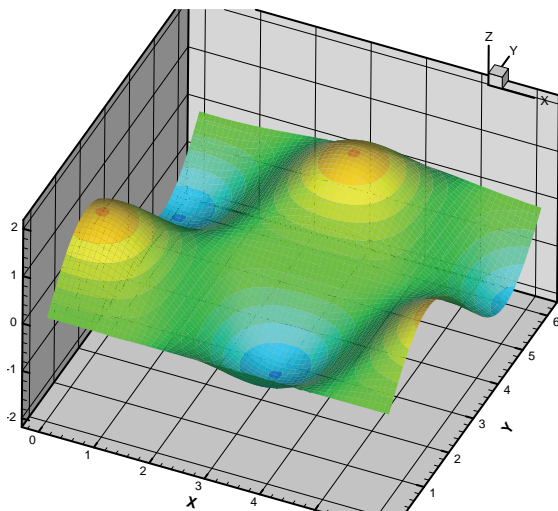


Рис. 3.23. Схема «Крест». Форма вихря Тейлора—Грина на момент $T = 22,6$.
 $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$ на сетке 64×64

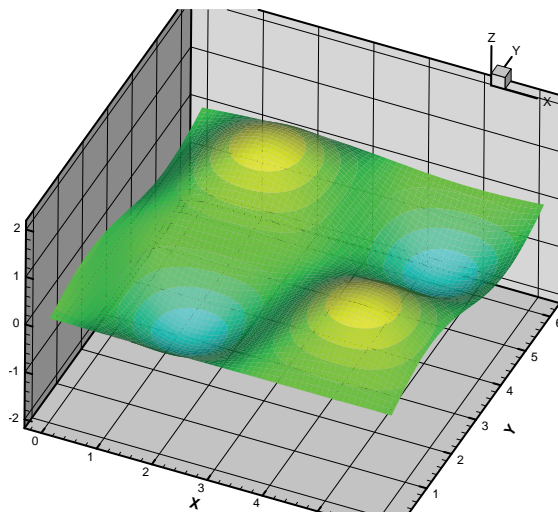


Рис. 3.24. Схема «Крест». Форма вихря Тейлора—Грина на момент $T = 32$.
 $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$ на сетке 64×64

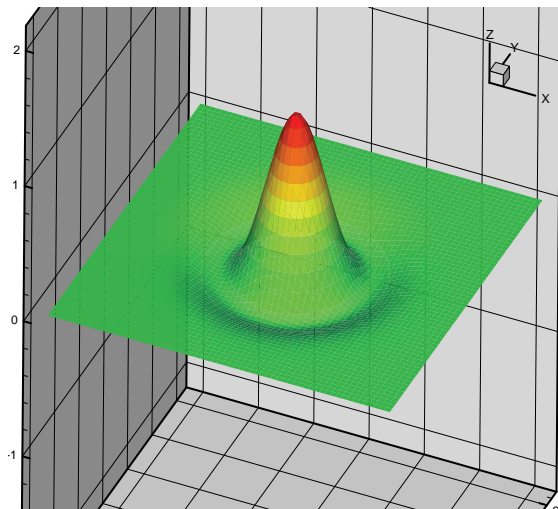


Рис. 3.25. Схема «Крест». Сетка 64×64, начальный профиль

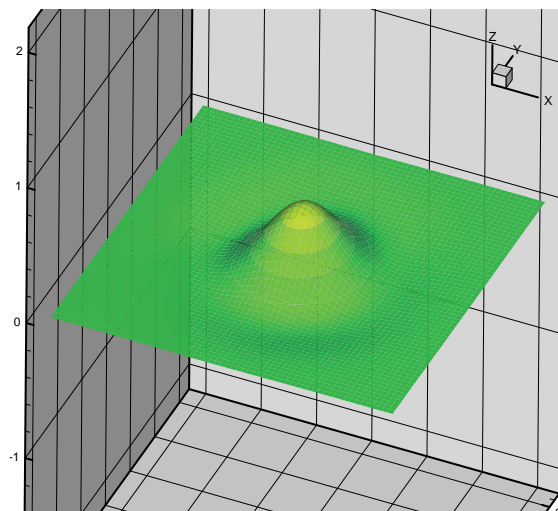


Рис. 3.26. Схема «Крест». Сетка 64×64, один пролет, $T = 12,5$

Изменение формы вихря Тейлора—Грина с течением времени приведено на рис. 3.21—3.24. Видно, что амплитуда сильно затухает, в то время как форма остается почти самоподобной. Последнее обстоятельство свиде-

тельству, по всей видимости, не столько о малости фазовых ошибок, сколько об относительной малости времени расчета, обусловленного чрезмерно большой амплитудной ошибкой.

На рис. 3.25 и 3.26 показана форма вихря после прохождения им одной длины области. Затухание кинетической энергии со временем в задаче о движущемся одиноком вихре представлено на рис. 3.27. Расчеты по схеме Аракавы—Лили («Крест») проводились при числе Куранта $CFL = 0,1$.

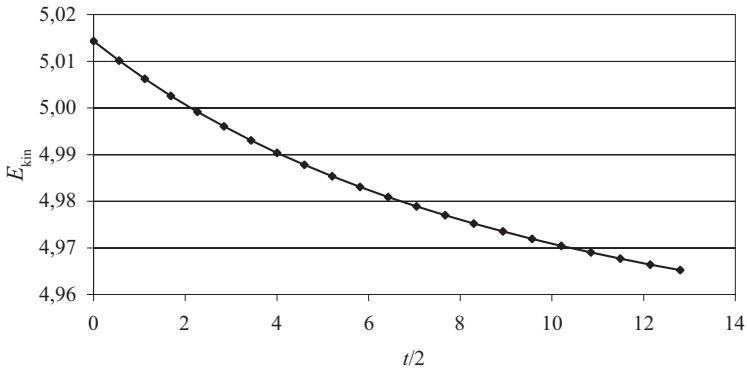


Рис. 3.27. Схема «Крест». Затухание кинетической энергии в задаче об одиноком вихре, перемещающемся по сетке 64×64 с постоянной скоростью

$$u_0 = 0,5, \quad v_0 = 0$$

3.3. Решение модельных задач по схеме Годунова

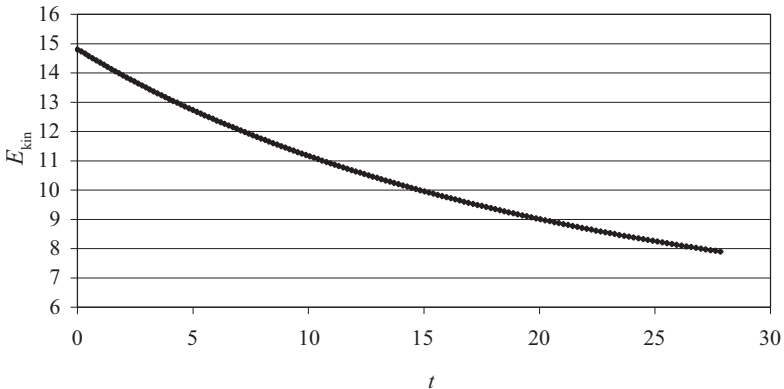


Рис. 3.28. Схема Годунова. Изменение кинетической энергии вихря Тейлора—Грина, перемещающегося по сетке 64×64 со скоростью $u_0 = 0,5, \quad v_0 = 0$

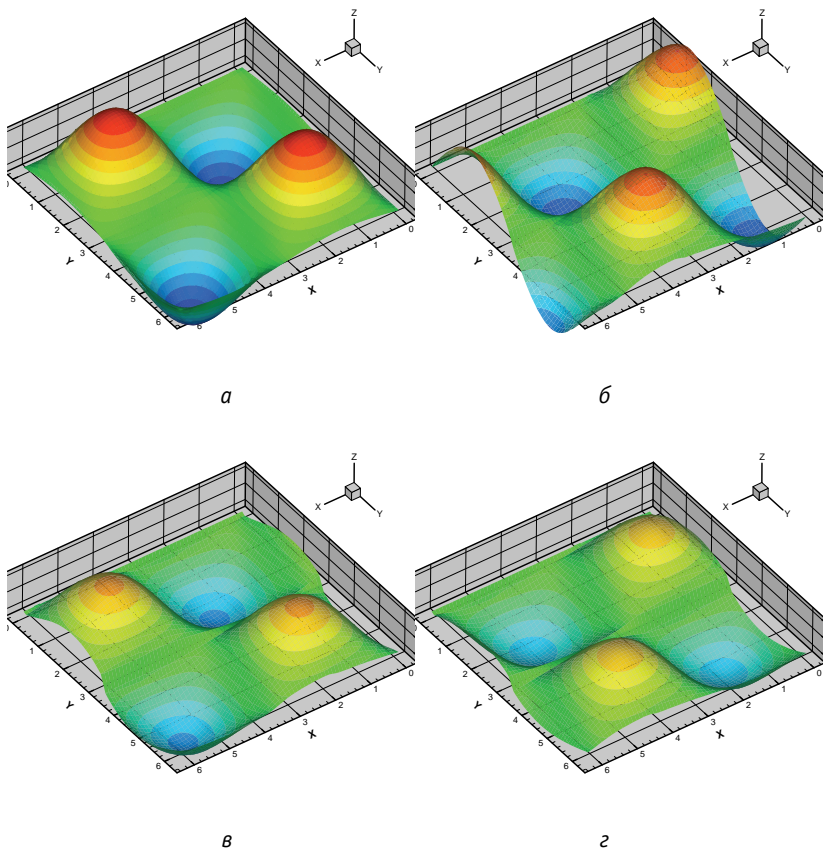


Рис. 3.29. Схема Годунова. Вихрь Тейлора—Грина на сетке 64×64 ,
перемещающийся со скоростью $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$:
а — $T = 0$, б — $T = 3,97$, в — $T = 12,8$, г — $T = 17,5$

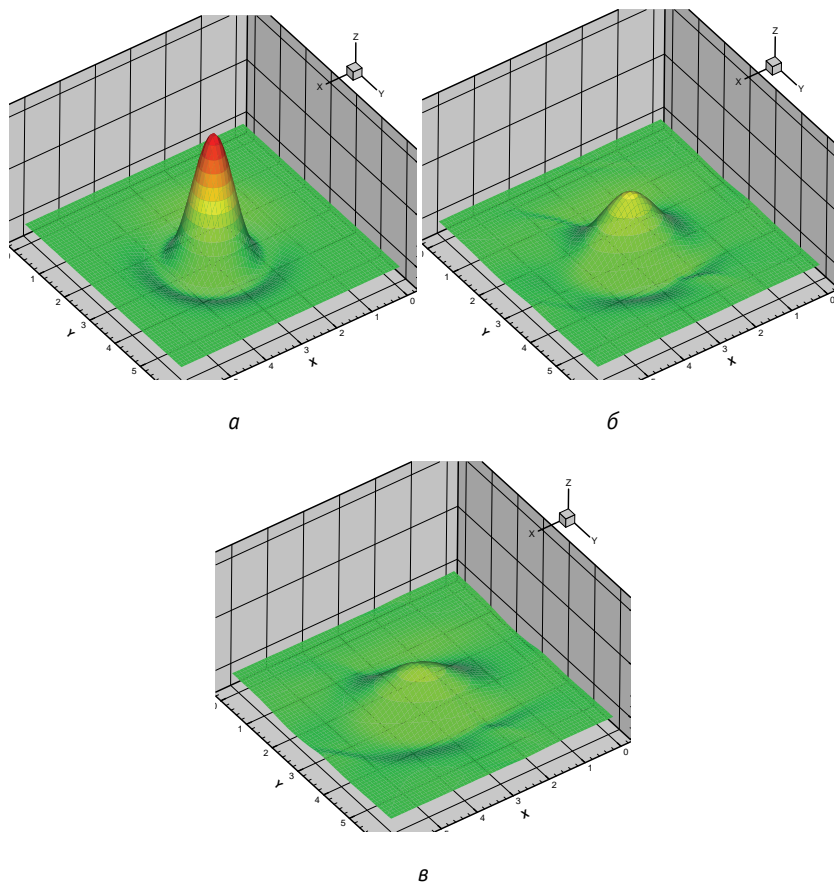


Рис. 3.30. Схема Годунова. Одинокий вихрь на сетке 64×64 , перемещающийся со скоростью $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$:
a — $T = 0$, *б* — $T = 12,6$, *в* — $T = 37,6$

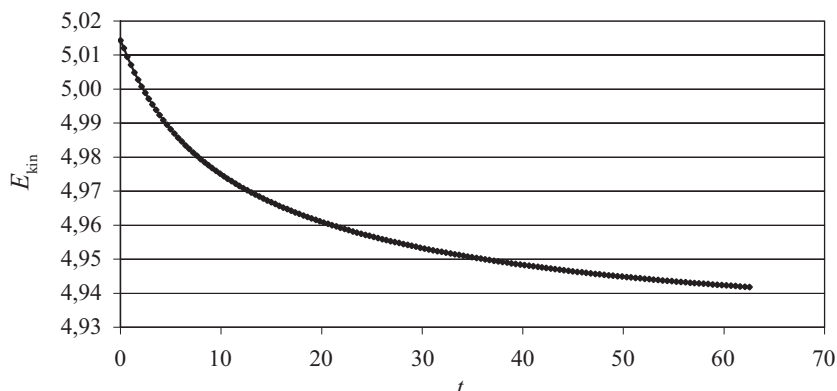


Рис. 3.31. Схема Годунова. Изменение кинетической энергии одинокого вихря, перемещающегося по сетке 64×64 со скоростью $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0$

3.4. Решение модельных задач по схеме «Кабаре»

Схема «Кабаре» по своим характеристикам качественно отличается от остальных классических разностных схем, рассмотренных выше, поэтому, чтобы сделать ее недостатки более выраженными, будем рассматривать результаты расчета описанных вихревых течений на более грубой сетке 32×32 .

На рис. 3.32 приведен график кинетической энергии в зависимости от времени в задаче о вихре Тейлора—Грина при $u_0 = v_0 = 0$. Видно, что энергия практически не диссипирует на протяжении многих оборотов. На рис. 3.33 изображена аналогичная зависимость при перемещении вихря со скоростью $u_0 = v_0 = 0,5$. Энергия в последнем случае изменяется более значительно и к тому же немонотонно, однако эти колебания по амплитуде не превышают десятых долей процента. Что касается фазовых ошибок, то их проявление вполне заметно и представлено на рис. 3.34—3.37.

В задаче об одиноком вихре ситуация аналогична. Если центр вихря неподвижен ($u_0 = v_0 = 0$), вращение вихря устойчиво и происходит практически без затухания (рис. 3.38). Если центр вихря перемещается со скоростью $u_0 = v_0 = 0,5$, появляется небольшая аппроксимационная вязкость, и кинетическая энергия (рис. 3.39) уменьшается.

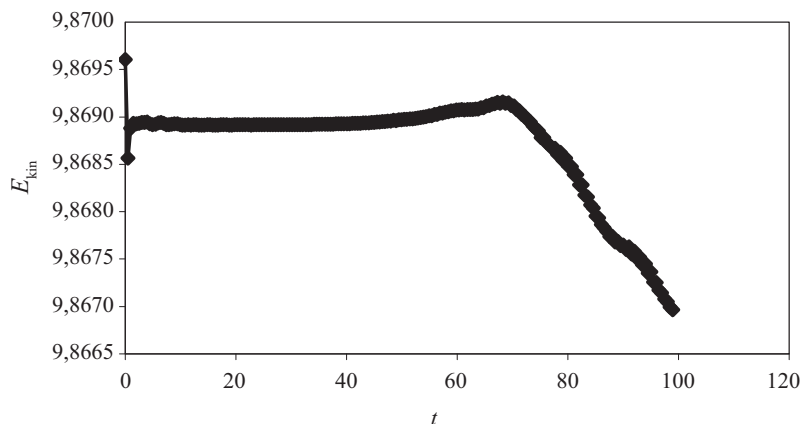


Рис. 3.32. Схема «Кабаре». Зависимость кинетической энергии от времени в задаче о стационарном вихре Тейлора—Грина на сетке 32×32

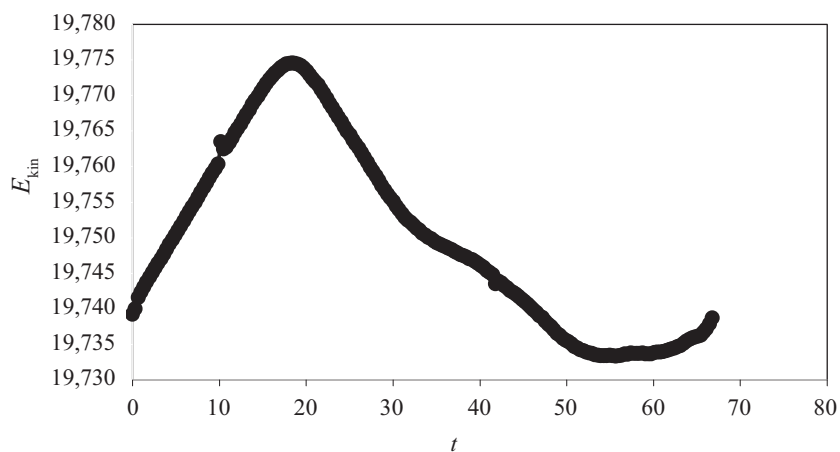


Рис. 3.33. Схема «Кабаре». Зависимость кинетической энергии от времени в задаче о вихре Тейлора—Грина с $u_0 = v_0 = 0,5$ на сетке 32×32

Все расчеты проводились при числе Куранта $CFL = 0,25$ и стандартных значениях настроечных параметров схемы «Кабаре»: $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, т. е. без диссипатора Паниковского и расширения области дозволённости вариации потоковых переменных. Приведенные расчеты свидетельствуют о высоком качестве получаемых решений на очень грубых расчетных сетках.

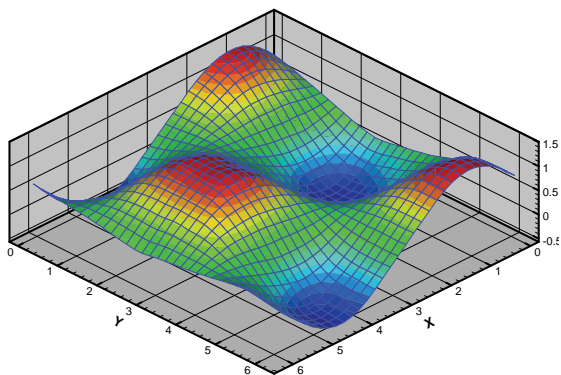


Рис. 3.34. Схема «Кабаре». Компонента скорости $u(x, y)$ в момент $t = 65$
($u_0 = v_0 = 0,5$) на сетке 32×32

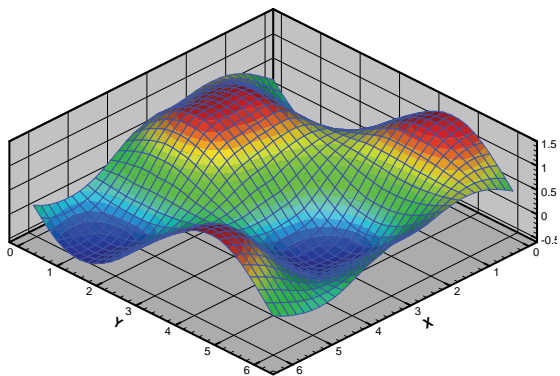


Рис. 3.35. Схема «Кабаре». Компонента скорости $v(x, y)$ в момент $t = 65$
($u_0 = v_0 = 0,5$) на сетке 32×32

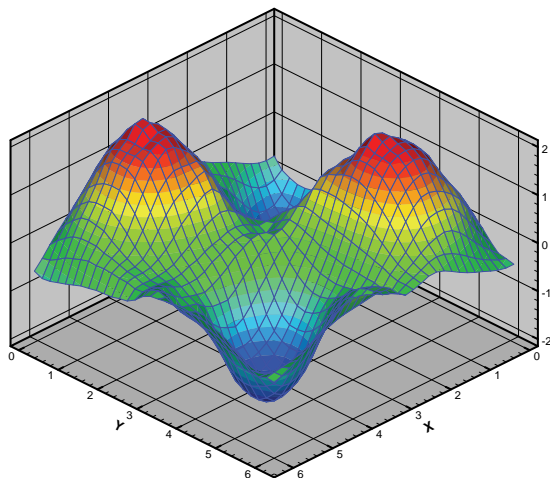


Рис. 3.36. Схема «Кабаре». Ротор скорости в момент времени $T = 65$
($u_0 = v_0 = 0,5$) на сетке 32×32

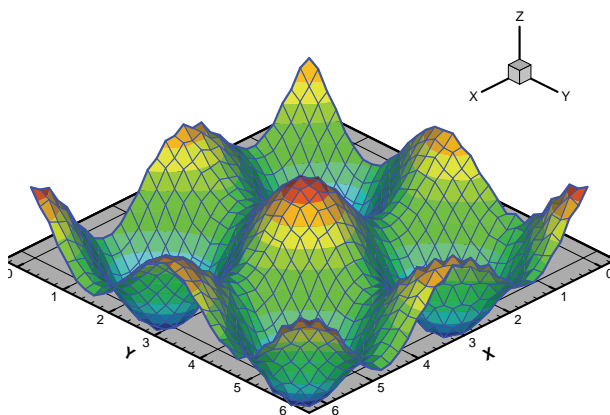


Рис. 3.37. Схема «Кабаре». Поле давления в момент времени $T = 65$
($u_0 = v_0 = 0,5$) на сетке 32×32

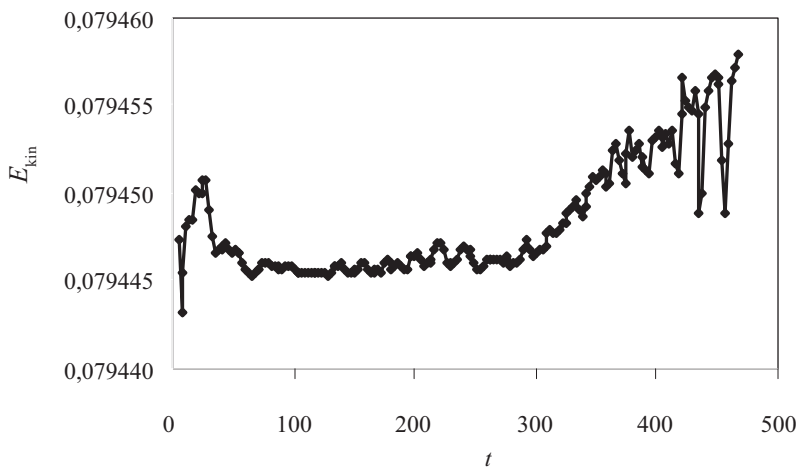


Рис. 3.38. Схема «Кабаре». Изменение кинетической энергии со временем в задаче об одиноком вихре. $u_0 = v_0 = 0$, сетка 32×32

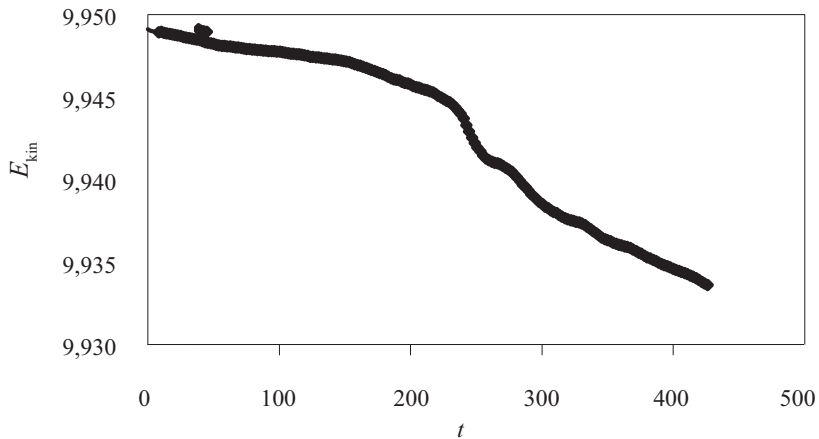


Рис. 3.39. Схема «Кабаре». Изменение кинетической энергии со временем в задаче об одиноком вихре. $u_0 = v_0 = 0,5$, сетка 32×32

4. Моделирование затухания однородной и изотропной турбулентности в двумерном случае

Распространенным способом упрощения физической задачи при ее теоретическом и численном решении является снижение размерности пространства. Однако турбулентность — явление существенно трехмерное, и переход здесь к плоской симметрии приводит к качественным изменениям свойств течений. Это было независимо осознано Крейчаном [29] и Бэтчелором [30] в середине 60-х годов прошлого столетия. Несмотря на то что практическая реализация двумерных турбулентных потоков чрезвычайно сложна, двумерная турбулентность привлекла к себе внимание исследователей, которое не ослабевает по сей день [31—51]. Качественное своеобразие двумерной турбулентности дает богатые возможности для опробования различных моделей турбулентности и численных методов, поскольку модели, претендующие на адекватное описание турбулентности, должны быть чувствительны к изменению размерности пространства и правильно отражать ее свойства в случае как трех, так и двух измерений.

В квадрате $2\pi \times 2\pi$ с периодическими граничными условиями задается случайное поле скоростей, отвечающее начальной спектральной функции распределения (см. рис. 2.2) вида

$$E_k(k) = Ak^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{\alpha k}{2k_{\max}^2}\right)^2\right\}, \quad (4.1)$$

где α — степенной показатель, определяющий крутизну наклона кривой при малых волновых числах; k_{\max} — волновое число, при котором кривая (4.1) достигает максимума.

Случайное поле скорости, получаемое на основе распределения (4.1), на конечной сетке не является дивергентным, поэтому сразу после процедуры задания оно подвергается процедуре солениодации.

Исследуем статистические закономерности затухания однородной изотропной турбулентности на последовательности сгущающихся сеток, рассчитываемой по описанным ранее классическим разностным схемам, в том числе и по схеме «Кабаре». Поскольку схема «Кабаре» обладает качественным преимуществом перед другими схемами на вихревых решениях, рассмотрим результаты, к которым она приводит, более подробно и проанализируем их зависимость от настроечных параметров, во многом искусственно встроенных в основной алгоритм.

4.1. Моделирование динамики случайного поля скоростей по схеме «Кабаре»

На расчетной сетке 64×64 сгенерируем конкретную реализацию случайного поля скоростей в соответствии с (4.1) и промоделируем ее развитие во времени при стандартных схемных параметрах.

На рис. 4.1—4.4 приведены изоконтуры ротора скорости на различные моменты времени, рассчитанные по схеме «Кабаре». Из этих рисунков видно, что достаточно быстро формируется вихревая структура течения, вихри интенсивно взаимодействуют друг с другом, происходит слияние вихрей одного знака, вихри укрупняются и их число уменьшается до тех пор, пока не останутся два противоположных по знаку вихря, которые продолжают диссипировать, вращаясь друг относительно друга. Очевидно, что в описанном процессе каскад энергии направлен от структур с меньшими размерами к структурам бóльших размеров. На рис. 4.5 и 4.6 приведены изометрические изображения взаимодействующих вихрей в разные моменты времени. Здесь хорошо видно укрупнение вихрей без заметного изменения их интенсивности.

На рис. 4.7—4.10 представлены спектральные характеристики кинетической энергии, устанавливающиеся в процессе нелинейного взаимодействия вихревых структур на расчетных сетках различной густоты, в три фиксированных момента времени. При больших и средних волновых числах спектральные характеристики повсеместно и с большой точностью приобретают наклон -4 . Это заметно расходится как с теоретическими предсказаниями Бэтчелора (-3), так и с теорией Колмогорова ($-5/3$).

Многочисленные расчеты показали, что этот результат чрезвычайно устойчив и практически не зависит ни от параметров начального распределения скорости (4.1), ни от параметров схемы «Кабаре» в допустимых областях их варьирования.

Наклон спектральных кривых остается неизменным и в тех случаях, когда течение вырождается во взаимодействие пары вихрей. По всей видимости, структура этих вихрей автоматически подстраивается к некоторому «автомоделному» виду, обеспечивающему постоянный наклон спектральной кривой. Широкий спектр мнений по этому вопросу отражен в [31—35].

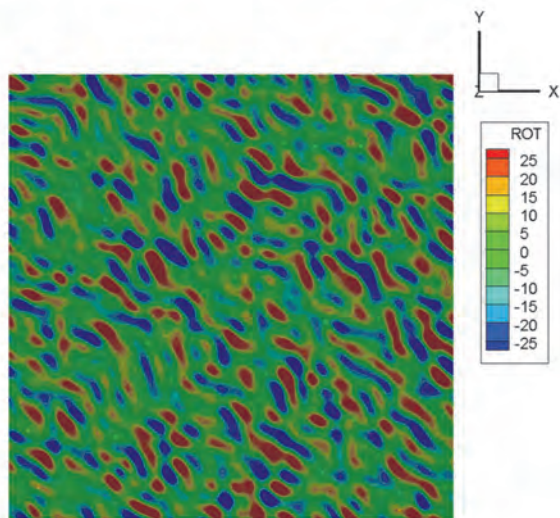


Рис. 4.1. Схема «Кабаре». Поле завихренности при $T = 0$, сетка 64×64

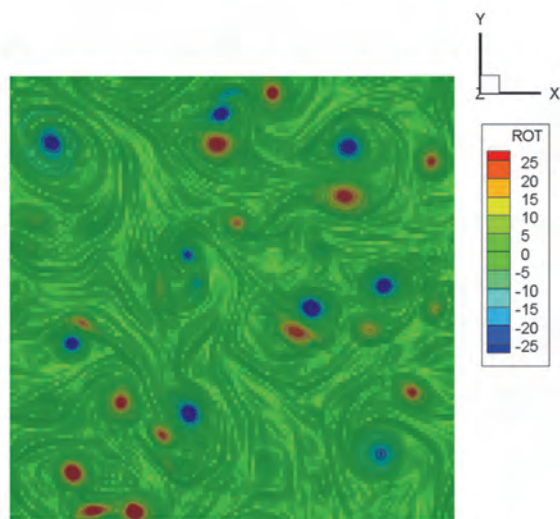


Рис. 4.2. Схема «Кабаре». Поле завихренности при $T = 10$, сетка 64×64

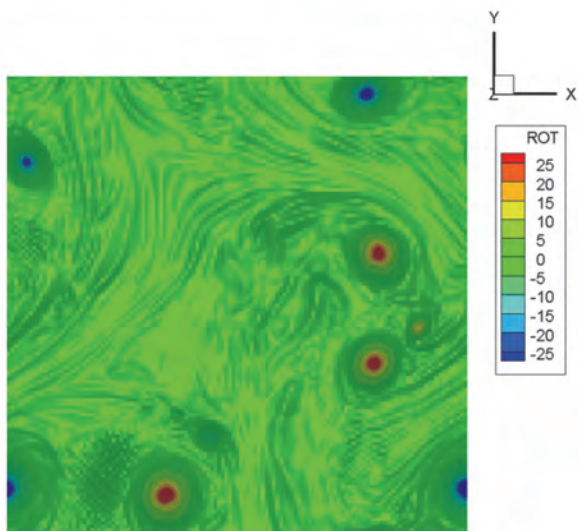


Рис. 4.3. Схема «Кабаре». Поле завихренности при $T = 50$, сетка 64×64

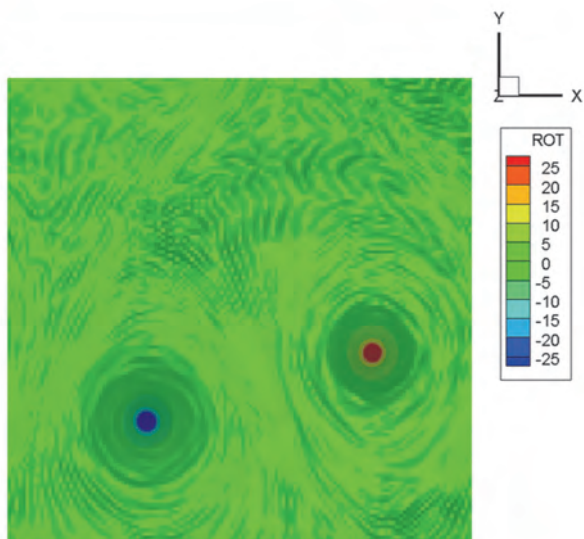


Рис. 4.4. Схема «Кабаре». Поле завихренности при $T = 200$, сетка 64×64

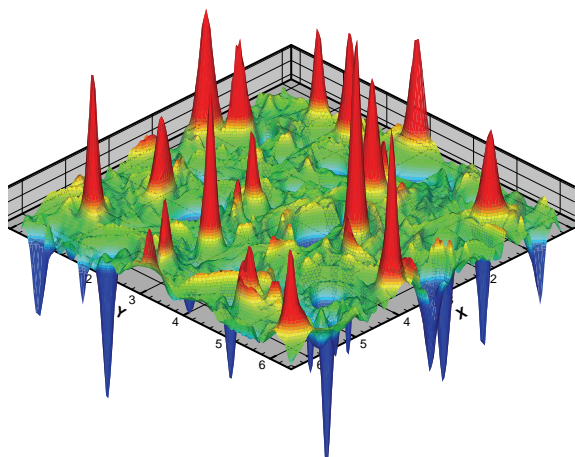


Рис. 4.5. Схема «Кабаре». Поле ротора. $T = 50$, сетка 128×128

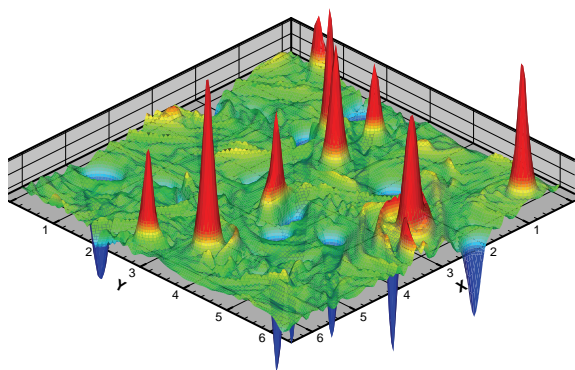


Рис. 4.6. Схема «Кабаре». Поле ротора. $T = 100$, сетка 128×128

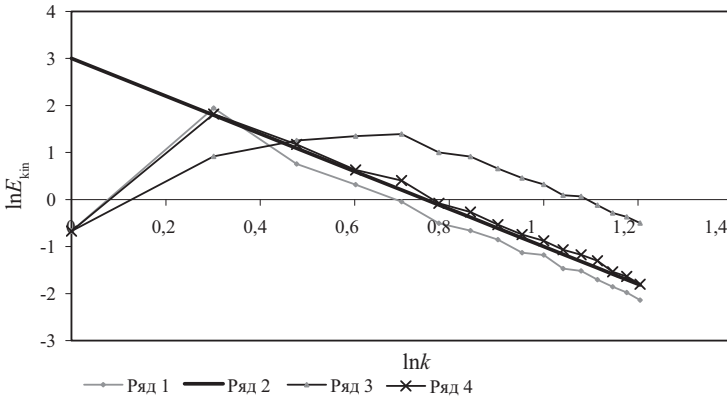


Рис. 4.7. Схема «Кабаре». Спектр турбулентности, расчетная сетка 32×32 .
Ряд 1 — спектральная функция на момент $T = 190$, ряд 2 — прямая с наклоном -4 ,
ряд 3 — спектральная функция на момент $T = 10$, ряд 4 — спектральная функция
на момент $T = 88$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0,0$, $CFL = 0,25$, $\alpha = 2$, $k_{\max} = 5$. Осреднение
по 20 реализациям

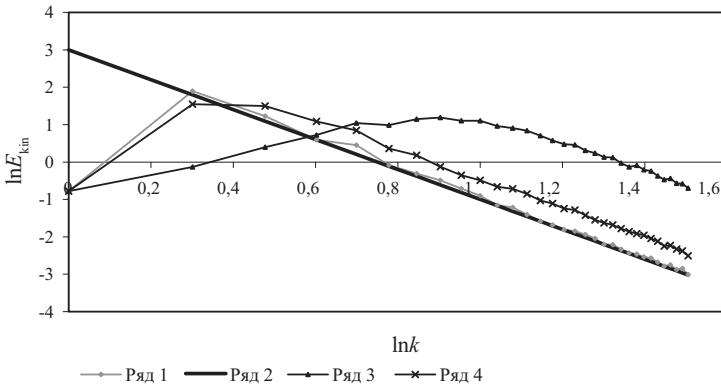


Рис. 4.8. Схема «Кабаре». Спектр турбулентности, расчетная сетка 64×64 .
Ряд 1 — спектральная функция на момент $T = 190$, ряд 2 — прямая с наклоном -4 ,
ряд 3 — спектральная функция на момент $T = 10$, ряд 4 — спектральная функция
на момент $T = 88$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0,0$, $CFL = 0,25$, $\alpha = 2$, $k_{\max} = 5$. Осреднение
по 20 реализациям

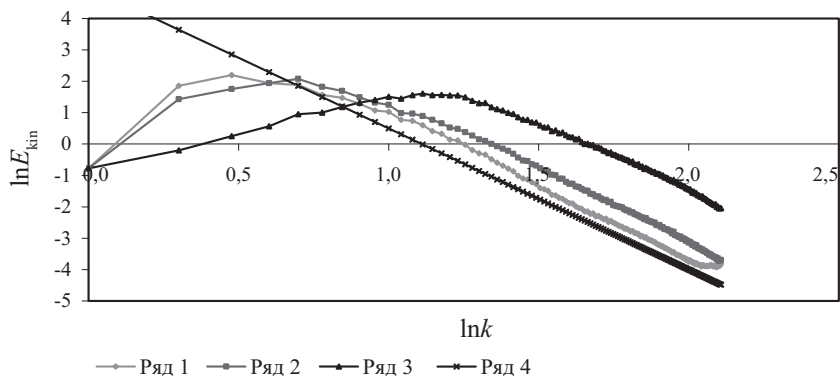


Рис. 4.9. Схема «Кабаре». Спектр турбулентности, расчетная сетка 256×256 .
 Ряд 1 — спектральная функция на момент $T = 200$, ряд 2 — спектральная функция на момент $T = 100$, ряд 3 — спектральная функция на момент $T = 10$, ряд 4 — прямая с наклоном $-4,5$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0,0$, $CFL = 0,25$, $\alpha = 2$, $k_{\max} = 5$.
 Осреднение по 20 реализациям

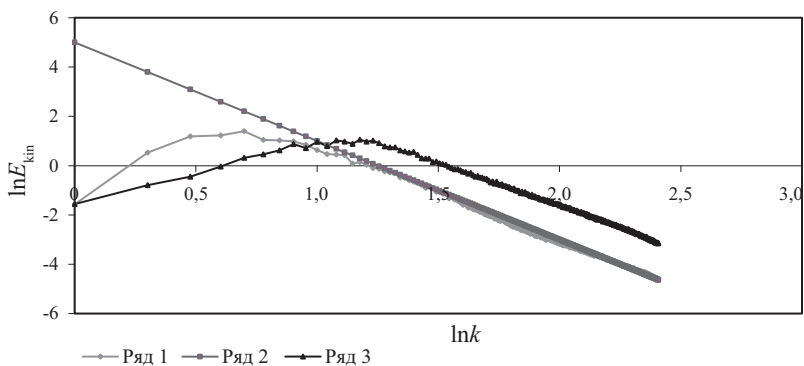


Рис. 4.10. Схема «Кабаре». Спектр турбулентности, расчетная сетка 512×512 .
 Ряд 1 — спектральная функция на момент $T = 200$, ряд 2 — прямая с наклоном -4 , ряд 3 — спектральная функция на момент $T = 10$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0,0$, $CFL = 0,25$, $\alpha = 2$, $k_{\max} = 5$. Осреднение по 10 реализациям

4.2. Использование схемы Лакса—Вендроффа

При моделировании процесса затухания двумерной однородной изотропной турбулентности по схеме Лакса—Вендроффа на последовательности сгущающихся сеток были выявлены любопытные закономерности. Так, если вести расчет с «оптимальным» коэффициентом искусственной вязкости, полученным в предыдущем разделе для сетки 64×64 , то для последовательности сеток 32×32 , 64×64 и 128×128 при начальных условиях (4.1) с $\alpha = 2$, $k_{\max} = 5$ наклон спектральных характеристик соответствует как предсказаниям Бэтчелора [30] ($k = -3$), так и предсказаниям Колмогорова [28] ($k = -5/3$). Это хорошо видно на рис. 4.11—4.13.

Однако при увеличении оптимального коэффициента, который достаточно трудно угадать, в десять раз, мы, как это следует из рис. 4.14—4.16, получаем наклоны ($k = -3$), ($k = -7$), ($k = -6$).

Полученные результаты, по всей видимости, связаны с особенностями схемы Лакса—Вендроффа, аномально быстро демпфирующей высокочастотную часть спектра.

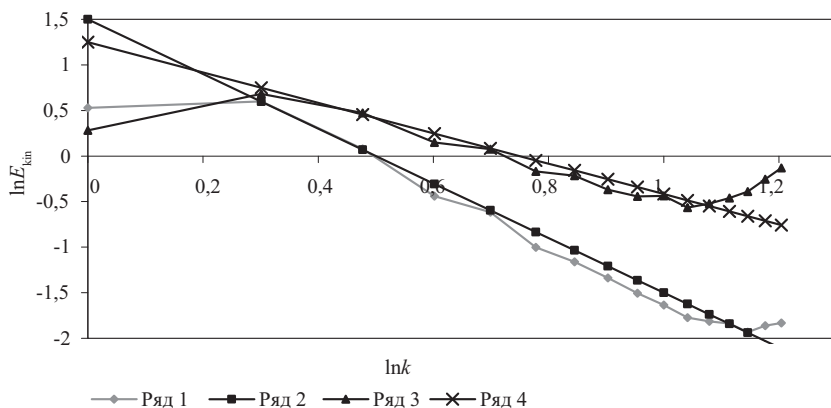


Рис. 4.11. Схема Лакса—Вендроффа. Сетка 32×32 , вязкость $\mu = 0,01H^2$.

Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 100$, ряд 2 — прямая с наклоном -3 , ряд 3 — спектральная кривая на момент $T = 50$, ряд 4 — прямая с наклоном $-5/3$

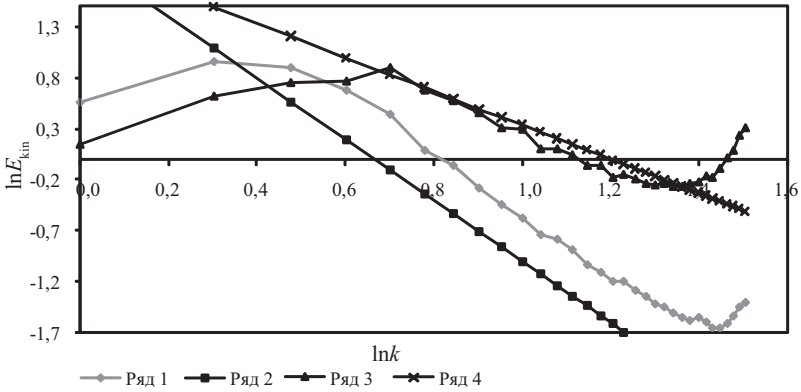


Рис. 4.12. Схема Лакса—Вендроффа. Сетка 64×64 , вязкость $\mu = 0,01H^2$. Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 100$, ряд 2 — прямая с наклоном — 3, ряд 3 — спектральная кривая на момент $T = 50$, ряд 4 — прямая с наклоном $-5/3$

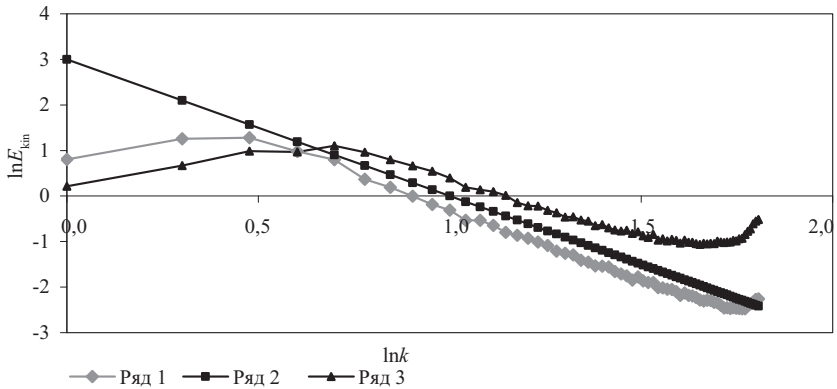


Рис. 4.13. Схема Лакса—Вендроффа. Сетка 128×128 , вязкость $\mu = 0,01H^2$. Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 100$, ряд 2 — прямая с наклоном -3 , ряд 3 — спектральная кривая на момент $T = 50$

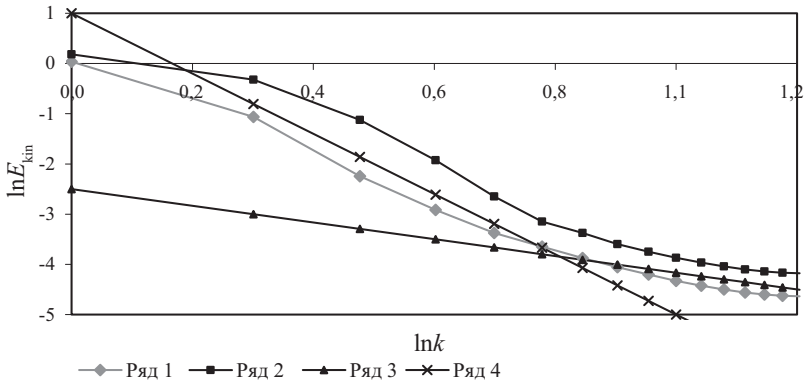


Рис. 4.14. Схема Лакса—Вендроффа. Сетка 32×32 , вязкость $\mu = 0,1H^2$.
 Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 100$, ряд 2 — спектральная кривая на момент $T = 50$, ряд 3 — прямая с наклоном $-5/3$, ряд 4 — прямая с наклоном -3

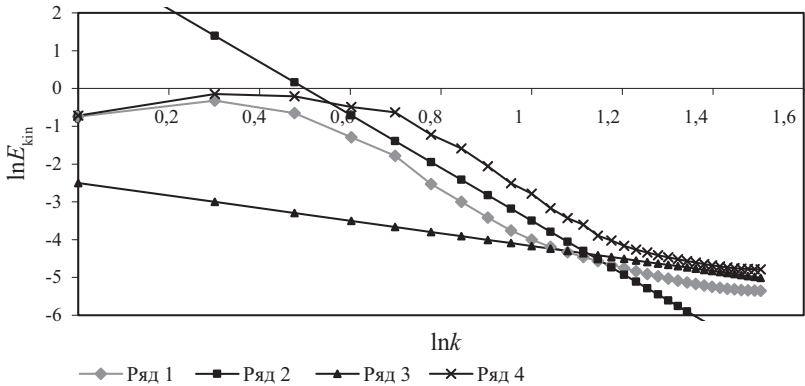


Рис. 4.15. Схема Лакса—Вендроффа. Сетка 64×64 , вязкость $\mu = 0,1H^2$.
 Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 100$, ряд 2 — прямая с наклоном -7 , ряд 3 — прямая с наклоном $-5/3$, ряд 4 — спектральная кривая на момент $T = 50$

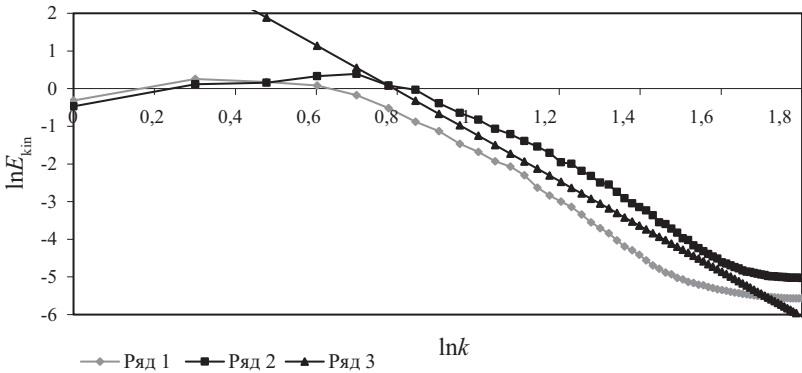


Рис. 4.16. Схема Лакса—Вендроффа. Сетка 128×128 , вязкость $\mu = 0,1H^2$.

Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 100$,
ряд 2 — спектральная кривая на момент $T = 50$,
ряд 3 — прямая с наклоном -6

4.3. Моделирование затухания однородной турбулентности по схеме «Крест»

Как было продемонстрировано в предыдущем разделе на решении вихревых задач, для устранения нелинейной неустойчивости в схему «Крест» в двумерном случае необходимо вводить большую искусственную вязкость, приводящую к значительной амплитудной ошибке. Время жизни начального распределения скорости в этом случае значительно меньше, чем при использовании схемы Лакса—Вендроффа, и не идет ни в какое сравнение со схемой «Кабаре». Расчеты показали, что на этот недостаток накладываются и далеко не блестящие дисперсионные свойства схемы, что приводит к качественно неверной картине спектра кинетической энергии (рис. 4.17 и 4.18).

Из приведенных графиков видно, что в самый ранний момент времени основной вклад дает начальное распределение, а в более поздние моменты формирующиеся хвосты имеют наклон не того знака. Из этого можно сделать вывод, что схема «Крест» в принципе непригодна для моделирования затухания двумерной однородной изотропной турбулентности.

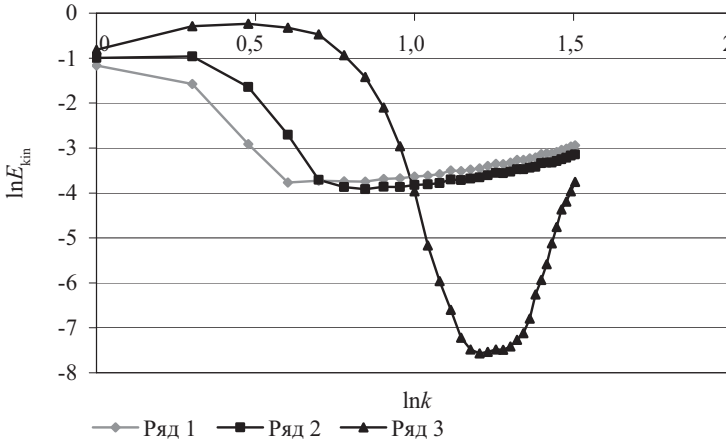


Рис. 4.17. Схема «Крест». Сетка 64×64 , вязкость $\mu = 0,1h^2$.

Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 12$, ряд 2 — спектральная кривая на момент $T = 8$, ряд 3 — спектральная кривая на момент $T = 2$

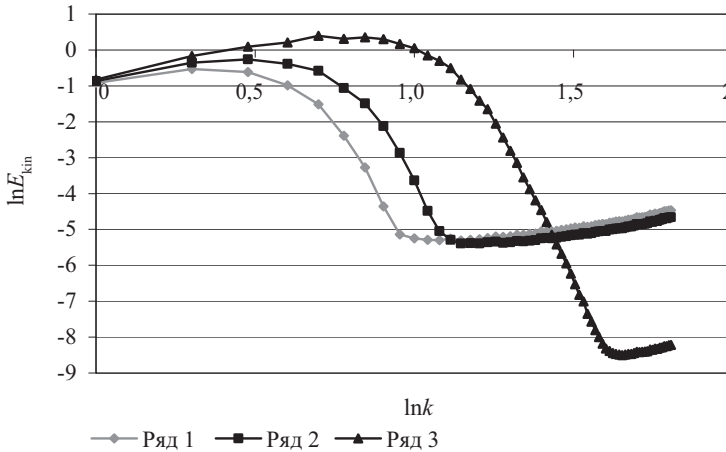


Рис. 4.18. Схема «Крест». Сетка 128×128 , вязкость $\mu = 0,1h^2$. Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 12$, ряд 2 — спектральная кривая на момент $T = 8$, ряд 3 — спектральная кривая на момент $T = 2$

4.4. Схема Годунова

Можно показать, что схема Годунова полностью эквивалентна схеме «Кабаре» при задании параметра диссипатора Паниковского равным единице: $\delta = 1,0$. Это приводит к появлению значительной аппроксимационной вязкости, однако спектральные характеристики остаются такими же, как у схемы «Кабаре» (рис. 4.19 и 4.20).

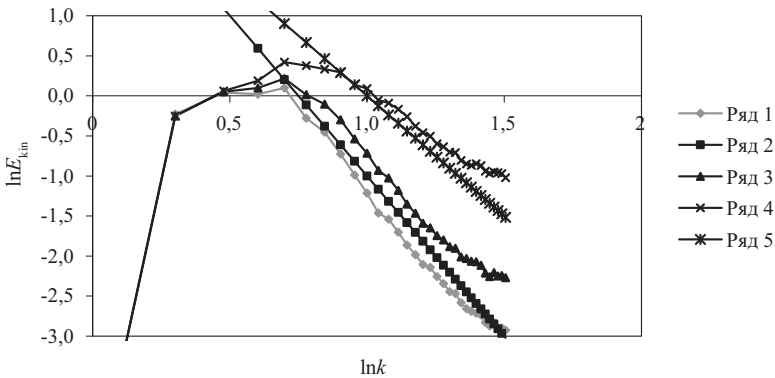


Рис. 4.19. Схема Годунова. Сетка 64×64 . Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 50$, ряд 2 — прямая с наклоном -4 , ряд 3 — спектральная кривая на момент $T = 30$, ряд 4 — спектральная кривая на момент $T = 10$, ряд 5 — прямая с наклоном -3

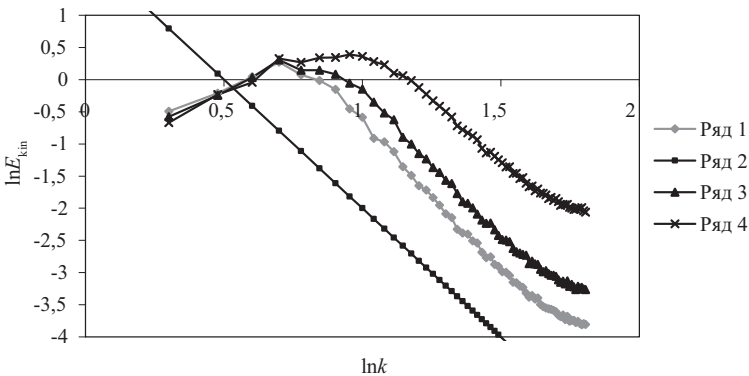


Рис. 4.20. Схема Годунова. Сетка 128×128 . Ряд 1 — спектральная кривая на момент $T = 50$, ряд 2 — прямая с наклоном -4 , ряд 3 — спектральная кривая на момент $T = 30$, ряд 4 — спектральная кривая на момент $T = 10$

5. Моделирование двумерных слоев смешения

Слои смешения являются следующим по популярности объектом приложения сил вычислительного сообщества в гидродинамике после задачи о затухании однородной изотропной турбулентности. При кажущейся простоте постановки эти задачи были и остаются оселком, на котором оттачиваются новые численные методы.

Приведем два примера использования схемы «Кабаре» для численного моделирования развития турбулентности в двумерных слоях смешения, демонстрирующие, на наш взгляд, пригодность этой схемы для неявных LES-алгоритмов.

5.1. Задача о неустойчивости плоской струи

Исходная область делится на три равные горизонтальные полосы. Скорости в верхней и нижней полосах в начальный момент времени равны нулю, в средней полосе горизонтальная скорость равна единице:

$$u(x, y, t_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } (y \leq 2\pi/3), \\ 1, & \text{если } (2\pi/3 \leq y \leq 4\pi/3), \\ 0, & \text{если } (y > 4\pi/3). \end{cases} \quad v(x, y, t_0) = 0, \quad (5.1)$$

Это струя, текущая в неподвижной жидкости. Вертикальные скорости в районе верхней и нижней границ струи возмущены по закону

$$v(x, y, t_0) = 0,05(\sin 2x)Q(y),$$
$$Q(y) = \exp\left\{-\left(\frac{y-y_1}{d}\right)^2\right\} + \exp\left\{-\left(\frac{y-y_2}{d}\right)^2\right\}, \quad (5.2)$$
$$y_1 = 2\pi/3, \quad y_2 = 4\pi/3, \quad d = 2\pi/32.$$

На границах задано условие периодичности.

Расчет проводился на сетке 256×256. На рис. 5.1—5.4 представлены различные моменты развития неустойчивости струи. Хорошо видна развитая система вихревых нитей.

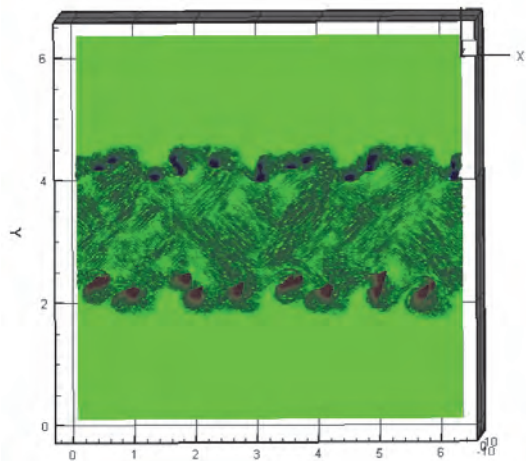


Рис. 5.1. Ротор скорости в задаче о неустойчивости плоской струи в момент времени 1

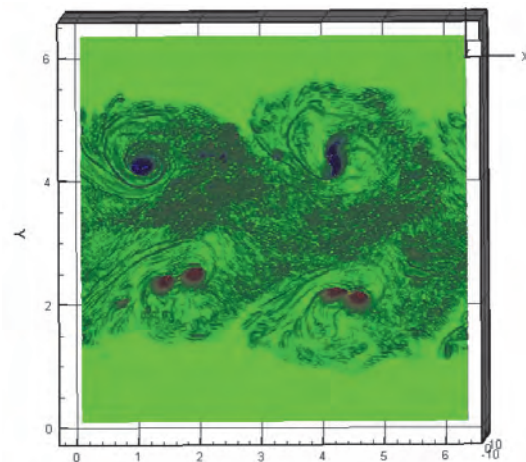


Рис. 5.2. Ротор скорости в задаче о неустойчивости плоской струи в момент времени 2

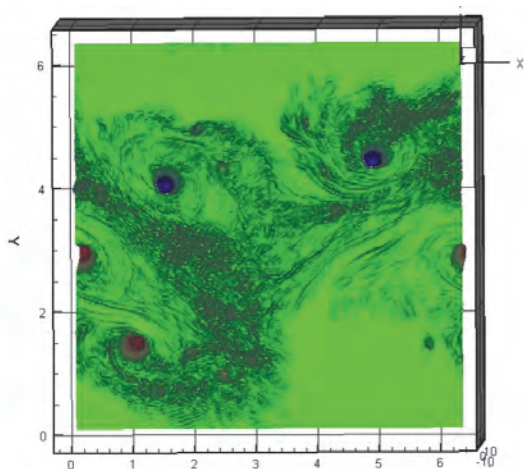


Рис. 5.3. Ротор скорости в задаче о неустойчивости плоской струи
в момент времени 3

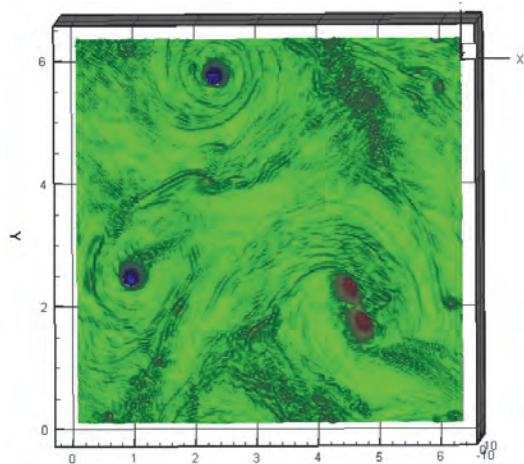


Рис. 5.4. Ротор скорости в задаче о неустойчивости плоской струи
в момент времени 4

5.2. Задача о турбулизующей решетке

Новые классы двумерных течений возникают при отказе от условий двоякой периодичности. Будем считать, что на левой границе области находится турбулизующая решетка, что соответствует заданию на ней скорости втекающей жидкости и граничного условия второго рода на давление — множители Лагранжа в процедуре соленидации. При этом скорость втекающей жидкости будем задавать равной единице в нечетных гранях границы и равной нулю — в четных. На правой границе задается условие первого рода на давление, на верхней и нижней границах — условие периодичности. В качестве начальных условий берутся нулевые скорости.

Задача решалась в прямоугольной области $2\pi \times 4\pi$ на сетке 256×512 , эллиптические уравнения на множители Лагранжа решались быстрым преобразованием Фурье по оси y и прогонкой — по оси x .

На рис. 5.5 и 5.6 представлены результаты численного расчета и приведено их визуальное сравнение с фотографией реального течения.

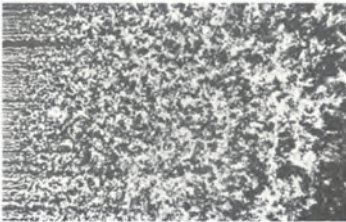


Рис. 5.5. Фотография реального течения за турбулизующей решеткой

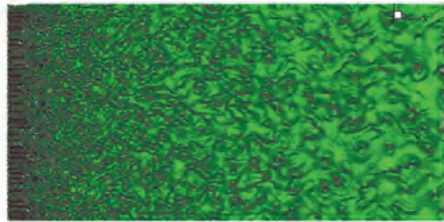


Рис. 5.6. Поле завихренности в расчете на сетке 256×512

6. Заключение

Быстрое развитие суперкомпьютеров, рост вычислительных ресурсов ставят перед вычислителями задачу разработки новых высокоэффективных методов численного моделирования турбулентных потоков, встречающихся во всех важнейших народнохозяйственных задачах. Этим среди прочего объясняется повсеместный рост интереса к методу крупных вихрей (LES-алгоритмам), и в частности к одному из его вариантов — неявному методу LES — Implicit LES (ILES) [60].

В методах ILES на первый план выходят проблемы оптимизации свойств разностных операторов, позволяющих правильно передавать энергетиче-

ский каскад и согласованно уводить его на подсеточный уровень. Эта проблема во многом напоминает проблему улавливания положения разрывов в газовой динамике, где изначально ее пытались решить с помощью введения искусственной вязкости, и в конце концов пришли к алгоритмам коррекции потоков. Нечто подобное происходит сейчас и в методах ILES: начали с вязкости Смагоринского и сейчас активно пытаются выработать альтернативные идеи управления диссипативными потоками.

Одна из таких идей реализована в схеме «Кабаре», первоначально ориентированной на задачи газовой динамики. Ограничители потоков в этой схеме базируются на прямом действии принципа максимума, не требуют настроечных параметров и обеспечивают оптимальный во всех смыслах отвод энергетических потоков на подсеточные масштабы.

Расчеты затухания однородной и изотропной турбулентности в одномерном и двумерном случаях, выполненные в настоящей работе по различным алгоритмам, показали, что схема «Кабаре», обобщенная на случай несжимаемой жидкости, может быть допущена к следующему туру испытаний, которые будут разворачиваться на задачах моделирования слоев смешения и пристеночной турбулентности.

Литература

1. *Reynolds O.* On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A.* — 1895. — Vol. 186. — P. 123—161.
2. *Boussinesq J.* Theorie de l'ecoulement tourbillonnant // *Mem. Pres. Acad. Sci.* — [S. 1.], 1877. — P. 23—46.
3. *Prandtl L.* Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // *Z. Agnew. Math. Mech.* — 1925. — Vol. 5, № 136.
4. *Speziale C. G.* Analitical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence. — [S. 1.], 1990. — (ICASE Report 90-26).
5. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equation: The basic experiment // *Monthly Weather Rev.* — 1963. — Vol. 91. — P. 99—164.
6. *Leonard A.* On the energy cascade in Large-eddy simulation of turbulent fluid flows // *Adv. Geophys. A.* — 1974. — Vol. 18. — P. 237—248.
7. *Dubois Th., Jauberteau F., Temam R.* Dynamic Multilevel Method and the Numerical Simulation of Turbulence. — [S. 1.], Cambridge Univ. Press, 1999.

8. *Bardina J., Ferziger J. H., Reynolds W. C.* Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows / Stanford Univ. — [S. l.], 1983. — (Rep.TF-19).
9. *Volker J.* Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
10. *Berselli L. C., Iliescu T., Layton W. J.* Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
11. *Margolin L. G., Rider W. J.* A rationale for implicit turbulence modeling // Intern. J. for Numerical Methods in Fluids. — 2002. — Vol. 39. — P. 821—841.
12. *Margolin L. G., Smolarkiewicz P. K., Wyszogrodzki A. A.* Implicit turbulence modeling for high Reynolds number flows // J. of Fluid Engineering. — 2002. — Vol. 124. — P. 862—867.
13. *Boris J. P., Book D. L., Hain K.* Flux-corrected transport: Generalization of the method // J. Comput. Phys. — 1975. — Vol. 31. — P. 335—350.
14. *Colella P., Woodward P. R.* The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulation // J. Comput. Phys. — 1984. — Vol. 54. — P. 174—201.
15. *Harten A., Engquist B., Osher B., Chakravarthy S.* Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes // J. Comput. Phys. — 1987. — Vol. 71. — P. 231—303.
16. *Головизнин В. М., Самарский А. А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Мат. моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — P. 86—100.
17. *Головизнин В. М., Самарский А. А.* Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре» // Мат. моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — P. 101—116.
18. *Головизнин В. М., Карабасов С. А.* Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Мат. моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — P. 117—123.
19. *Karabasov S. A., Goloviznin V. M.* Compact Accurately Boundary Adjusting high-Resolution Technique for fluid Dynamics // J. Comp. Phys. — 2009. — Vol. 228. — P. 7426—7451.
20. *Karabasov S. A., Goloviznin V. M.* New Efficient High-Resolution Method for Nonlinear Problems in Aeroacoustics // AIAA J. — 2007. — Vol. 45, № 12. — P. 2861—2871.
21. *Karabasov S. A., Berloff P. S., Goloviznin V. M.* CABARET in the Ocean Gyres // J. Ocean Model. — 2009. — Vol. 30. — P. 155—168.
22. *Gurbatov S. N., Simdyankin S. I., Aurell E. A.* et al. On the decay of Burgers turbulence // J. Fluid Mech. — 1997. — Vol. 344. — P. 339—374.

23. *Frisch U., Bec J.* “Burgulence” // *New Trends in Turbulence, Les Houches 2000* / Ed. by M. Lesieur, A. Yaglom, and F. David. — Berlin: Springer EDP-Sciences, 2001. — P. 341—383.
24. *Zikanov O., Thess A.* Statistics of turbulence in a generalized random-force-driven Burgers equation // *Phis. Fluids*. — 1997. — Vol. 9, № 5. — P. 1363—1367.
25. *Love M. D.* Subgrid modeling studies with Burgers equation // *J. Fluid Mech.* — 1980. — Vol. 100, Pt. 1. — P. 87—110.
26. *Bernard P. S., Wallace J. M.* *Turbulent Flow. — Analysis, Measurement, and Prediction.* — [S. l.]: Publ. by John Wiley & Sons, 2002.
27. *Aprovitola A., Denaro F. M.* On the application of congruent upwind discretizations for large eddy simulations // *J. of Computational Physics*. — 2004. — Vol. 194. — P. 329—343.
28. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР*. — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 299—303.
29. *Kraichnan R. H.* Internal Ranges in two-dimensional turbulence // *Phis. Of Fluids*. — 1967. — Vol. 10, № 7. — P. 1417—1423.
30. *Batchelor G. K.* Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // *Phys. Of Fluids*. — 1969. — Vol. 12, Suppl. 2. — P. 233—239.
31. *Tabeling P.* Two-dimensional turbulence: a physicist approach // *Physics Reports*. — 2002. — Vol. 362. — P. 1—62.
32. *Farge M., Holschneider M.* Interpretation of two-dimensional turbulence energy spectrum in terms of Quasi-Singularity in Some Vortex Cores // *Europhys. Lett.* — 1991. — Vol. 15, № 7. — P. 737—743.
33. *Kida S., Yamada M., Ohkitani K.* The energy spectrum in the universal range of two-dimensional turbulence // *Fluid Dynamics Research*. — 1988. — Vol. 4. — P. 271—301.
34. *Dritschell D. G., Scott R. K., Macaskill C.* et al. Late time evolution of unforced inviscid two-dimensional turbulence // *J. Fluid Mech.* — 2009. — Vol. 640. — P. 215—233.
35. *Suffman P. G.* On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distribution at large Reynolds number // *Stud. Appl. Math.* — 1971. — Vol. 50. — P. 377—383.
36. *Laval J.-Ph., Dubrulle B., Nazarenko S.* Dynamical modeling of sub-grid scales in 2D turbulence // *Physica D*. — 2000. — Vol. 142. — P. 231—253.
37. *Clercx H. J. H., Nielsen A. N., Torres D. J., Coutsias E. A.* Two-dimensional turbulence in square and circular domains with no-slip walls // *Eur. J. Mech. B-Fluids*. — 2001. — Vol. 20. — P. 557—576.

38. Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F., Molenaar D., Wells M. G. No-slip walls as vorticity sources in two-dimensional bounded turbulence // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. — 2005. — Vol. 40. — P. 3—21.
39. Chasnov J. R. On the decay of two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. — 1997. — Vol. 9, № 1. — P. 171—180.
40. Lilly D. K. Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1971. — Vol. 45. — P. 395—415.
41. Benzi R., Paternello S., Santangelo P. On the statistical properties of two-dimensional decaying turbulence // *Europhys. Lett.* — 1987. — Vol. 3. — P. 811—818.
42. Brachet M. E., Meneguzzi Y., Politano H., Sulem P. L. The Dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1988. — Vol. 194. — P. 333—349.
43. Legras B., Santangelo P., Benzi R. High resolution numerical experiments for forced two-dimensional turbulence // *Europhys. Lett.* — 1988. — Vol. 5. — P. 215—222.
44. Herring J. R., McWilliams J. C. Comparison of direct numerical simulation of two-dimensional turbulence with two-point closure: the effects of intermittency // *J. Fluid Mech.* — 1985. — Vol. 153. — P. 229—242.
45. Borue V. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 72. — P. 1475—1478.
46. Maltrud M. E., Vallis G. K. Energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and beta-plane turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1991. — Vol. 228. — P. 321—342.
47. Borue V. Spectral exponents of enstrophy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71. — P. 3967.
48. Kevlahan N. K.-R., Farge M. Vorticity filaments in two-dimensional turbulence: creation, stability and effect // *J. Fluid Mech.* — 1997. — Vol. 346. — P. 49—76.
49. Herring J. R., Orszag S. A., Kraichnan R. H., Fox D. G. Decay of two-dimensional homogeneous turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1974. — Vol. 66. — P. 417—444.
50. Santangelo P., Benzi R., Legras B. The generation of vortices in high-resolution, two-dimensional decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of self-similarity // *Phys. Fluids*. — 1989. — Vol. A 1. — P. 1027—1034.
51. Dritschell D. G. A general theory for two-dimensional vortex interaction // *J. Fluid Mech.* — 1995. — Vol. 293. — P. 269—303.

52. *Gharib M., Derango P.* A liquid film (soap films) tunnel to study two-dimensional laminar and turbulent shear flows // *Physica D.* — 1989. — Vol. 47. — P. 406—416.
53. *Kellay H., Wu X.-L., Doldburg W. I.* Experiments with turbulent soap films. // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74. — P. 3975—3978.
54. *Martin B. K., Wu X.-L., Goldburg W. I.* Spectra of decaying turbulence in soap film // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Vol. 80. — P. 3964—3967.
55. *Rutgers M. A.* Forced 2D turbulence: experimental evidence of simultaneous inverse energy and forward enstrophy cascades // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 2244—2247.
56. *Paret J., Tabeling P.* Intermittency in the inverse cascade of energy: experimental observation // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79. — P. 4162—4165.
57. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. — Т. 1—2. — М.: Наука, 1965—1967.
58. *Lesieur M.* *Turbulence in Fluids.* — [S. l.]: Springer, 2008.
59. *Richardson L. F.* *Weather Prediction by Numerical Process.* — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922.
60. *Margolin L. G., Rider W. J.* The design and construction of implicit LES models // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* — 2005. — Vol. 47. — P. 1173—1179.

Моделирование одно- и двухфазных турбулентных течений в струях и каналах методами LES и RANS

Б. Б. Илюшин, Д. В. Красинский, Д. Ф. Сиковский, А. Г. Деменков, М. Ю. Хребтов

1. Введение

При моделировании сложных турбулентных течений в прикладных задачах наиболее распространен метод решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса (RANS). Использование метода с выделением крупных вихрей (LES) позволяет получить более подробную информацию о структуре турбулентности потока, однако его применение в практике инженерных расчетов все еще остается слишком трудоемким, особенно для стратифицированных и многофазных течений. Вместе с тем ограничения метода RANS, обусловленные необходимостью привлечения эмпирической информации для замыкания используемых уравнений, в ряде случаев дают качественно неверный результат. Так, в [1] показано, что используемые в RANS градиентные модели переноса не в состоянии даже качественно описать турбулентный перенос в стратифицированных течениях. В настоящей работе будет показано, что такие ограничения имеют место и в канонических потоках, таких как осесимметричная затопленная струя. Основополагающее в RANS предположение о равенстве скорости диссипации энергии турбулентности и ее спектрального потока на начальном участке затопленной струи не только не выполняется, но и сам спектральный поток здесь имеет обратный знак — направлен от малых масштабов к большим. Такой аномальный характер механизма трансформации энергии турбулентности не оставляет шансов адекватно описать структуру потока в рамках метода RANS даже путем повышения уровня замыкания RANS-модели. В то же время использование LES-моделирования позволяет не только правильно воспроизвести, но и подробно исследовать аномальные области с инверсионным спектральным потоком энергии турбулентности. Однако для моделирования многофазных турбулентных потоков единственным инженерным инструментом остается метод RANS. Поэтому важно определить рамки его применимости. Ниже будет показано, что в осесимметричной затопленной струе, начальный участок которой характеризуется аномальным распределением статистических характеристик (например, положительной величиной продольной струк-

турной функции третьего порядка), течение ниже по потоку — в области развитой турбулентности — вполне корректно описывается RANS-моделями.

Учет второй фазы в RANS-моделях приводит к привлечению гипотез замыкания уравнений динамики дисперсной фазы, основанных либо на эмпирической информации, либо на статистических моделях движения частиц в турбулентной среде. Даже при отсутствии обратного влияния дисперсной фазы на турбулентность несущей среды моделирование динамики инерционных частиц в пристенных турбулентных течениях представляет собой сложную задачу из-за существенной нелокальности турбулентного переноса инерционных частиц. В этой ситуации использование анализа размерностей и подобия позволяет получить функциональный вид распределений концентрации и статистических моментов скорости частиц, а в ряде случаев — асимптотические выражения для скорости осаждения частиц на стенку. Этот подход дает строгое обоснование широко используемому для постановки граничных условий в вычислительной практике методу пристеночных функций и позволяет получить асимптотически корректные выражения пристеночных функций для моделей любого уровня замыкания. Ниже с помощью методов размерностей и подобия получены асимптотические закономерности скорости осаждения частиц для диффузионно-импактного и инерционного режимов осаждения, а также пристеночная функция для одной из наиболее простых и распространенных моделей динамики малоинерционных частиц в турбулентных пристенных потоках — диффузионно-инерционной модели Л. И. Зайчика.

2. Инверсионный поток энергии турбулентности в осесимметричной струе

Исследованию структуры турбулентных течений посвящено большое количество работ. Особое место в этом исследовании занимает изучение механизма трансформации энергии турбулентных вихрей. Известные представления о каскадном переносе энергии турбулентности от крупных масштабов к мелким, основанные на модели Ричардсона и развитые Колмогоровым [2], нашли подтверждение в экспериментальных и теоретических работах. Согласно закону Колмогорова «4/5» [3] в трехмерной однородной изотропной турбулентности величина продольной структурной функции третьего порядка $D_{LLL}(\ell) \equiv \langle (u_L(M') - u_L(M))^3 \rangle$ должна быть отрицательной [4] (ℓ — расстояние между точками M' и M , u_L — мгновенная продольная компонента скорости; угловые скобки обозначают операцию осреднения по ансамблю). Это свойство тесно связано с тем, что пульса-

ции данного масштаба в среднем должны передавать энергию пульсациям меньших масштабов и заимствовать энергию у пульсаций бóльших масштабов [4]. Экспериментальные и численные результаты моделирования развитых трехмерных турбулентных течений фиксируют отрицательную величину D_{LLL} [5—7].

Перенос энергии от малых масштабов к большим с положительной D_{LLL} характерен для двумерной турбулентности [8]. Он обусловлен отсутствием механизма растяжения вихревых трубок [9]. Указанный эффект наблюдается также в трехмерных течениях с анизотропией, связанной со стратификацией или вращением (см., например, [10; 11]). В этом случае эффект подавления турбулентных пульсаций в направлении центробежной силы или сил плавучести при устойчивой стратификации делает турбулентность квазидвумерной. В таких течениях наблюдаются квазидвумерные вихревые структуры, увеличивающие свои размеры за счет вовлечения жидкости из близлежащих слоев, а также за счет объединения («спаривания») с другими вихрями.

Экспериментальное исследование развития осесимметричной затопленной круглой струи с использованием методики PIV (Particle Image Velocity) представлено в [12; 13], где была получена подробная база данных о распределении статистических характеристик турбулентности. В эксперименте наблюдались периодическое формирование вихрей, движущихся от кромки сопла вниз по потоку вдоль границы струи. На расстоянии примерно 1—2 калибров эти вихри объединяются, формируя долгоживущие тороидальные вихревые структуры [13]. Используемая в [12; 13] методика позволила получить распределение $D_{LLL}(\ell)$ по данным PIV-измерений в осесимметричной затопленной свободной струе с числом Рейнольдса $Re = 28\ 000$ — фактически в эксперименте были получены статистические моменты продольной производной скорости, рассчитанные как конечные разности на равномерной сетке с шагом $\ell = 0,85$ мм. Эта величина, здесь и далее представленная в «нормализованном» виде D_{LLL}/ℓ (чтобы исключить линейную зависимость D_{LLL} от ℓ — см., например, [3; 4; 9; 14]), оказалась положительной вблизи внешней границы слоя смешения струи (рис. 1, левая часть¹). Несмотря на заметный шум, связанный с погрешностью метода, можно видеть области положительных величин D_{LLL} начиная от края сопла и до 5 калибров вниз по потоку.

Метод крупных вихрей (Large Eddy Simulation, далее LES, см., например, [15; 16]) стал за последнее десятилетие общепризнанным и основным

¹ Рисунок 1 (левая часть) любезно предоставлен авторами [12; 13] и воспроизводится с их разрешения.

направлением в численном моделировании турбулентных течений. В методе LES основная часть турбулентного движения непосредственно «разрешается» на расчетной сетке, а остающийся вклад масштабов, меньших, чем размер сетки (фильтра), учитывается в качестве «подсеточных» турбулентных напряжений, для которых используется та или иная относительно простая модель замыкания. Ранее в работах авторов [17; 18] были отражены некоторые результаты применения метода LES с подсеточной моделью Смагоринского для численного исследования турбулентной свободной круглой затопленной струи в воде при $Re = 25\,000$. В настоящей работе представлены результаты дальнейшего исследования динамики и статистических характеристик турбулентного поля в такой струе методом LES включая анализ структурных функций второго и третьего порядка.

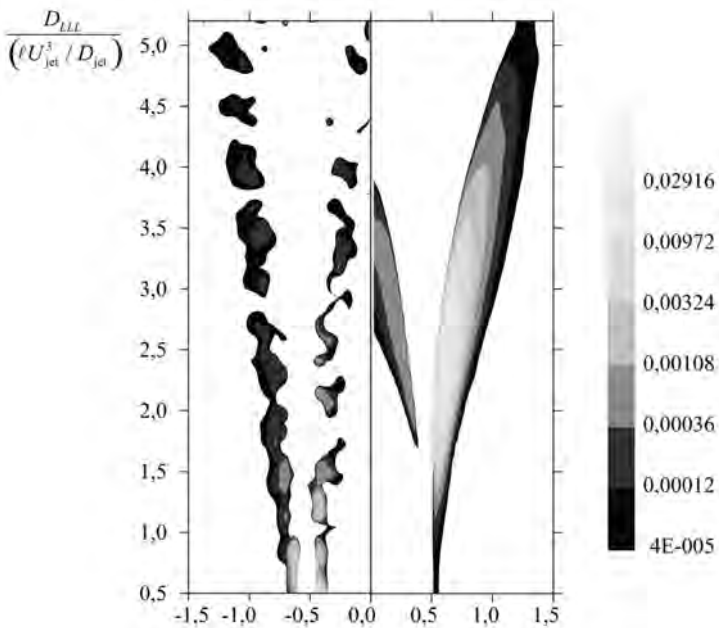


Рис. 1. Распределения безразмерной структурной функции $\frac{D_{LLL}}{(U_{jet}^3 / D_{jet})}$ в продольном сечении струи (показаны только положительные значения), полученные в эксперименте [12; 13] (слева) и методом LES (справа)

2.1. LES-моделирование затопленной осесимметричной свободной струи

Объектом исследования представленной работы является затопленная осесимметричная струя с входным профилем средней скорости по закону гиперболического тангенса (близким к ударному) и небольшим уровнем турбулентных пульсаций (~2%). Значение числа Рейнольдса течения $Re = 25\ 000$ (среднерасходная скорость струи на срезе сопла $U_{jet} = 1,9$ м/с, диаметр сопла $D_{jet} = 10$ мм). Сопло струи ограничено твердой поверхностью (шайбой с внешним диаметром $D_b = 54,2$ мм). В качестве подсеточной использовалась модель Смагоринского с коэффициентом $C_s = 0,175$. Описание численного алгоритма, граничных условий и начальных данных приведено в [17]. В [17; 18] также представлены вычисленные распределения средних и дисперсий скорости, поле турбулентной кинетической энергии и ее спектры, вихревая структура течения. Результаты расчетов в [17; 18] сравнивались с данными эксперимента [13] и показали хорошее соответствие.

В настоящей работе (как и в [17; 18]) с учетом осесимметричной топологии течения осреднение при вычислении статистических моментов проводилось не только по ансамблю реализаций, но и по окружной координате. Корректность такого осреднения проверялась путем сравнения вычисленных распределений моментов скорости до четвертого порядка, а также структурных функций как с использованием осреднения по окружной координате, так и без него, но с бóльшим объемом ансамбля. Сравнение показало, что вычисленные характеристики практически не отличаются.

Расчеты также показали, что в соответствии с [4] чем старше порядок момента, тем более объемная статистика необходима для его вычисления. Так, если для получения первых и вторых моментов скорости было достаточно несколько тысяч реализаций, то для третьих и четвертых оказалось необходимым использовать до сотни тысяч реализаций.

Как известно, при вычислении статистических моментов производной скорости n -го порядка $\partial^n u_j / \partial x_j^n$ вклад мелких масштабов растет с ростом n [4]. Учитывая, что в LES-моделировании мелкие (т. е. подсеточные) масштабы отсекаются, необходимо было убедиться, что это отсечение не вносит большой ошибки при вычислении статистических моментов производной скорости. Были выполнены расчеты на последовательности сгущающихся сеток и вычислены структурные функции второго и третьего порядков. Анализ показал, что полученные структурные функции практически не меняются начиная с разрешения расчетной сетки $360 \times 132 \times 48$, при

этом время осреднения составляло порядка 10 с эволюции струи. Как и в эксперименте (см. рис. 1, левая часть), в LES нормализованная продольная структурная функция третьего порядка вычислялась по конечно-разностной форме:

$$\frac{D_{LLL}}{\ell} \approx \frac{\langle (\delta u_L)^3 \rangle}{\delta x},$$

где δx — шаг расчетной сетки в продольном направлении; δu_L — соответствующий инкремент скорости.

Результаты вычислений показали, что поле D_{LLL} имеет области положительных значений, расположенные в пределах начального участка струи на расстоянии от 1 до 5 калибров от сопла — см. рис. 1 (справа) и рис. 2. Заливкой на рис. 2 показаны области положительных значений D_{LLL} , а изолиниями — величина кинетической энергии турбулентности.

Этот процесс демонстрирует визуализация вихревой структуры струи, показанная на рис. 3 в виде типичной картины мгновенного поля λ_2 -критерия [20].

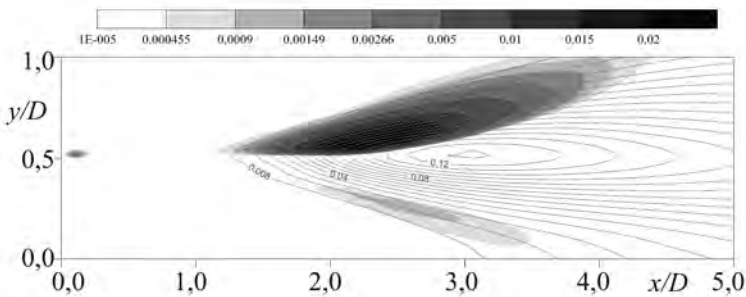


Рис. 2. Вычисленные поля безразмерной структурной функции $D_{LLL} / (\ell U_{\text{jet}}^3 / D_{\text{jet}})$ (заливка; показаны только положительные значения) и кинетической энергии турбулентности (изолинии)

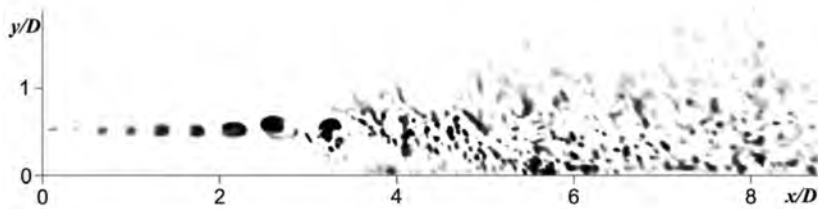


Рис. 3. Визуализация вихревой структуры течения по λ_2 -критерию (оттенками серого обозначены области $\lambda_2 < 0$)

Максимум величины D_{LLL}/ℓ , представленной на рис. 2 в безразмерном виде $D_{LLL}/(\ell U_{\text{jet}}^3/D_{\text{jet}})$, расположен вблизи внешней границы слоя смешения на расстоянии примерно 2,5 калибра, при этом нижняя область положительных значений D_{LLL}/ℓ значительно меньше по величине.

На рис. 4 представлены вычисленные радиальные профили D_{LLL}/ℓ и коэффициента эксцесса продольной скорости $K_L = \langle u_L^4 \rangle / \langle u_L^2 \rangle^2 - 3$. Максимумы величины K_L показывают области перемежаемости, где значительны процессы вовлечения невозмущенной жидкости в слои смешения, фактически показывая их границы.

Видно, что на участке струи $x/D_{\text{jet}} < 1,5$ положительные области D_{LLL} располагаются вблизи максимумов коэффициента эксцесса, т. е. на границах слоя смешения. Однако начиная с расстояний от сопла $x/D_{\text{jet}} \sim 2$ интенсивность турбулентных пульсаций в слоях смешения становится значительной (см. рис. 2), области с положительной D_{LLL} оказываются внутри слоя смешения. До момента смыкания слоев смешения, сформировавшихся на кромке сопла, процессы вовлечения невозмущенной жидкости в слой смешения вихревыми структурами происходят как снаружи струи, так и со стороны ее оси. С этим связано наличие двух максимумов K_L . Вниз по потоку по мере роста слоя смешения расстояние между двумя максимумами профиля K_L увеличивается с уменьшением амплитуды «нижнего» (смещающегося к оси струи) максимума K_L . На расстоянии примерно 5 калибров от сопла, в области смыкания слоев смешения, он уже практически неразличим. Здесь же исчезают области положительной величины D_{LLL} .

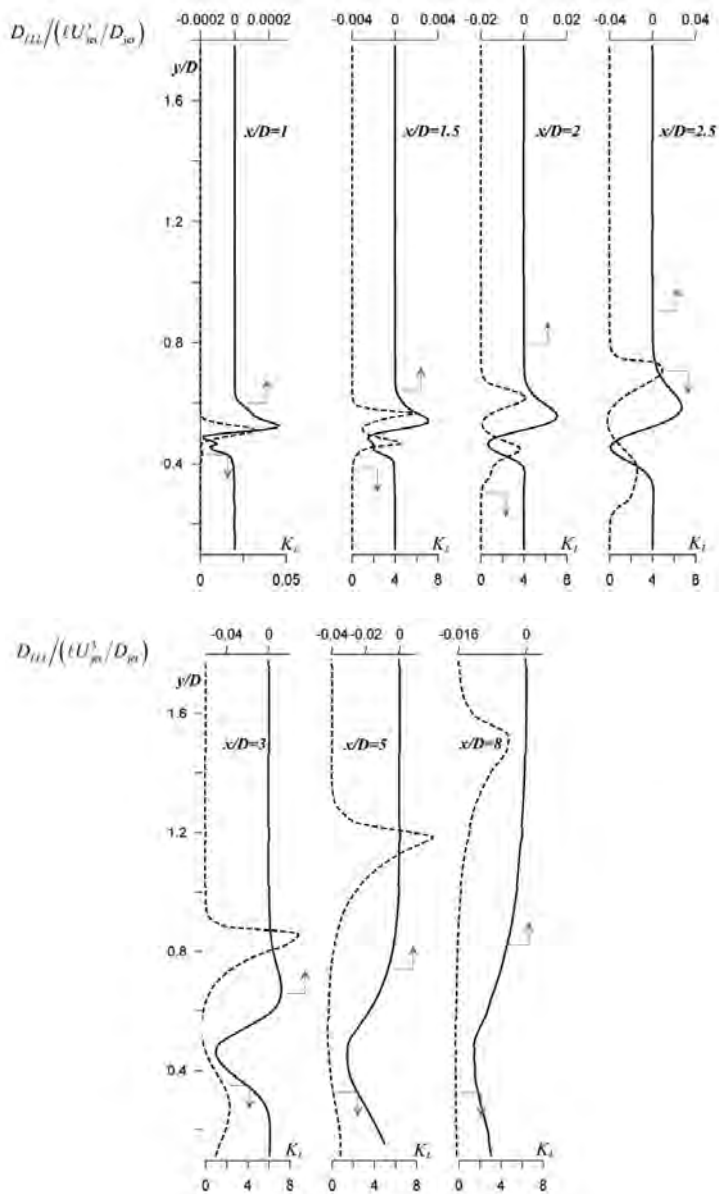


Рис. 4. Радиальные профили безразмерной структурной функции $D_{LLL} / (l U'_{jet} / D_{jet})$ и коэффициента эксцесса K_L в ряде сечений струи

2.2. Вычисление потока энергии турбулентности и спектров в осесимметричной свободной струе

Поскольку знак структурной функции D_{LLL} тесно связан с направлением каскадного переноса энергии турбулентности по масштабам, полученный выше эффект существования области течения с положительной величиной D_{LLL} дает основания предположить, что в этой области механизм трансформации энергии турбулентности проявляет нестандартные свойства. В представленном ниже анализе справедливость этого предположения подтверждена путем непосредственного расчета потока энергии турбулентности.

В [14] путем применения операции осреднения с низкочастотным фильтром к уравнениям Навье—Стокса получено (без использования предположения об однородности и изотропности турбулентности) следующее уравнение обмена энергией между масштабами:

$$\partial_t E_k + \Pi_k = -2\nu\Omega_k + F_k, \quad (1)$$

где E_k — интегральная энергия, заключенная между волновыми числами 0 и k ; Π_k — поток энергии через волновое число k (или масштаб $2\pi/k$) из-за нелинейных взаимодействий вихрей; ν — коэффициент кинематической вязкости; Ω_k — интегральная энстрофия между волновыми числами от 0 до k ; F_k — интегральная накачка энергии внешней силой на этих масштабах. Подробный вывод уравнения (1) приведен в [14]. Отметим, что с использованием гипотезы о замороженной турбулентности применительно к исследуемому в настоящей работе течению — установившейся осесимметричной струе — операция осреднения по ансамблю может быть заменена осреднением по времени. Знак величины Π_k показывает направление потока энергии через данное волновое число k (или масштаб $2\pi/k$). При $\Pi_k > 0$ поток энергии направлен от меньших волновых чисел к большим, и наоборот. Величина Π_k определяется из соотношения [14]

$$\Pi_k = \left\langle \bar{u}_k^< \cdot \left(\bar{u}_k^< \cdot \nabla \bar{u}_k^> \right) \right\rangle + \left\langle \bar{u}_k^< \cdot \left(\bar{u}_k^> \cdot \nabla \bar{u}_k^> \right) \right\rangle, \quad (2)$$

где $u_k^<$ — скорость, отфильтрованная с низкочастотным фильтром; $u_k^>$ — скорость, отфильтрованная с высокочастотным фильтром. Поскольку $u_k^> = u - u_k^<$, для вычисления Π_k по уравнению (2) достаточно выполнить процедуру фильтрации по пространству с одним низкочастотным фильтром. Процедура низкочастотной фильтрации выполнялась осреднением по пространству с использованием сферического фильтра с радиусом сферы R

(половинный размер фильтра). На рис. 5 представлены радиальные распределения безразмерного потока энергии $-\Pi_k / (U_{\text{jet}}^3 / D_{\text{jet}})$ (показанного с обратным знаком), полученные в сечении $x / D_{\text{jet}} = 2,6$, где D_{LLL} имеет положительные значения (рис. 5а), а также в сечении $x / D_{\text{jet}} = 9,1$, где D_{LLL} отрицательна (рис. 5б). При этом были проведены две серии расчетов потока энергии — для значений волнового числа $k_1 = 2\pi / D_{\text{jet}}$ (соответствующего радиусу низкочастотного фильтра $R_1 = 0,5D_{\text{jet}}$) и $k_2 = 4\pi / D_{\text{jet}}$ ($R_2 = 0,25D_{\text{jet}}$) — см. линии 1 и 2 на рис. 5. Совместно с этими распределениями на рис. 5 представлены обезразмеренные профили D_{LLL} / ℓ (линия 3). Отметим, что структурная функция D_{LLL} включает в себя информацию о переносе энергии в среднем по всем масштабам, в то время как величина Π_k соответствует потоку энергии через один выделенный масштаб (волновое число k). Поэтому сравнение D_{LLL} и Π_k может быть только качественным. Из рис. 5а видно, что в сечении $x / D_{\text{jet}} = 2,6$, где профиль D_{LLL} / ℓ дважды меняет знак с ростом расстояния от оси струи, оба профиля $-\Pi(k_1)$ и $-\Pi(k_2)$ меняют знак аналогичным образом, отслеживая поведение функции D_{LLL} / ℓ .

Еще более синхронная картина наблюдается на рис. 5б — в сечении $x / D_{\text{jet}} = 9,1$ с отрицательным профилем D_{LLL} оба профиля $-\Pi_k$ также отрицательны (т. е. поток энергии Π_k положителен), причем местоположения экстремумов всех трех профилей почти совпадают. Последнее наблюдение дает дополнительное подтверждение корреляции между структурной функцией D_{LLL} и потоком энергии Π_k . Таким образом, представленные прямые расчеты спектрального потока энергии турбулентности показали, что в области положительных значений D_{LLL} поток энергии направлен от меньших масштабов к бóльшим по крайней мере для двух волновых чисел $k_1 = 2\pi / D_{\text{jet}}$ и $k_2 = 4\pi / D_{\text{jet}}$.

Для дальнейшего анализа механизма трансформации энергии в свободной круглой струе в сечениях $x / D_{\text{jet}} = 2,5, 3,0, 5,0, 8,0$ были вычислены спектры турбулентной энергии (рис. 6). Видно, что в сечении $x / D_{\text{jet}} = 2,5$ (см. рис. 6а), где величина D_{LLL} / ℓ находится вблизи своего максимума, спектры в слое смешения (в точках $y / D_{\text{jet}} = 0,44—0,6$) имеют вид $E(k) \sim k^{-3}$.

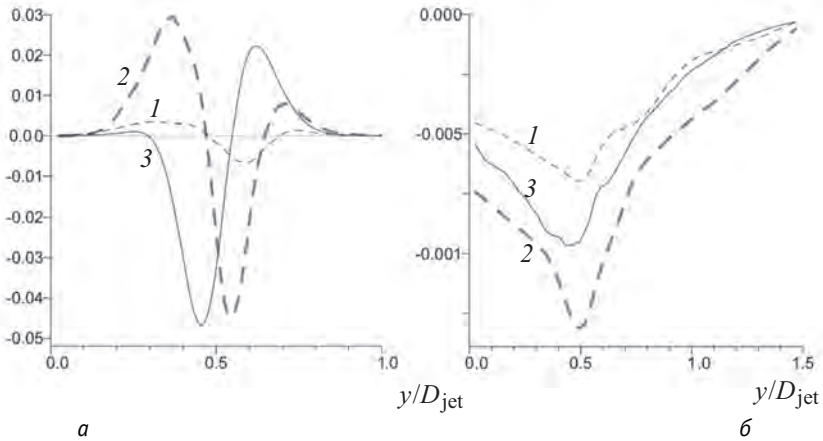


Рис. 5. Радиальные профили безразмерных потоков энергии $-\Pi_k / (U_{\text{jet}}^3 / D_{\text{jet}})$ для $k_1 = 2\pi / D_{\text{jet}}$ (1), $k_2 = 4\pi / D_{\text{jet}}$ (2) и безразмерной продольной структурной

$$\text{функции } D_{LLL} / (\ell U_{\text{jet}}^3 / D_{\text{jet}}) \text{ (3);}$$

$$a - x / D_{\text{jet}} = 2,6, \text{ б} - x / D_{\text{jet}} = 9,1$$

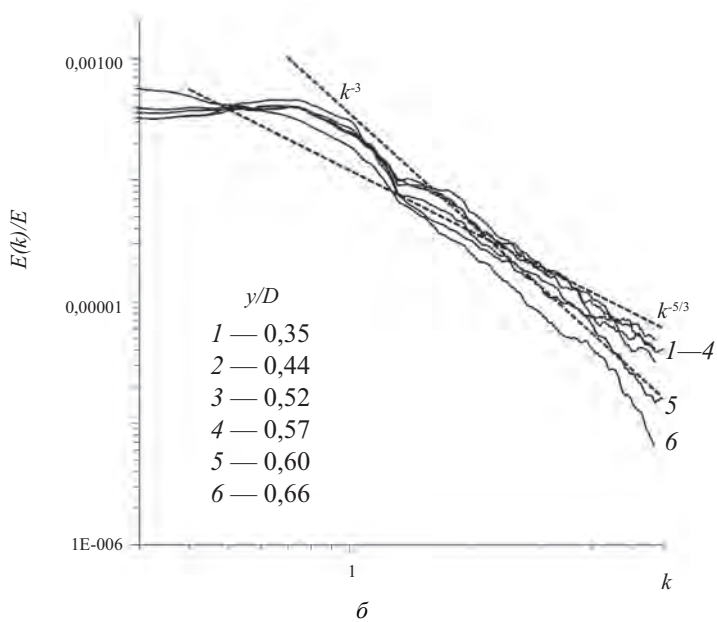
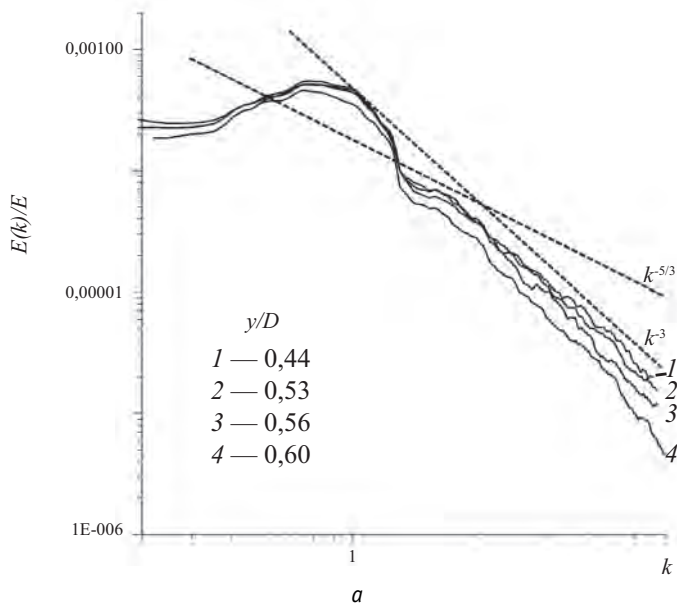
На внешней границе слоя смешения спектры менее наполнены, поскольку здесь интенсивность турбулентных пульсаций существенно ниже, чем внутри слоя смешения. Вниз по потоку по мере развития слоя смешения внутри него спектры приближаются к колмогоровскому закону. Так, при $x / D_{\text{jet}} = 3,0$ их наклон меняется, приближаясь к закону $E(k) \sim k^{-5/3}$, в то время как на внешней границе слоя смешения (при $y / D_{\text{jet}} = 0,60-0,66$) вид спектра остается прежним: $E(k) \sim k^{-3}$ (см. рис. 6б). Начиная с переходного участка струи (с 5 калибров вниз по потоку от сопла) внутри нее формируется инерционный интервал с колмогоровским спектром $E(k) \sim k^{-5/3}$ (см. рис. 6в). На расстоянии 8 калибров (начало основного участка струи) по всей толщине струи, от оси до $y / D_{\text{jet}} = 0,76$, спектры группируются и становятся универсальными с колмогоровским законом распределения (см. рис. 6з). Отметим, что спектр $E(k) \sim k^{-3}$ характерен для двумерной турбулентности с каскадом переноса энтропии в отличие от каскада энергии в колмогоровском спектре. Представленные результаты моделирования показали, что такой спектр формируется в слое смешения на начальном участке струи. Вниз по потоку этот спектр трансформируется, приближаясь к универсальному колмогоровскому закону $\sim k^{-5/3}$ (см. рис. 6а—г).

В работе [21] при численном моделировании двумерной турбулентности наблюдался обратный процесс. Начальное распределение пульсаций в [21], заданное в виде колмогоровского закона $E(k) \sim k^{-5/3}$, в процессе эволюции трансформировалось к виду $E(k) \sim k^{-3}$. При этом наблюдалось активное вихреобразование путем спаривания более мелких вихрей с обратным каскадом энергии — вверх по масштабам.

Энергетический спектр $\sim k^{-3}$, характерный для двумерной турбулентности, указывает на доминирование механизмов роста вихревых структур (за счет их объединения и эффекта вовлечения окружающей жидкости) над механизмами уменьшения их размера, обусловленного растяжением вихревых трубок и вязкой диссипацией. Характерной особенностью динамики такой турбулентности является инверсионный поток энергии вверх по масштабам — от мелких масштабов к крупным. По-видимому, с этим связаны положительные значения продольной структурной функции третьего порядка на начальном участке струи на границах слоя смешения.

Таким образом, на базе LES-моделирования существенно трехмерного течения — свободной круглой затопленной струи — установлен факт существования области, где динамика турбулентности проявляет двумерные свойства, не обусловленные внешними анизотропными условиями (стратификацией, вращением). Расчеты показали, что в этой области продольная структурная функция третьего порядка принимает положительные значения, вычисленный поток энергии турбулентности по спектру направлен от малых масштабов к большим, а спектр турбулентных пульсаций имеет вид $E(k) \sim k^{-3}$. Последнее указывает на то, что динамику вихрей этого участка струи определяют механизмы, характерные для двумерной турбулентности, когда рост вихревых структур за счет их спаривания и вовлечения внешней невозмущенной жидкости доминирует над процессами растяжения вихревых трубок и вязкой диссипации. Существование положительных значений D_{LLL} и инверсионного потока энергии турбулентности Π_k является прямым следствием такой динамики.

Можно предположить, что подобные «аномальные» области с инверсионным потоком энергии турбулентности встречаются и в других трехмерных течениях, где формируются крупные квазидвумерные вихревые структуры, динамику которых определяют механизмы объединения вихрей и процессы вовлечения, а вклад вязких эффектов и механизмов растяжения вихревых трубок незначителен.



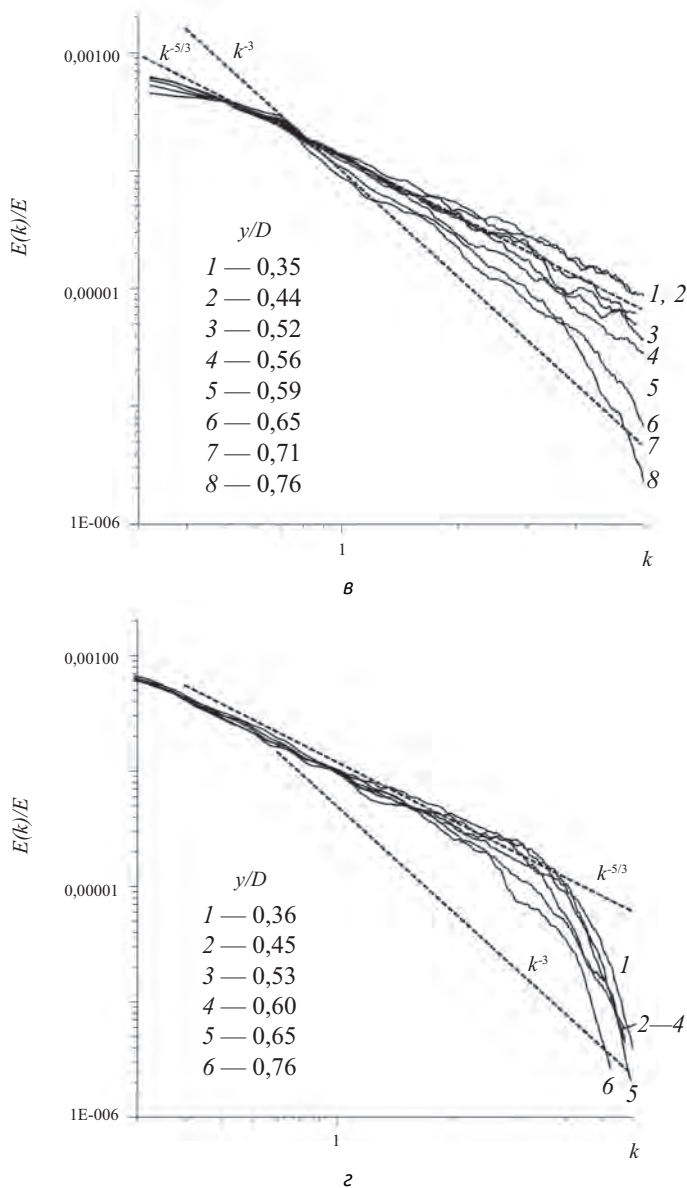


Рис. 6. Спектры энергии, вычисленные в ряде точек в сечениях $x/D_{jet} = 2,5$ (а), $x/D_{jet} = 3,0$ (б), $x/D_{jet} = 5,0$ (в), $x/D_{jet} = 8,0$ (г)

3. RANS-моделирование структуры турбулентности в осесимметричной струе

Задаче о динамике круглой затопленной турбулентной струи посвящено большое количество исследований экспериментального, теоретического и вычислительного характера. Целью настоящей работы является применение построенной в [22] на основе RANS-подхода численной модели для расчета течения в осесимметричной струе, имеющего подробную экспериментальную базу данных [12; 13]. Кроме того, для данного течения было выполнено численное исследование методом моделирования крупных вихрей (см. раздел 2), который является принципиально более универсальным, хотя и требует значительно бóльших объема вычислений и времени счета. Поэтому представляется полезным сравнить между собой (и с данными эксперимента) результаты, полученные с применением этих двух подходов. Используемая в настоящей работе в методе статистических моментов полуэмпирическая модель турбулентности содержит дифференциальные уравнения переноса турбулентных моментов поля скорости второго порядка, а также алгебраические соотношения, которые, как показала практика моделирования, достаточно успешно описывают основные механизмы турбулентного переноса в струйных течениях.

3.1. Постановка задачи

Для описания течения используется следующая система осредненных уравнений (приближение пограничного слоя):

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle u'v' \rangle, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0. \quad (4)$$

Здесь (x, r, φ) — цилиндрическая система координат с началом на срезе сопла; U, V, u', v', w' — соответствующие компоненты скорости осредненного и пульсационного движения; $\langle u'v' \rangle$ — касательное рейнольдсово напряжение. В правой части уравнения (3) слагаемое с молекулярной вязкостью предполагается малым и поэтому опущено. Зависимость искомых функций от координаты φ отсутствует, так как рассматриваемое течение является осесимметричным.

Система уравнений (3) и (4) не замкнута. Касательное турбулентное напряжение определяется из известного соотношения Роди [23; 24]

$$\langle u'v' \rangle = \lambda \langle v'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \lambda = -\frac{1-C_2}{C_1-1} \frac{e}{\varepsilon}, \quad (5)$$

где ε — скорость диссипации турбулентной энергии; C_1 и C_2 — постоянные; e — кинетическая турбулентная энергия.

Нормальные рейнольдсовы напряжения $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle w'^2 \rangle$ ($2e = \langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle$) и скорость диссипации ε находятся из уравнений переноса:

$$U \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} = -2(1-\alpha) \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left(\langle u'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} \alpha P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$U \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} = -\frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left(\langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} \alpha P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{re}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - \frac{2C_s e}{r\varepsilon} \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r}, \quad (7)$$

$$U \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} = -\frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left(\langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} \alpha P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{re}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + \frac{2C_s e}{r\varepsilon} \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r}, \quad (8)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{re}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \left(C_{\varepsilon 1} \frac{P}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \right) \frac{\varepsilon^2}{e}. \quad (9)$$

Выражение для величины порождения энергии турбулентности P в (5)–(9) имеет следующий вид:

$$P = -\langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Модель (5)—(9) позволяет учесть анизотропию вырождения турбулентных характеристик в струе. В уравнениях и соотношениях модели величины $C_s, C_\varepsilon, \alpha, C_1, C_2, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ — эмпирические постоянные. В настоящей работе применяются их стандартные значения [24; 25]: $C_s = 0,22, C_\varepsilon = 0,17, \alpha = 0,6, C_1 = 2,0, C_2 = 0,6, C_{\varepsilon 1} = 1,45, C_{\varepsilon 2} = 1,92$.

При $x = 10D$ в качестве начальных условий задавались согласованные с экспериментальными данными распределения $U, \langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \varepsilon$. Начальные значения ε определялись из известного соотношения Колмогорова

$$\varepsilon = \gamma \frac{e^{3/2}}{r_{1/2}}, \text{ где величина } r_{1/2} \text{ находится из равенства } e(x_0, r_{1/2}) = e(x_0, 0) / 2;$$

γ — эмпирическая постоянная. При $r \rightarrow \infty$ моделировался спутный поток и для величин $U, \langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \varepsilon$ ставилось условие Неймана. При $r = 0$ искомые величины удовлетворяли условиям

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = V = 0.$$

Начальные и граничные условия для $\langle v'^2 \rangle$ и $\langle w'^2 \rangle$ имели вид $\langle v'^2 \rangle \equiv \langle w'^2 \rangle$.

Переменные в задаче обезразмеривались с использованием в качестве масштабов осевой скорости струи на срезе сопла U_{jet} и диаметра сопла D . Подробности численного алгоритма и результаты его применения для моделирования течения в ближней и дальней областях струи можно найти в [22].

3.2. Результаты расчетов

На рис. 7—10 представлены результаты расчетов характеристик осредненного и турбулентного движения по модели, описание которой приведено выше. На этих рисунках проводится сопоставление рассчитанных величин с экспериментальными данными [12; 13] и аналогичными характеристиками, полученными численно на основе LES-моделирования [17; 18].

На рис. 7 показано изменение вниз по течению осевых значений средней скорости U_c и интенсивностей турбулентных флуктуаций (r.m.s.) продольной и радиальной компонент скорости. Все характеристики имеют размерность м/с. Величина U_c вырождается медленнее, чем в LES-расчетах. Две другие величины, определенные в LES- и RANS-расчетах, с ростом расстояния от сопла меняются практически одинаково.

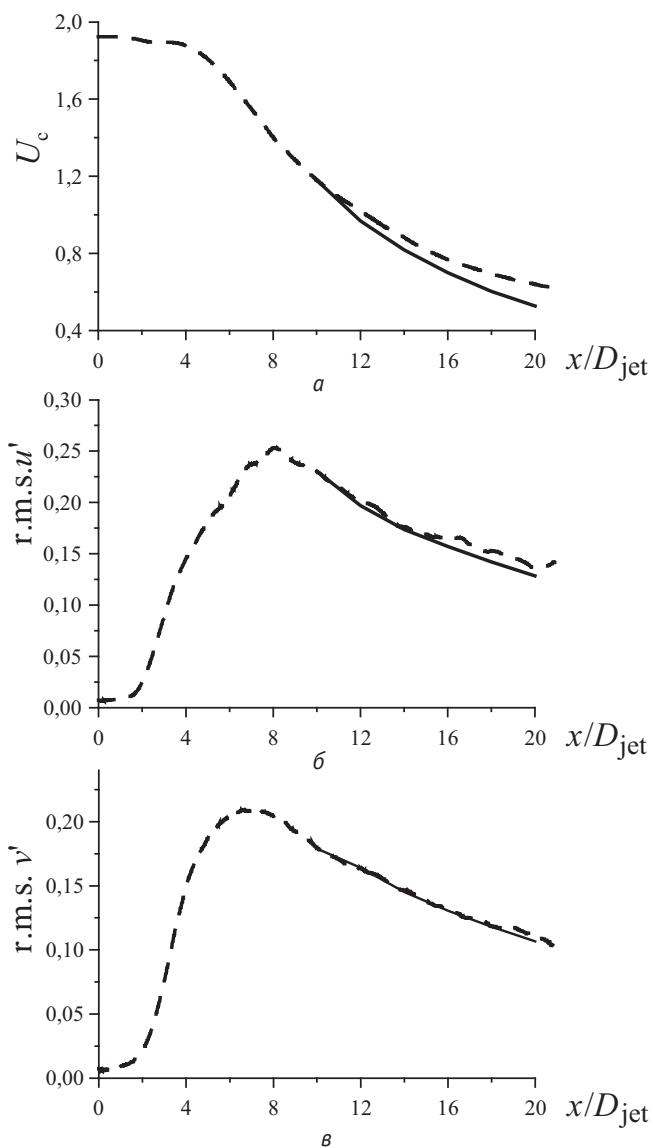


Рис. 7. Эволюция осевого значения средней скорости U (а), осевых значений r.m.s. пульсаций скорости u' (б) и v' (в) вниз по течению. Сплошные линии — результаты численного моделирования, пунктирные линии — LES-расчет [17; 18]

На рис. 8 представлены радиальные профили двух составляющих средней скорости и их r.m.s. для расстояния вниз по потоку $x/D = 16$. Эти величины приводятся в размерном виде и соответствуют результатам расчетов по настоящей модели, LES-расчетам и экспериментальным данным [12; 13]. Качественно и количественно эти данные достаточно близки.

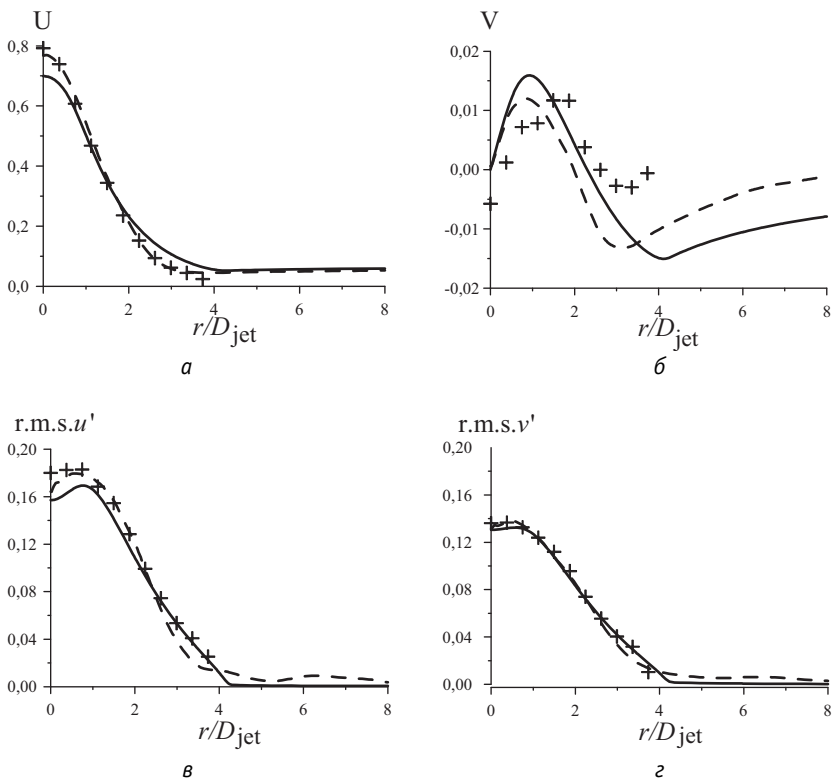


Рис. 8. Поперечные распределения продольной (а) и радиальной (б) компонент средней скорости и их r.m.s. (в, г). Данные представлены в размерном виде для $x/D = 16$. Обозначения такие же, как на рис. 7. Крестики — экспериментальные данные [12; 13]

Заметим, что «наполненность» профиля скорости U на периферии струи и максимум r.m.s. u' можно в расчетах получить более близкими к экспериментальным, используя другой стандартный набор эмпирических констант. Однако их варьирование в работе не производилось. Использовались эмпирические постоянные (те же, что в [22]), чтобы подчеркнуть достаточную универсальность модели.

На рис. 9 демонстрируются нормированные на соответствующую величину осевой продольной скорости радиальные распределения средней скорости U и трех моментов второго порядка — компонент тензора реинольдсовых напряжений $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle u'v' \rangle$ для $x/D = 16$.

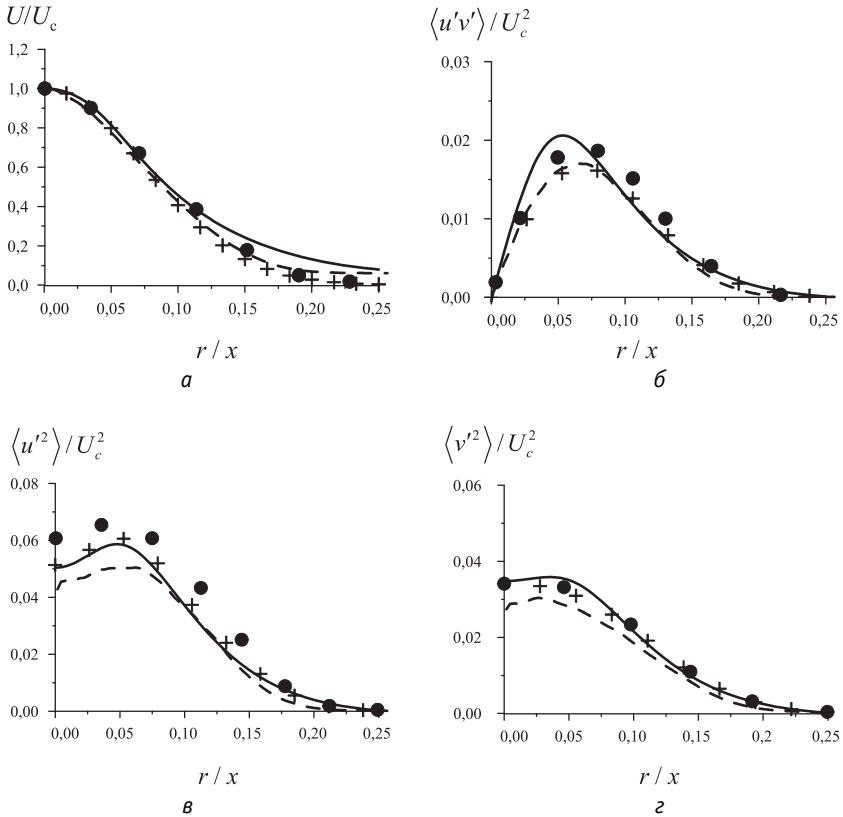


Рис. 9. Нормированные радиальные профили продольной скорости U (а), касательного $\langle u'v' \rangle$ (б) и нормальных $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$ (в, г) реинольдсовых напряжений для $x/D = 16$. Сплошные линии — результаты численного моделирования, пунктирные линии — LES-расчет [17,18], + — экспериментальные данные [12; 13], ● — экспериментальные данные [26]

Видно, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с данными экспериментов, а при моделировании вторых моментов $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$ даже несколько превосходят по точности результаты LES. На этом рисунке добавлены результаты считающихся классическими экспериментов [26], выполненных для автомодельной области течения в круглой турбулентной струе.

В настоящей работе проводился также расчет тех турбулентных моментов третьего порядка, моделирование которых производилось для получения замкнутой системы уравнений модели, записанных в цилиндрической системе координат в приближении тонкого сдвигового слоя. При аппроксимации диффузионных слагаемых в уравнении переноса вторых моментов использовалась простейшая градиентная алгебраическая модель для третьих моментов [27].

Некоторые результаты расчетов третьих моментов представлены на рис. 10. Видно, что, например, для величин $\langle v'^3 \rangle$ и $\langle u'^2 v' \rangle$ результаты расчетов оказались близки к результатам LES-моделирования и качественно согласуются с экспериментальными значениями. Для других моментов третьего порядка, участвующих в замыкании модели, качественное и количественное расхождение с экспериментом и данными LES-моделирования получилось более существенным. Вероятно, ситуацию можно улучшить, отказавшись от модели [27] в пользу более полных современных моделей. Но в этом случае появится большое число членов в уравнениях системы. Кроме того, из литературы известно, что роль модели диффузионных слагаемых гораздо меньше, чем аппроксимация корреляций с пульсациями давления и диссипативных членов в системе уравнений Рейнольдса.

Таким образом, с использованием математической модели, включающей в себя дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений, выполнено численное моделирование динамики турбулентной круглой струи. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [12; 13]. Проведенное сравнение полученных данных с результатами LES-моделирования [17; 18] позволяет сделать вывод, что для рассмотренного вида турбулентных течений оба подхода позволяют получить близкие величины основных характеристик турбулентности в струе (при этом трудоемкость и время расчета двумя этими методами несопоставимы). Наибольшие отличия наблюдались при вычислении моментов третьего порядка — здесь LES-расчеты оказались более близкими к экспериментальным данным.

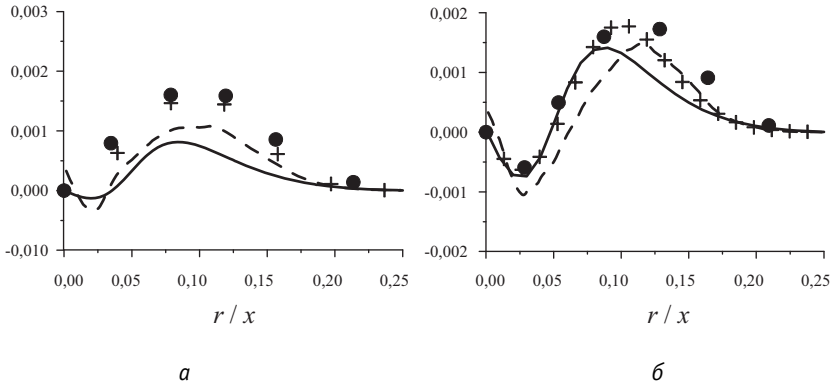


Рис. 10. Нормированные радиальные профили моментов третьего порядка: $\langle v'^3 \rangle$ (а) и $\langle u'^2 v' \rangle$ (б) для $x/D = 16$.
Обозначения такие же, как на рис. 9

4. Закономерности осаждения частиц из турбулентного газодисперсного потока в каналах

Осаждение частиц малого размера из турбулентного потока на ограничивающие поверхности привлекает внимание исследователей на протяжении почти пяти десятилетий [28] вследствие актуальности этой задачи для многих отраслей индустрии, где встречаются двухфазные газодисперсные потоки, таких как полупроводниковая промышленность, медицина, ядерная энергетика, химическая технология, экология и др. Но даже упрощенная постановка задачи осаждения частиц, в которой концентрация частиц мала настолько, что отсутствует обратное влияние дисперсной фазы на турбулентность несущей фазы, представляет серьезные трудности для решения. Основная проблема — адекватный учет взаимодействия инерционных частиц с турбулентностью несущей фазы, приводящего к нелокальности турбулентного переноса частиц. Традиционные модели турбулентных двухфазных потоков, основанные на локально равновесных соотношениях между турбулентными напряжениями дисперсной и несущей фаз, справедливы только для малоинерционных частиц со временем релаксации, меньшим лагранжева масштаба времени турбулентности. Для инерционных частиц учет нелокальности турбулентного переноса в рамках эйлера подхода требует при-

влечения уравнений переноса высших моментов пульсаций скорости частиц, замкнутых с помощью гипотез замыкания [29].

Сложность нелокальных моделей переноса моментов скорости частиц и неопределенность погрешностей замыкания затрудняют их верификацию для такого сложного объекта, как дисперсные турбулентные течения. Поэтому представляется актуальным проведение анализа общих закономерностей турбулентного дисперсного течения с осаждающимися частицами, которые могут быть получены методами анализа размерностей и подобия без обращения к гипотезам замыкания.

Анализ размерностей тесно связан с методом сращиваемых асимптотических разложений, главное приближение которого основано на допущении о существовании области перекрытия, в которой одновременно справедливы законы подобия, описывающие структуру течения в различных областях [30; 31]. Применение этого метода к анализу турбулентных течений опирается на достаточно хорошо подтверждаемый в экспериментах известный принцип подобия по числу Рейнольдса [32], из которого вытекает разделение области течения на внешнюю и внутреннюю области, а также область перекрытия.

Впервые подобный подход был предложен в [33] и развит для исследования влияния различных воздействий на турбулентные пограничные слои и течения в каналах в [4; 31; 34; 35]. Как было отмечено в [35], наиболее впечатляющий результат асимптотической теории турбулентных течений — вычисление профиля средней скорости и коэффициента трения для турбулентного течения в канале в главном приближении теории возмущений без использования каких-либо моделей замыкания уравнений турбулентного движения.

В настоящей работе метод сращиваемых асимптотических разложений (МСАР) в его простейшем варианте анализа главных приближений в сочетании с анализом размерностей и подобия будет использован для исследования закономерностей осаждения частиц на поверхности, ограничивающие турбулентное дисперсное течение, в пределе больших чисел Рейнольдса потока.

4.1. Постановка задачи и определяющие параметры

Рассматривается турбулентный поток газа на участке развитого течения в канале или круглой трубе с взвешенными твердыми или жидкими монодисперсными частицами на участке развитого течения, т. е. за пределами входного начального участка. Плотность частиц ρ_p предполагается много большей плотности несущей фазы ρ_f . Массовая концентрация частиц предполагается малой, что позволяет пренебречь влиянием дисперсной фазы на турбулентное течение несущей среды. Число Рейнольдса потока

$R_+ = \mathbf{v}_\tau R / \nu$, определенное по динамической скорости \mathbf{v}_τ , радиусу трубы (канала) R и кинематической вязкости несущей среды ν , полагается достаточно большим, чтобы считать турбулентное течение развитым в смысле выполнения принципа подобия по числу Рейнольдса [32]. Динамика частиц описывается уравнениями движения в приближении точечных сил, приложенных к центрам масс отдельных частиц [29; 36; 37]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{v}}{\tau_p} + \mathbf{F}_B, \quad (10)$$

где \mathbf{v} — скорость частицы; $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)$ — скорость несущей среды в точке нахождения частицы $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p(t)$; τ_p — время динамической релаксации частицы; \mathbf{F}_B — случайные ускорения частицы под действием броуновского движения несущей среды, существенные для частиц малых размеров [36; 37] и определяемые коррелятором типа гауссова белого шума $\langle F_{iB}(t)F_{jB}(t') \rangle = 2\delta_{ij}D_B\tau_p^{-2}\delta(t-t')$, где D_B — коэффициент броуновской диффузии. Броуновское ускорение и скорость несущей среды в точке нахождения частицы предполагаются статистически независимыми.

Время динамической релаксации частицы определяется выражением, обобщающим известную формулу Стокса на случаи больших скоростей обтекания частицы и влияния дискретности окружающей среды, существенного для субмикронных частиц:

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\rho_f \nu} \frac{\varphi_1(\text{Kn})}{\varphi_2(\text{Re}_p)}, \quad (11)$$

где d_p — диаметр частицы; $\varphi_1(\text{Kn}) = 1 + \text{Kn} [A_1 + A_2 \exp(-A_3/\text{Kn})]$ — поправка Каннингема—Милликена; $A_1 = 1,257$; $A_2 = 0,40$; $A_3 = 1,1$ [38]; $\text{Kn} \equiv 2l_m / d_p$ — число Кнудсена; l_m — длина свободного пробега молекул в газе; $\varphi_2(\text{Re}_p) = 1 + 0,15\text{Re}_p^{0,687}$ — поправка Шиллера—Неймана [39]; $\text{Re}_p = |\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{v}| d_p / \nu$ — число Рейнольдса обтекания частицы.

Коэффициент броуновской диффузии частиц определяется формулой Эйнштейна — Сазерленда [40]

$$D_B = k_B T \tau_p / m_p,$$

где k_B — постоянная Больцмана; T — температура среды; m_p — масса частицы.

Модель точечных частиц (10) — хорошее приближение для малых частиц с диаметром, не превышающим колмогоровский микромасштаб длины, что позволяет пренебречь подъемной силой Саффмена и эффектами обтекания частиц турбулизированным потоком газа. Для рассматриваемого пристенного турбулентного течения такая модель применима, если диаметр частицы много меньше толщины вязкого подслоя $l_v \sim 10\nu/v_\tau$. Из этого условия с учетом (11) следует ограничение на безразмерное время релаксации частиц (параметр инерционности) $\tau_+ = \nu_\tau^2 \tau_p / \nu$, необходимое для справедливости приближения точечных частиц (10):

$$\tau_+ \ll \rho_p / \rho_f. \quad (12)$$

Еще одним упрощением модели (10) является пренебрежение влиянием гравитационного ускорения g и вызванной им скорости дрейфа частицы $\mathbf{v}_d = g\tau_p$, справедливое, если скорость дрейфа много меньше характерной скорости пульсационного движения несущей фазы — динамической скорости: $g\tau_p \ll v_\tau$. Из этого условия с учетом (11) вытекает условие, необходимое для несущественности силы тяжести:

$$\tau_+ \ll \frac{R_+^3}{Ar}, \quad (13)$$

где $Ar = gR^3/\nu^2$ — число Архимеда.

Из (12) и (13) следует, что при достаточно больших числах Рейнольдса $R_+ \gg (\rho_p Ar / \rho_f)^{1/3}$ условием применимости модели «точечных частиц без гравитации» (10) будет условие (12). Это означает, что для типичного значения $\rho_p / \rho_f = 833$ (вода — воздух) модель (10) можно использовать до значений $\tau_+ \sim 10^2$. При $R_+ \ll R_{+0} = (\rho_p Ar / \rho_f)^{1/3}$ граница применимости модели (10) сдвигается в сторону более низких τ_+ в соответствии с (13). Для водно-воздушного газокапельного потока и характерных для лабораторных условий значений радиусов трубы (канала) от 1 до 10 см значения R_{+0} составляют соответственно 330 и 3300. Таким образом, при достаточно больших числах Рейнольдса область применимости модели (10) включает в себя все три характерных режима осаждения частиц: диффузионный ($\tau_+ < 0,15$), диффузионно-импактный ($0,15 < \tau_+ < 20$) и инерционный ($\tau_+ > 20$) (по классификации [41]), что оправдывает ее широкое использование в моделировании турбулентных газодисперсных течений [29].

Частицы в результате неупругих столкновений со стенкой осаждаются из потока со скоростью $J_w = V_{2w} \Phi_w$, где V_{2w} — нормальная к стенке компонента скорости частиц; Φ_w — объемная концентрация частиц на стенке. Безразмерный коэффициент осаждения $j_+ = J_w / \mathbf{v}_\tau \Phi_m$, где Φ_m — среднemasсовая концентрация частиц, как правило, является малой величиной [41]. При этом концентрация частиц вдоль канала меняется медленно, что позволяет в первом приближении пренебречь влиянием продольных конвективных и диффузионных потоков дисперсной фазы на ее динамику в рассматриваемом сечении канала.

При сделанных допущениях турбулентное течение несущей среды определяется, как известно, следующим набором параметров [4; 31]: радиусом трубы (канала) R , динамической скоростью \mathbf{v}_τ и кинематической вязкостью ν . Динамика дисперсной фазы кроме перечисленных параметров несущей фазы зависит от входящих в уравнение движения частицы параметров τ_p и D_B и потока осаждения J_w , из которых можно составить определяющие безразмерные критерии: число Рейнольдса R_+ , параметр инерционности τ_+ , коэффициент осаждения j_+ и число Шмидта броуновской диффузии $Sc_B = \nu / D_B$.

4.2. Законы подобия профилей концентрации и моментов пульсаций скорости частиц в пристенном турбулентном течении

В соответствии с традиционной гипотезой подобия турбулентное течение несущей фазы во внутренней области полностью определяется молекулярной вязкостью ν и динамической скоростью \mathbf{v}_τ [4; 31], откуда вытекает выражение для характерной координаты области вязкого подслоя $y_+ = \mathbf{v}_\tau y / \nu$. При достаточно больших числах Рейнольдса R_+ влиянием внешнего масштаба длины на течение в вязком подслое можно пренебречь. Отсюда вытекают известные общие соотношения для средней скорости (закон стенки) и вторых моментов пульсаций скорости в вязком подслое [4; 31]. Аналогичные закономерности для концентрации дисперсной фазы и моментов пульсации скорости частиц можно получить на основании соображений размерности, используя приведенные в конце подраздела 4.1 определяющие параметры задачи:

$$\Phi = \frac{J_w}{\mathbf{v}_\tau} \left[\varphi_w(\tau_+, Sc_B) + \varphi_+(y_+, \tau_+, Sc_B) \right],$$

$$\langle \mathbf{v}'_i \mathbf{v}'_j \rangle = \mathbf{v}_\tau^2 \sigma_{p_{ij}}(y_+, \tau_+, Sc_B), \quad (14)$$

где φ_+ , $\sigma_{p_{ij}}$ — универсальные функции порядка единицы; φ_w — безразмерная концентрация частиц при $y_+ \rightarrow 0$, величина которой зависит от условий движения дисперсной фазы в непосредственной близости от стенки и граничных условий на стенке [29].

Во внешней области $y = O(R)$ параметры потока в силу принципа подобия по числу Рейнольдса не зависят от вязкости. Отсюда вытекают закон дефекта скорости для средней скорости несущей фазы и соответствующие выражения для вторых моментов пульсационной скорости [4; 31]. Поскольку вязкость и броуновская диффузия не должны оказывать существенного влияния на динамику дисперсной фазы во внешней области с преобладающим турбулентным переносом, единственный параметр, описывающий влияние инерционности частиц во внешней области, — критерий $St_0 = \tau_+/R_+ = \mathbf{v}_\tau \tau_p / R$. С учетом зависимости от параметра St_0 и исходя из соображений размерности для концентрации дисперсной фазы и для вторых моментов пульсаций скорости частиц во внешней области по аналогии с известным законом дефекта температуры (или пассивной примеси) [4; 31] можно записать общие выражения

$$\Phi_c - \Phi = \frac{J}{\mathbf{v}_\tau} F_p(\eta, St_0), \quad \langle \mathbf{v}'_i \mathbf{v}'_j \rangle = \mathbf{v}_\tau^2 \Sigma_{p_{ij}}(\eta, St_0), \quad (15)$$

где F_p , $\Sigma_{p_{ij}}$ — универсальные функции порядка единицы; Φ_c — концентрация частиц на оси канала.

Из условия сращивания внутреннего и внешнего разложений для профиля скорости и вторых моментов пульсаций скорости в области перекрытия $\nu/\mathbf{v}_\tau \ll y \ll R$, называемой также логарифмическим слоем, вытекает универсальный логарифмический закон для средней скорости и соответствующие выражения для вторых моментов пульсаций скорости [4; 31; 33]. Сращивание внутреннего (14) и внешнего (15) разложений для профиля концентрации дисперсной фазы и вторых моментов пульсаций скорости частиц в логарифмическом подслое приводит к асимптотическим соотношениям

$$\varphi_w(\tau_+, Sc_B) + \varphi_+(y_+, \tau_+, Sc_B) = \Phi_{c+} - F_p(\eta, St_0), \quad (16)$$

$$\sigma_{p_{ij}}(y_+, \tau_+, Sc_B) = \Sigma_{p_{ij}}(\eta, St_0), \quad \eta \ll 1, \quad y_+ \gg 1. \quad (17)$$

В правую часть (17) не входят коэффициент броуновской диффузии и молекулярная вязкость, поэтому левая часть также не должна от них зави-

сеть. Отсюда следует, что при $y_+ \rightarrow \infty$ зависимость функции $\sigma_{p_{ij}}$ от числа Шмидта и от ν должна исчезать. Правая часть (17) также не зависит от вязкости, а в левой части присутствуют параметры y_+ и τ_+ , обратно пропорциональные ν . Единственной комбинацией аргументов функции $\sigma_{p_{ij}}$, не зависящей от ν и D_B , является величина $y_p = y_+ / \tau_+ = y_+ / (\mathbf{v}'_t \tau_p)$. Аналогично, поскольку в левую часть (17) не входит внешний масштаб длины R , правая часть должна зависеть только от комплекса $\eta / St_o \equiv y_p$. Отсюда следует, что в логарифмическом слое вторые моменты пульсаций скорости частиц должны быть универсальной функцией y_p :

$$\sigma_{p_{ij}} = \Sigma_{p_{ij}} = T_{ij}(y_p), \quad \langle \mathbf{v}'_i \mathbf{v}'_j \rangle = \mathbf{v}'_t^2 T_{ij}(y_p), \quad \eta \ll 1, \quad y_+ \gg 1, \quad (18)$$

где T_{ij} — универсальная функция.

Для решения функционального уравнения (16) удобно применить к обеим его частям операцию $y \partial / \partial y = y_+ \partial / \partial y_+ = \eta \partial / \partial \eta$:

$$y_+ \frac{\partial \varphi_+(y_+, \tau_+, Sc_B)}{\partial y_+} = -\eta \frac{\partial F_p(\eta, St_o)}{\partial \eta}, \quad \eta \ll 1, \quad y_+ \gg 1. \quad (19)$$

Из соображений, аналогичных использованным выше при выводе (18), следует, что правая и левая части (19) — некоторая универсальная функция $\Psi(y_p)$:

$$\frac{\partial \varphi_+(y_+, \tau_+, Sc_B)}{\partial \ln y_+} = -\frac{\partial F_p(\eta, St_o)}{\partial \ln \eta} = \Psi(y_p), \quad \eta \ll 1, \quad y_+ \gg 1. \quad (20)$$

Безразмерная координата y_p равна отношению характерного периода турбулентных пульсаций скорости несущей фазы в логарифмическом подслое y / \mathbf{v}'_t к времени релаксации частицы τ_p . Разумно предположить, что при больших $y_p \gg 1$ влияние инерционности частиц должно исчезать, и мгновенная скорость частиц будет стремиться к скорости несущей фазы, т. е. частицы будут вести себя, как пассивная примесь. Это предположение эквивалентно гипотезе о существовании конечных пределов функций $\Psi(y_p)$, $T_{ij}(y_p)$ при больших значениях аргумента:

$$\lim_{y_p \rightarrow \infty} \Psi(y_p) = \frac{1}{\kappa_p}, \quad \lim_{y_p \rightarrow \infty} T_{ij}(y_p) = a_{ij}, \quad (21)$$

где κ_p — универсальная постоянная, связанная с постоянной Кармана $\kappa = 0,41$ через турбулентное число Прандтля в логарифмическом слое $Pr_t = 0,85$ соотношением $\kappa_p = \kappa/Pr_t = 0,48$ [31]. Поскольку в безынерционном пределе скорость частицы совпадает со скоростью лагранжевой частицы несущей фазы, то тензор a_{ij} совпадает с безразмерным (деленным на v_τ^2) тензором напряжений Рейнольдса однофазной среды в логарифмическом слое [4; 31].

Для турбулентного течения в трубе (канале) случай $y_p \gg 1$ внутри логарифмического слоя реализуется при условии $St_o \ll 1$, эквивалентном $\tau_+ \ll R_+$, когда существует интервал расстояний $\tau_+ \ll y_+ \ll R_+$. Ниже анализ будет проводиться именно для случая $\tau_+ \ll R_+$, который при $R_+ \gg 1$ охватывает все три характерных режима осаждения [41]. При этом зависимость от параметра St_o в (15) должна исчезнуть, с учетом чего из (20) и (21) следует логарифмический закон, аналогичный логарифмическому закону для пассивной примеси [4; 31]:

$$-F_p(\eta) = \frac{1}{\kappa_p} \ln \eta + A_p, \quad \varphi_+(y_+) = \frac{1}{\kappa_p} \ln y_+ + B_p(\tau_+, Sc_B), \quad (22)$$

где $A_p = O(1)$ — универсальная постоянная; $B_p(\tau_+, Sc_B)$ — универсальная функция, определяемая условиями движения частиц в вязком подслое.

Подстановка (22) в (16) приводит к соотношению

$$\Phi_{c+} = \frac{1}{\kappa_p} \ln R_+ + B_p(\tau_+, Sc_B) + \varphi_w(\tau_+, Sc_B) - A_p, \quad (23)$$

где $\Phi_{c+} = \mathbf{v}_\tau \Phi_c J_w^{-1}$.

Соотношение (23) дает связь между потоком осаждающихся частиц и концентрацией частиц на оси трубы при $\tau_+ \ll R_+$. Для вычисления коэффициента осаждения $j_+ = \Phi_{m+}^{-1}$ необходимо определить среднемассовую концентрацию. Однако из (15) следует, что разница между безразмерными концентрацией на оси и среднемассовой концентрацией — величина порядка единицы: $\Phi_{m+} = \Phi_{c+} + O(1)$, которая мала на фоне первого слагаемого в правой части (23). С учетом этого скорость осаждения в главном приближении может быть получена непосредственно из (23):

$$j_+^{-1} = B_p(\tau_+, Sc_B) + \varphi_w(\tau_+, Sc_B) + \frac{Pr_t}{\kappa} \ln R_+ + O(1) \quad (24)$$

Как следует из (18) и (20), в логарифмическом слое динамика частиц определяется дополнительным масштабом длины $l_p = \nu_\tau \tau_p$, известным под названием пути торможения инерционной частицы [41]. Его физический смысл состоит в том, что вовлеченные в движение турбулентными пульсациями скорости несущей фазы частицы сохраняют интенсивность пульсационного движения на расстояниях порядка l_p . Если длина l_p превышает толщину вязкого подслоя $l_v \sim 10\nu/\nu_\tau$, что соответствует $\tau_+ > 10$, то частицы, вовлеченные в турбулентное движение в прилегающих к вязкому подслою буферной области и логарифмическом слое, будут «залетать» в вязкий подслой, сохраняя там существенный уровень пульсаций скорости. При $l_p \ll l_v$, что соответствует малоинерционным частицам с $\tau_+ \ll 1$, интенсивность пульсационной скорости частиц будет близка к интенсивности пульсаций несущей фазы, т. е. затухать в вязком подслое при приближении к стенке. Это означает, что при росте параметра инерционности и его приближении к величинам порядка $\tau_+ \sim 10$ должна происходить турбулизация движения частиц в вязком подслое — переход от малых интенсивностей пульсаций скорости частиц при $\tau_+ \ll 1$ к величинам, сопоставимым с интенсивностью пульсаций во внешней области при $\tau_+ \geq 10$.

Такой вывод подтверждается результатами моделирования динамики частиц в пристенной зоне на основе уравнения для вторых моментов скорости частиц [29; 42], согласно которым пульсационная энергия частиц на стенке равна нулю для частиц с $\tau_+ < \tau_{cr}$ и отличается от нуля при $\tau_+ > \tau_{cr}$, причем критическое значение параметра инерционности τ_{cr} — точка бифуркации решения. Из упрощенного решения задачи с модельным ступенчатым распределением интенсивности турбулентности несущей фазы в пристенной зоне в [42] получено $\tau_{cr} = 2,62$, что не противоречит приведенной выше оценке порядка величины $\tau_{cr} \sim 10$.

Согласно изложенным выше соображениям для частиц с $\tau_+ > \tau_{cr}$ наличие вязкого подслоя у стенки не должно влиять на турбулентное движение частиц в пристенной области, поэтому вязкость и броуновская диффузия — несущественные параметры для инерционных частиц. Тогда из соображений размерности и подобия следует, что распределения концентрации и моментов пульсаций скорости частиц во всей внутренней области должны быть универсальными функциями координаты $y_p = y/l_p$:

$$\Phi = \frac{J_w}{\mathbf{v}_\tau} \Phi_p(y_p), \quad \langle \mathbf{v}'_i \mathbf{v}'_j \rangle = \mathbf{v}_\tau^2 \Gamma_{ij}(y_p). \quad (25)$$

Сращивание (25) с полученным выше логарифмическим законом (21) с учетом (14) при $y_p \gg 1$ приводит к соотношениям

$$\Phi_p(y_p) = \frac{\text{Pr}_\tau}{\kappa} \ln y_p + C_p + o(1), \quad (26)$$

$$B_p(\tau_+, \text{Sc}_B) + \varphi_w(\tau_+, \text{Sc}_B) = -\frac{\text{Pr}_\tau}{\kappa} \ln \tau_+ + C_p + o(1), \quad (27)$$

где $C_p = O(1)$ — универсальная постоянная.

Из (24) и (27) следует закон осаждения инерционных частиц

$$j_+^{-1} = \frac{\text{Pr}_\tau}{\kappa} \ln \frac{R_+}{\tau_+} + O(1). \quad (28)$$

Скорость малоинерционных частиц с $\tau_+ \ll \tau_{cr}$ близка к скорости несущей фазы, поэтому для второго момента нормальной к стенке компоненты пульсационной скорости частиц можно воспользоваться квазиравновесным соотношением [42]

$$\langle \mathbf{v}'_y{}^2 \rangle = f_u \langle u_y^2 \rangle + D_B / \tau_p, \quad (29)$$

где коэффициент вовлечения f_u — величина порядка единицы, имеющая асимптотическое поведение [29]:

$$f_u = 1 + O(\tau_+), \quad \tau_+ \ll 1, \quad f_u = T_+ / \tau_+ + o(\tau_+^{-1}), \quad \tau_+ \gg 1, \quad (30)$$

где $T_+ = \mathbf{v}_\tau^2 T_L / \nu$; T_L — интегральный масштаб времени нормальной к стенке пульсационной скорости несущей фазы, а нормальные напряжения Рейнольдса несущей фазы имеют асимптотику

$$\langle u_y^2 \rangle = A_{22} \mathbf{v}_\tau^2 y_+^4 + O(y_+^5), \quad (31)$$

где A_{22} — универсальная постоянная.

Осаждение малоинерционных частиц происходит в основном под действием броуновской и турбулентной диффузии. Вследствие больших значений числа Шмидта изменение концентрации частиц происходит в тонком диффузионном подслое, толщина которого в $\text{Sc}_B^{1/m}$ раз меньше гидродинамического

вязкого подслоя [4], где $m = 4$ — показатель степени затухания нормальных к стенке турбулентных напряжений Рейнольдса (31). При возрастании параметра инерционности τ_+ на осаждение частиц оказывает влияние сила турбофореза, приводящая к миграции частиц со скоростью $V_p = -\tau_p \partial \langle \mathbf{v}_y^2 \rangle / \partial y$ [28; 29]. С учетом (29) $V_p = -\tau_p \partial (f_u \langle u_y^2 \rangle) / \partial y$. В соответствии с известным результатом Чена [43] коэффициенты турбулентной диффузии малоинерционных частиц и несущей фазы совпадают ($D_t = \langle u_y^2 \rangle T_L$), что позволяет записать уравнение для распределения концентрации частиц [29] в пристенной области в главном приближении в виде

$$(D_B + \langle u_y^2 \rangle T_L) \frac{d\Phi}{dy} + \tau_p \Phi \frac{d(f_u \langle u_y^2 \rangle)}{dy} = J_w. \quad (32)$$

Граничное условие для концентрации малоинерционных броуновских частиц на стенке имеет вид [42]

$$\Phi_w = a \sqrt{D_B \tau_p} \left[\frac{d\Phi}{dy} \right]_w, \quad (33)$$

где нижний индекс w означает значение величины на стенке; $a = O(1)$ — некоторый коэффициент, зависящий от параметров взаимодействия одинокрой частицы со стенкой [29; 42].

После перехода в области диффузионного подслоя к характерным координате $Y = y_+ (A_{22} T_+ S c_B)^{1/4}$ и концентрации $\Psi = (A_{22} T_+)^{1/4} S c_B^{-3/4} \Phi_+$, где $\Phi_+ = \mathbf{v}_\tau \Phi / J_w$, уравнение (32) и граничное условие (33) с учетом асимптотик (30) и (31) принимают форму

$$(1 + Y^4) \frac{d\Psi}{dY} + \frac{f_u \tau_+}{T_+} 4Y^3 \Psi = 1 + O(S c_B^{-1/4}), \quad \Psi_w = O(\tau_+^{1/2} S c_B^{-1/4}).$$

Асимптотика решения этой задачи при $Y \rightarrow \infty$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi &= (1 + Y^4)^{-\varepsilon} \int_0^Y (1 + x^4)^{-1+\varepsilon} dx + O(S c_B^{-1/4}) = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} Y^{-4\varepsilon} [1 + O(\varepsilon)] + O(S c_B^{-1/4}), \end{aligned} \quad (34)$$

где $\varepsilon = f_u \tau_+ / T_+$ — малый параметр.

Асимптотика (34) задает условие сращивания решения распределением концентрации (14) в области вязкого подслоя. Внешний предел внутреннего разложения (34) в области $y_+ = O(1)$

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}(A_{22}T_+)^{1/4+\varepsilon}} Sc_B^{3/4-\varepsilon} y_+^{-4\varepsilon} = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}(A_{22}T_+)^{1/4}} Sc_B^{3/4-\varepsilon} [1 + O(\varepsilon \ln y_+)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Сращивание (35) с внутренним пределом внешнего разложения, т. е. пределом (14) при $y_+ \rightarrow 0$, возможно, если предположить, что функция $\varphi_w(\tau_+, Sc_B)$ имеет больший порядок величины, чем $\varphi_+ = O(1)$, и определяется соотношением

$$\varphi_w(\tau_+, Sc_B) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}(A_{22}T_+)^{1/4}} Sc_B^{3/4-\varepsilon} [1 + O(\varepsilon)]. \quad (36)$$

Поскольку число Шмидта для аэрозолей и более крупных частиц весьма велико ($Sc_B = 10^5 \sim 10^7$), то величина φ_w дает определяющий вклад в выражение для коэффициента осаждения (24), который может быть записан следующим образом:

$$j_+ = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (A_{22}T_+)^{1/4} Sc_B^{-3/4+\varepsilon} [1 + O(\tau_+) + O(Sc_B^{-3/4+\varepsilon} \ln R_+)]. \quad (37)$$

Из экспериментальных данных по массоотдаче в турбулентных потоках при больших Sc известно связанное с асимптотикой коэффициента турбулентной диффузии вблизи стенки произведение $A_{22}T_+ = 3 \cdot 10^{-4}$ [44]. Величину лагранжева масштаба времени в нормальном к стенке направлении можно оценить на основе данных прямого численного моделирования [45; 46] как $T_+ \approx 5$. С использованием этих значений закон осаждения малоинерционных частиц (37) в главном приближении принимает вид

$$j_+ = 0,12 Sc_B^{-3/4+f_u \tau_+/T_+}. \quad (38)$$

В пределе безынерционных частиц $\tau_+ \rightarrow 0$ зависимость (38) стремится к известной зависимости для коэффициента массоотдачи пассивной приме-

си при больших числах Шмидта $j_+ = 0,12Sc_B^{-3/4}$ [47], которая хорошо себя зарекомендовала при описании осаждения аэрозолей [48]. Близкие к ней критериальные зависимости $j_+ = j_+(Sc_B)$ используются в [28; 41; 49—51]. Соответствующий режим осаждения называют диффузионным, и согласно общепринятой классификации его верхняя граница примерно соответствует значению $\tau_+ = 0,15$ [41]. Полученный результат (38) учитывает в первом порядке приближения по малому параметру $\varepsilon = f_u \tau_+ / T_+$ влияние силы турбофореза на диффузионное осаждение частиц без привлечения каких-либо гипотез замыкания. Как следует из (38), при росте параметра инерционности τ_+ коэффициент осаждения возрастает экспоненциально, что согласуется с наблюдающимся в имеющихся экспериментальных данных резким ростом коэффициента осаждения в диффузионно-импактном режиме осаждения $0,15 < \tau_+ < 20$ [41] (см. также раздел 3).

В логарифмическом слое $1 \ll y_+ \ll R_+$ зависимость концентрации от параметра инерционности τ_+ в двух характерных областях $\tau_+ = O(1)$ и $\tau_+ = O(y_+)$ будет описываться разложениями (14), (22) и (25), которые можно рассматривать как внутреннее и внешнее разложения концентрации для малых и больших τ_+ соответственно. В этом случае выражение (26), полученное при $1 \ll \tau_+ \ll y_+$, — внутренний предел внешнего разложения и одновременно внешний предел внутреннего разложения. Сложение (14) и (25) за вычетом (26) позволяет найти составное разложение [30] для концентрации в логарифмическом слое, равномерно пригодное во всей области изменения параметра τ_+ :

$$\Phi = \frac{J_w}{\nu_\tau} \left[B_{wf}(\tau_+, Sc_B) + \Phi_p(y_p) \right], \quad (39)$$

$$B_{wf}(\tau_+, Sc_B) = \varphi_w(\tau_+, Sc_B) + B_p(\tau_+, Sc_B) + \frac{Pr_t}{\kappa} \ln \tau_+ - C_p, \quad (40)$$

где B_{wf} — универсальная функция, асимптотики которой на основании (27) и (36) имеют вид

$$B_{wf}(\tau_+, Sc_B) = 8,4Sc_B^{3/4 - f_u \tau_+ / T_+} \left[1 + O(\tau_+) \right], \quad \tau_+ \ll \tau_{cr},$$

$$B_{wf}(\tau_+, Sc_B) = o(1), \quad \tau_+ \gg \tau_{cr}. \quad (41)$$

Аналогичным образом из вторых соотношений в (21) и (25) следует составное разложение для второго момента пульсационной скорости частиц, которое оказывается равным второму соотношению (25):

$$\langle \mathbf{v}'_i \mathbf{v}'_j \rangle = \mathbf{v}'^2 T_{ij} (y_p). \quad (42)$$

Выражения (39) и (42) представляют собой закономерности распределений концентрации частиц и моментов пульсаций скорости частиц в логарифмическом слое пристенного турбулентного течения и могут быть использованы как граничные условия типа пристеночных функций для численного моделирования турбулентных дисперсных течений с осаждением частиц на стенку. Для этого необходимо определить конкретный вид функций Φ_p , B_{wf} , T_{ij} во всем диапазоне изменения параметра τ_+ с помощью обработки экспериментальных данных или подходящих моделей динамики инерционных частиц в турбулентном потоке.

4.3. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Имеющиеся в литературе данные измерений в потоках с осаждающимися частицами не содержат профилей концентраций частиц и моментов пульсационной скорости частиц и ограничиваются только результатами измерений коэффициента осаждения, с которыми и будет проведено сравнение полученных результатов. При сравнении теоретических расчетов и экспериментальных данных скорости осаждения частиц необходимо учитывать большой разброс экспериментальных данных, связанный с высокой чувствительностью результатов измерений к влияниям различных особенностей условий эксперимента, в частности трудно контролируемой полидисперсности частиц [28; 50].

На рис. 11 приведены данные эксперимента и численного моделирования по скорости осаждения частиц на стенки турбулентного течения в трубах и каналах в сравнении с асимптотическими зависимостями (28) и (38). Для коэффициента увлечения в (38) использовалась аппроксимация для высоких чисел Рейнольдса турбулентного потока несущей фазы $f_u = T_+ / (\tau_+ + T_+)$ [29]. Согласно (38) в диффузионно-импактном режиме осаждения безразмерный коэффициент осаждения частиц j_+ зависит не только от параметра τ_+ , но и от Sc_B . Для иллюстрации влияния числа Sc_B на рис. 11 помещены результаты расчета коэффициента осаждения по (38) для трех чисел Шмидта, соответствующих трем значениям диаметра частиц в экспериментах [51]. Как видно из рис. 11, расчеты по (38) неплохо согласуются как с экспериментальными данными [51], так и с данными DNS- и LES-моделирования [52—54] вплоть до значений $\tau_+ \sim 10$,

находящихся уже за пределами применимости асимптотической формулы (38), что может быть объяснено удачным выбором малого параметра $\varepsilon = f_u \tau_+ / T_+$. С ростом параметра инерционности частиц τ_+ влияние Sc_B уменьшается, что выражается в сближении кривых, соответствующих различным числам Шмидта. Таким образом, часто встречающееся мнение о независимости коэффициента осаждения от броуновской диффузии в диффузионно-импактном режиме [41; 49; 50; 55] нельзя считать обоснованным. Для инерционных частиц согласно (28) скорость осаждения не зависит от коэффициента броуновской диффузии и слабо растет с увеличением τ_+ . На рис. 11 также приведены результаты расчета коэффициента осаждения по (28) для условий эксперимента [55] в круглой трубе при $Re = 5 \cdot 10^4$ ($R_+ = 1317$). Начиная с $\tau_+ = 10$ и вплоть до $0,06R_+$, соответствующего примерной границе применимости выражения (28), наблюдается удовлетворительное согласие с экспериментальными данными [55].

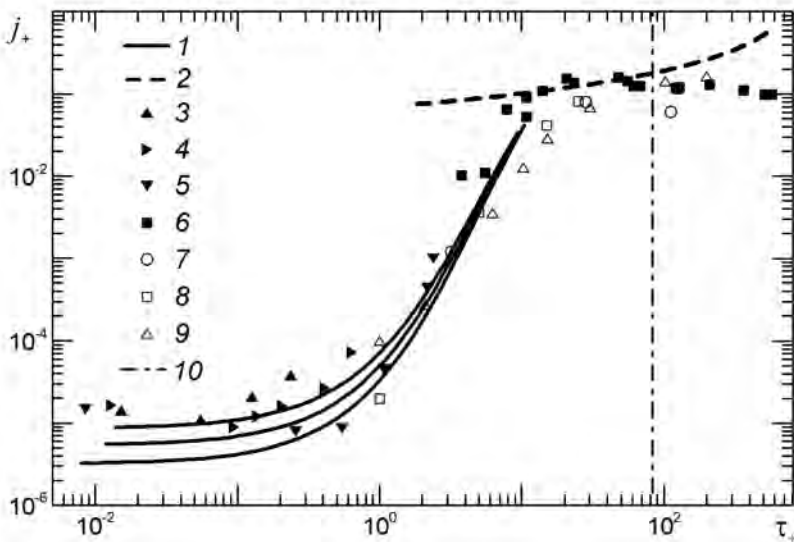


Рис. 11. Зависимости коэффициента осаждения от параметра инерционности частиц: 1 — асимптотика (38) для (сверху вниз) $Sc_B = 3,4 \cdot 10^5, 6,3 \cdot 10^5, 1,3 \cdot 10^6$; 2 — асимптотика (28); 3—5 — эксперимент [51] для $d_p = 0,65, 1,1, 2,1$ мкм ($Sc_B = 3,4 \cdot 10^5, 6,3 \cdot 10^5, 1,3 \cdot 10^6$); 6 — эксперимент [55] для $d_p = 1,6—21$ мкм; 7 — DNS [52]; 8 — DNS [53]; 9 — LES [54]; 10 — граница применимости асимптотики (28) $\tau_+ = 0,06R_+$ для течения в трубе при $Re = 5 \cdot 10^4$

Для более инерционных частиц при $\tau_+ > 0,06R_+$ влияние инерции частиц снижает интенсивность пульсационного движения частиц, что ведет к падению скорости осаждения по сравнению с (28).

Стоит отметить, что согласно полученным результатам (28) и (38) скорость осаждения частиц при $\tau_+ \ll R_+$ в главном приближении не зависит от условий и геометрии течения во внешней области и определяется динамической скоростью. Если для малоинерционных частиц, скорость осаждения которых определяется исключительно условиями движения частиц в глубине вязкого подслоя, этот результат выглядит естественным, то для инерционных частиц он может вызвать удивление. Действительно, для лабораторных течений (см., например, [55]) главный член разложения (28) имеет невысокий порядок величины $O(10^1)$, и определяемая видом распределений скорости и концентрации во внешней области поправка $O(1)$ в (28) должна вносить заметный вклад в коэффициент осаждения. Однако вычисление этой поправки в аналогичной (как было показано в подразделе 4.2) задаче теплопереноса в каналах, проведенное в [31] для эквивалентного коэффициенту осаждения критерия теплоотдачи $St\sqrt{2/c_f}$, показало, что ее величина имеет порядок $O(10^{-1})$, и это объясняет наблюдаемую неплохую точность одночленного разложения (28).

Таким образом, с помощью анализа размерностей и подобия в сочетании с методом сращиваемых асимптотических разложений проведен анализ задачи осаждения частиц из турбулентного потока на ограничивающие поверхности при больших числах Рейнольдса потока и значениях параметра инерционности $\tau_+ \ll R_+$. Для диффузионно-импактного режима и инерционного режима осаждения частиц получены асимптотические выражения для скорости осаждения, хорошо согласующиеся как с имеющимися экспериментальными данными, так и с данными DNS- и LES-моделирования. Получены составные разложения для концентрации частиц и вторых моментов пульсаций скорости частиц в логарифмическом слое, которые могут быть использованы для постановки граничных условий типа пристеночных функций при численном моделировании турбулентных дисперсных течений с осаждением частиц на стенку.

5. Развитие диффузионно-инерционной модели для осаждения частиц в турбулентных потоках

Газодисперсные турбулентные течения встречаются во многих технических приложениях от полупроводниковой промышленности и медицины до задач технологий очистки воздуха в помещениях, энергетики (загрязнение теплообменников) и др. В ядерной энергетике одной из наиболее актуальных задач является моделирование распространения радиоактивных аэрозолей при аварийных выбросах в окружающую среду, а также их осаждения на стенки трубопроводов. В то время как транспорт частиц удовлетворительно предсказывается современными моделями аэрогидродинамики, осаждение капель и аэрозольных частиц на ограничивающие поток твердые поверхности до сих пор остается сложной для моделирования задачей. Адекватное описание процессов взаимодействия инерционных частиц с турбулентными вихрями несущей фазы представляет трудности не только для традиционных RANS-моделей турбулентных дисперсных течений, но и для более сложных моделей крупных вихрей (LES); особенно это относится к явлениям кластеризации и аккумуляции инерционных частиц в турбулентных течениях [29], которые могут влиять на скорость осаждения частиц на стенку.

Поэтому задача разработки моделей переноса и осаждения аэрозольных частиц, простых для использования в инженерных расчетах и учитывающих наиболее важные эффекты инерционности частиц, приобретает особую важность для развития современных термогидравлических и CFD-кодов. В них, как правило, для моделирования многофазных течений применяется так называемый эйлеров подход, в котором для несущей и дисперсной фаз используются отдельные осредненные уравнения переноса импульса и энергии (двухжидкостные модели). Во многих случаях для аэрозолей и капель малого размера со сравнительно низкой инерционностью хорошим приближением является диффузионно-инерционное описание [56; 57], в котором относительная скорость движения фаз определяется в локально-равновесном приближении баланса действующих на дисперсную фазу сил межфазного трения, турбулентной диффузии и турбофореза. Простота реализации диффузионно-инерционной модели обуславливает ее привлекательность для использования в термогидравлических и CFD-кодах.

Точность моделирования турбулентного дисперсного течения с помощью той или иной модели во многом определяется адекватно поставленными граничными условиями. Известно, что постановка граничных условий непосредственно на стенке сопряжена с необходимостью численного разрешения весьма тонкой области вязкого подслоя. Помимо существенного увеличения числа узлов конечно-разностной сетки и объема оперативной памяти

возникают проблемы моделирования влияния вязкости и твердой границы на турбулентное течение. В связи с этим не теряет актуальности постановка граничных условий с помощью метода пристеночных функций, в котором численное решение для характеристик потока сращивается на некотором расстоянии от стенки с соответствующими функциями, являющимися упрощенным решением задачи в пристенном (логарифмическом) подслое.

В настоящей работе приведены результаты дальнейшего развития диффузионно-инерционной модели [56; 57], касающиеся постановки граничных условий для турбулентного газокапельного или аэрозольного потока. Предложена пристеночная функция для концентрации дисперсного потока, учитывающая вызванные инерцией частиц эффекты неравновесности и нелокальности турбулентного переноса дисперсной фазы в пристенной зоне. Поскольку в силу линейного роста лагранжева масштаба времени турбулентности при удалении от стенки одни и те же частицы, будучи инерционными вблизи стенки, могут быть малоинерционными в ядре потока, такой подход позволяет существенно расширить границы корректного использования диффузионно-инерционной модели вплоть до величины безразмерного параметра релаксации частиц τ_+ порядка нескольких сотен. Для упрощения анализа предсказательная способность модели проверена для наиболее простого случая осаждения аэрозоля с малой массовой концентрацией дисперсной фазы на стенки трубы, когда отсутствует обратное влияние дисперсной фазы на несущий поток.

5.1. Диффузионно-инерционная модель турбулентного дисперсного течения

Диффузионно-инерционная модель предложена в [56] для тяжелых частиц и обобщена в [57] для частиц произвольной массы на основе стохастического уравнения ланжевеновского типа при движении одиночной частицы в случайном поле скорости несущей фазы. Получающееся кинетическое уравнение для функции плотности вероятности скорости частиц приводит к системе уравнений для моментов скорости частиц. При малых значениях отношения времени релаксации частиц τ_p к лагранжеву интегральному масштабу турбулентности T_L из уравнений переноса импульса и вторых моментов пульсаций скоростей частиц можно получить следующее разложение для скорости дисперсной фазы [57]:

$$V_i = U_i - D_{ij} \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_j} + (1 - A) \tau_p \left[g_i - \frac{\partial U_i}{\partial t} - U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1-A\Omega}{1+\Omega} \langle u'_i u'_j \rangle \right) + \frac{C_L \bar{\rho} \tau_p g_j}{1+C_A \bar{\rho}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \Bigg] + O((\tau_p / T_L)^2), \quad (43)$$

$$\tau_p = \frac{4d_p(1+C_A \bar{\rho})}{3\bar{\rho} C_D |\mathbf{V}-\mathbf{U}|}, \quad D_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{T_L}, \quad T_L = \frac{0,3k}{\varepsilon}, \quad \Omega = \frac{\tau_p}{T_L}, \quad A = \frac{(1+C_A) \bar{\rho}}{(1+C_A \bar{\rho})},$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_f}{\rho_p}, \quad (44)$$

где U_i — осредненная скорость сплошной несущей фазы; Φ — объемная концентрация частиц; $\langle u'_i u'_j \rangle$ — тензор напряжений Рейнольдса несущей фазы; D_{ij} — тензор турбулентной диффузии безынерционных частиц (пассивной примеси); ρ_f — плотность сплошной фазы; ρ_p — плотность частиц; g_i — вектор ускорения силы тяжести; C_A — коэффициент присоединенной массы частицы, для сферической частицы равный 0,5; C_D — коэффициент сопротивления частицы, определяемый формулой Шиллера—Науманна [58]; C_L — коэффициент подъемной силы, вычисляемый по зависимостям, приведенным в [54]; d_p — диаметр частицы; ν_f — кинематическая вязкость несущей фазы; k — кинетическая энергия турбулентности; ε — удельная диссипация энергии турбулентности.

Подстановка (43) в уравнение неразрывности дисперсной фазы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (V_i \Phi)}{\partial x_i} = 0$$

приводит к уравнению диффузионного типа для концентрации частиц

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[U_i + (1-A) \tau_p \left(g_i - \frac{\partial U_i}{\partial t} - U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{C_L \bar{\rho} \tau_p g_j}{1+C_A \bar{\rho}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] \Phi \right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \Phi \frac{\partial (q D_{ij})}{\partial x_j} \right], \quad (45)$$

$$q = \frac{\Omega(1-A)(1-A\Omega)}{1+\Omega},$$

где q — коэффициент турбулентной миграции.

Для тензора турбулентной диффузии принимается изотропное представление

$$D_{ij} = D_t \delta_{ij}, \quad (46)$$

где D_t — коэффициент турбулентной диффузии.

В дальнейшем будем рассматривать стационарное течение в круглой трубе. Тогда уравнение (45) в цилиндрической системе координат с учетом (46) и в приближении длинного канала принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{ [U_x + u_d] \Phi \} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(U_r + u_L) \Phi] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r D_t \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \Phi \frac{\partial (q D_t)}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (47)$$

где введены скорости дрейфа частиц под действием силы тяжести и подъемной силы

$$u_d = (1-A) g_x \tau_p, \quad u_L = - \frac{C_L (1-A) \bar{\rho} \tau_p g_x}{1 + C_A \bar{\rho}} \frac{\partial U_x}{\partial r}. \quad (48)$$

Входящие в (47) скорость несущей фазы и коэффициент турбулентной диффузии определяются с помощью подходящей модели турбулентности несущей фазы. В настоящее время наиболее широкое распространение получили различные модификации k - ε -модели вследствие простоты реализации и того факта, что более сложные алгебраические и дифференциальные модели переноса напряжений Рейнольдса не всегда приводят к улучшению результатов при расчете не только сложных турбулентных течений, но и более простых течений, таких как, например, течение в трубе [59]. В настоящей работе используются следующие уравнения стандартной высокорейнольдсово k - ε -модели для осесимметричного течения в трубе в приближении пограничного слоя:

$$\frac{\partial (U_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r U_r U_x)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_t \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho_f} \frac{dp}{dx}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} = 0, \quad (50)$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad D_t = \frac{v_t}{Sc_t}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial(U_x k)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_r k)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + P - \varepsilon, \quad (52)$$

$$\frac{\partial(U_x \varepsilon)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_r \varepsilon)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k}, \quad (53)$$

где x , r — осевая и радиальная координаты; U_x , U_r — осевая и радиальная компоненты скорости несущей фазы; p — давление; $Sc_t = 0,85$ — турбулентное число Шмидта; P — порождения турбулентной энергии, равное $v_t \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2$.

Были использованы два набора значений коэффициентов k - ε -модели: широко применяемый в большинстве известных CFD-кодов стандартный набор [60] $C_\mu = 0,09$, $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ и используемый в высокорейнольдсовом варианте k - ε -модели Мионга—Касаги [61] $C_\mu = 0,09$, $\sigma_k = 1,4$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,4$, $C_{\varepsilon 2} = 1,8$ как обеспечивающий наилучшее согласование с экспериментальными данными для течения в трубе [62]. Ниже модели турбулентности с соответствующими наборами коэффициентов будут называться стандартная k - ε -модель и модель Мионга—Касаги соответственно.

На оси трубы ($r = 0$) ставились условия симметрии:

$$\frac{\partial U_x}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = U_r = 0.$$

При использовании высокорейнольдсовых версий моделей турбулентности особое внимание следует уделить постановке граничных условий на стенке.

5.2. Граничные условия в виде пристеночных функций

Граничные условия для уравнений (47), (49), (52), (53) ставились на некотором расстоянии от стенки y_1 (первый расчетный узел вычислительной сетки), превышающем толщину вязкого подслоя: $y_{1+} = \nu_\tau y_1 / \nu_f \geq 30$, где ν_τ — динамическая скорость. Предполагается, что на таких расстояниях от стенки справедлив логарифмический закон стенки и другие универ-

сальные закономерности пристенной турбулентности. Граничные условия для скорости, турбулентной энергии и диссипации задаются в виде пристеночных функций в первом расчетном узле и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial U_x}{\partial r} = -\frac{\mathbf{v}_\tau}{\kappa y_1}, \quad k = \frac{\mathbf{v}_\tau^2}{C_\mu^{1/2}}, \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y_1}, \quad (54)$$

где $\kappa = 0,42$ — постоянная Кармана.

Входящая в (54) динамическая скорость \mathbf{v}_τ определялась из скорости в первом расчетном узле U_1 с помощью логарифмического закона стенки

$$U_1 = \mathbf{v}_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{\mathbf{v}_\tau y_1}{\mathbf{v}_f} + B \right), \quad B = 5,8. \quad (55)$$

Описанная процедура использования пристеночных функций была предложена в [63] и отличается от традиционной [60], в которой для скорости ставится граничное условие Дирихле.

В качестве граничного условия для концентрации дисперсной фазы используется выражение типа пристеночной функции, предложенное в [56; 64]. Это граничное условие связывает массовую скорость осаждения J_w с массовой концентрацией частиц Φ_1 в ближайшем к стенке расчетном узле

$$J_w = (\gamma V_{DT} + V_{CF}) \Phi_1. \quad (56)$$

Здесь V_{DT} определяет «диффузионно-турбофорезную» составляющую скорости осаждения частиц, обусловленную броуновской и турбулентной диффузией, а также турбулентной миграцией. Скорость V_{CF} и коэффициент γ в (56) определяются выражениями

$$V_{CF} = V_w + \tau_p F_w, \quad \gamma = \frac{b \exp(-b)}{1 - \exp(-b)}, \quad b = \frac{V_{CF}}{V_{DT}}.$$

Величина V_{CF} в (56) обозначает «конвективно-силовую» составляющую скорости осаждения, обусловленную наличием нормальной к стенке компоненты скорости несущей среды вследствие отсоса/вдува или стефановского потока из-за конденсации/испарения V_w , а также действием на частицы массовых сил в пристеночной области (F_w — нормальная к стенке составляющая ускорения массовых сил, включающих силу тяжести, термофорез, подъемную силу, центробежную силу и т. д.). Для рассматри-

ваемого изотермического вертикального потока величина V_{CF} равна скорости миграции частицы под действием подъемной силы u_L , определенной в (48).

Коэффициент γ учитывает влияние «конвективно-силового» механизма на осаждение частиц в результате диффузии и турбофореза. Параметр b характеризует отношение «конвективно-силовой» и «диффузионно-турбофорезной» скоростей осаждения. При $b \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow 0$) осаждение определяется «конвективно-силовым» механизмом, а при $b \rightarrow -\infty$ ($\gamma \rightarrow -b$) скорость осаждения стремится к нулю, так как движение несущей среды и действие массовых сил препятствуют осаждению частиц.

Коэффициент броуновской диффузии рассчитывается по модифицированному соотношению Эйнштейна

$$D_B = C_c(\text{Kn}) \frac{k_B T}{3\pi\mu_f d_p}, \quad (57)$$

где k_B — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура газа; μ_f — динамическая вязкость несущей фазы; $C_c(\text{Kn})$ — эмпирическая поправка Каннингема для частиц малого размера:

$$C_c(\text{Kn}) = 1 + \text{Kn} \left[A_1 + A_2 \exp\left(-\frac{A_3}{\text{Kn}}\right) \right],$$

где $A_1 = 1,257$; $A_2 = 0,40$; $A_3 = 1,1$ [38], $\text{Kn} \equiv 2l_m / d_p$ — число Кнудсена; $l_m \equiv 2\nu_f / u_i$ — длина свободного пробега молекул в парогазовой среде; $u_i \equiv (8RT / \pi)^{1/2}$ — средняя скорость теплового движения молекул; R — газовая постоянная парогазовой среды; T — температура парогазовой среды. В настоящей работе были использованы два выражения для скорости V_{DT} . Первое получено в [56; 64] на основе полуэмпирического обобщения результатов расчета и экспериментальных данных по осаждению частиц на стенках каналов и имеет вид

$$V_{DT} = \frac{(0,115/\text{Sc}_B^{3/4} + 2,5 \cdot 10^{-4} \tau_+^{2,5}) \mathbf{v}_\tau}{(1 + 10^{-3} \tau_+^{2,5}) \max[0,61, \min(1,32 - 0,27 \ln \tau_+, 1)]}. \quad (58)$$

Здесь $Sc_B = \nu_f / D_B$ — число Шмидта броуновской диффузии; D_B — коэффициент броуновской диффузии; $\tau_+ = \mathbf{v}_\tau^2 \tau_p / \nu_f$ — безразмерное время релаксации частицы.

Второе выражение является новым и получено из решения задачи о движении инерционных частиц в пристенной области с помощью нелокальной модели переноса вторых моментов дисперсной фазы. Как и традиционно используемые пристеночные функции для скорости и параметров турбулентности (54) и (55), пристеночная функция для концентрации представляет собой решение одномерной задачи в пристенной зоне $y = R - r \ll R$, включающей в себя вязкий подслой и логарифмический слой. Малая толщина пристенной зоны позволяет пренебречь кривизной стенки трубы и считать стенку плоской. Радиальный поток частиц на стенку в пристенной зоне в первом приближении постоянен и равен величине потока частиц на стенку J_w . После введения координаты $y = R - r$ уравнения переноса для первых трех моментов скорости частиц в пристенной области, полученные из уравнения для ФПВ скорости частиц и замкнутые при помощи квазинормальной гипотезы Миллионщикова, имеют вид [29]

$$V_y \Phi = -J_w, \quad (59)$$

$$V_y \frac{dV_y}{dy} = -\frac{V_y}{\tau_p} - \frac{d\langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle}{dy} - \frac{D_p}{\tau_p} \frac{d \ln \Phi}{dy}, \quad (60)$$

$$V_y \frac{d\langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle}{dy} + \frac{1}{\Phi} \frac{d\langle \mathbf{v}_p'^3 \rangle}{dy} \Phi = 2 \left[\lambda_{yy} - \frac{\langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle}{\tau_p} - \frac{D_p}{\tau_p} \frac{dV_y}{dy} \right], \quad (61)$$

$$V_y \frac{d\langle \mathbf{v}_p'^3 \rangle}{dy} + 3\langle \mathbf{v}_p'^3 \rangle \frac{dV_y}{dy} = -3 \frac{D_p}{\tau_p} \frac{d\langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle}{dy} - 3 \frac{\langle \mathbf{v}_p'^3 \rangle}{\tau_p}, \quad (62)$$

где V_y — средняя скорость частиц вдоль нормали к стенке; $\langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_p'^3 \rangle$ — второй и третий момент пульсаций нормальной к стенке компоненты скорости частиц, а входящие в (59)–(62) коэффициенты имеют вид

$$D_p = \tau_p \left(\langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle + \mu_{yy} \right), \quad \lambda_{yy} = \frac{f_u}{\tau_p} \langle \mathbf{v}'^2 \rangle - \frac{f_{u1}}{2} V_y \frac{d\langle \mathbf{v}'^2 \rangle}{dy} + \frac{D_B}{\tau_p^2},$$

$$\mu_{yy} = g_u \langle \mathbf{v}'^2 \rangle - \frac{g_{u1}}{2} \tau_p V_y \frac{d\langle \mathbf{v}'^2 \rangle}{dy}, \quad f_u = \frac{1}{1 + \tau_p / T_L}, \quad f_{u1} = \frac{1}{(1 + \tau_p / T_L)^2},$$

$$g_u = \frac{T_L}{\tau_p (1 + \tau_p / T_L)}, \quad g_{u1} = \left(\frac{T_L}{\tau_p} \right)^2 - \frac{1}{(1 + \tau_p / T_L)^2}. \quad (63)$$

Граничные условия к (58)—(62) на стенке для моментов скорости частиц получены в [29]. Из них можно получить граничные условия моментов пульсационной скорости частиц (центрированных моментов) и для концентрации частиц:

$$V_{yw} = -\sqrt{\frac{2}{\pi-2}} \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle_w^{1/2},$$

$$\tau_p \frac{d \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle}{dy} = \frac{\sqrt{2(\pi-2)}(4-\pi)}{\pi^2 - 6\pi + 12} \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle_w^{1/2} = 0,4295 \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle_w^{1/2}, \quad (64)$$

$$\langle \mathbf{v}_p'^3 \rangle_w = -\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{3/2}} \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle_w^{3/2} = -0,9953 \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle_w^{3/2},$$

$$\Phi_w = \frac{J_w}{V_{yw}} = \sqrt{\frac{\pi-2}{2}} \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle_w^{-1/2} J_w, \quad (65)$$

где индекс w обозначает значение соответствующей переменной на стенке.

При удалении от вязкого подслоя вследствие линейного роста лагранжева масштаба времени турбулентных пульсаций несущей фазы частицы ведут себя, как малоинерционные. Поэтому граничные условия для концентрации дисперсной фазы при $y_+ \rightarrow \infty$ эквивалентны условиям для пассивной примеси, для которой, как известно, справедлив логарифмический закон [31], согласно которому

$$\frac{d\Phi}{dy} \rightarrow Sc_{t\infty} \frac{J_w}{\kappa \mathbf{v}_\tau y}, \quad y_+ \rightarrow \infty, \quad (66)$$

где $Sc_{t\infty} = 0,85$ — турбулентное число Шмидта в логарифмическом подслое (при больших y_+).

Условия при $y_+ \rightarrow \infty$ для второго момента можно получить из (66), (59)—(63):

$$\langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle \rightarrow f_u \langle \mathbf{v}'^2 \rangle - D_p \frac{dV_y}{dy}, \quad y_+ \rightarrow \infty. \quad (67)$$

Для замыкания системы (59)—(63) выразим третий момент в первом члене в левой части (62) через второй момент с помощью аналогичного (65) соотношения, следующего из гипотезы о бинормальном распределении скорости в пристенной области: $\langle \mathbf{v}_p'^3 \rangle \approx -0,9953 \langle \mathbf{v}_p'^2 \rangle^{3/2}$. Это позволяет получить алгебраическую модель замыкания для третьего момента, приближенно учитывающую его конвекцию. Полученная после этого система уравнений и граничных условий в безразмерных единицах стенки имеет вид

$$\begin{aligned}
 V_+ \varphi_+ &= -1, \\
 D_p^+ \frac{d\varphi_+}{dy_+} + \tau_+ \varphi_+ \frac{d\Sigma_{yy p}}{dy_+} &= 1 + \tau_+ \frac{dV_+}{dy_+}, \\
 \tau_+ \frac{d}{dy_+} \left[\varphi_+ D_3^+ \frac{d\Sigma_{yy p}}{dy_+} \right] + \tau_+ \frac{d\Sigma_{yy p}}{dy_+} &+ \\
 + 2\varphi_+ \left[\frac{\Sigma_{yy}}{1 + \tau_+/T_L^+} - \frac{V_+ \tau_+}{2(1 + \tau_+/T_L^+)^2} \frac{d\Sigma_{yy}}{dy_+} + \frac{1}{\tau_+ Sc_B} - D_p^+ \frac{dV_+}{dy_+} - \Sigma_{yy p} \right] &= 0, \\
 D_3^+ &= \frac{D_p^+ - 0,4977V_+ \tau_+ \Sigma_{yy p}^{1/2}}{1 + \tau_+ dV_+/dy_+}. \tag{68}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{w+} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi-2}} \Sigma_{yy pw}^{1/2}, \\
 \tau_+ \frac{d\Sigma_{yy p}}{dy_+} \Big|_w &= \frac{\sqrt{2(\pi-2)}(4-\pi)}{\pi^2 - 6\pi + 12} \Sigma_{yy pw}^{1/2}, \\
 \Sigma_{yyy pw} &= -\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{3/2}} \Sigma_{yy pw}^{3/2},
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi_+}{dy_+} \rightarrow \frac{1}{\kappa_p y_+}, \quad \Sigma_{yy p} \rightarrow \frac{\Sigma_{yy}}{1 + \tau_+/T_L^+} - D_p^+ \frac{dV_+}{dy_+}, \quad y_+ \rightarrow \infty, \tag{69}$$

где безразмерная концентрация определена как $\varphi_+ = \mathbf{v}_\tau \Phi / J_w$.

Интенсивность пульсаций поперечной скорости несущей фазы Σ_{yy} согласно данным DNS аппроксимируется выражением [65]

$$\Sigma_{yy} = \Sigma_w \tanh^{-1}(\Sigma_w^{-1}), \quad \Sigma_w = 1,39 \cdot 10^{-3} y_+^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{y_+}{4,67}\right) \right]^2. \quad (70)$$

Лагранжев масштаб времени турбулентных пульсаций выражается через турбулентные вязкость и число Шмидта с помощью следующих соотношений [66]:

$$T_L = \frac{v_{t+}}{Sc_t \Sigma_{yy}}, \quad \frac{1}{v_{t+}} = \frac{1}{\kappa y_+} + \frac{B_v}{y_+^3},$$

$$Sc_t(y_+) = Sc_{t\infty} \left\{ 2\Delta \left[1 - \exp\left(-\frac{y_+}{\sqrt{\Delta}}\right) \right] y_+^{-2} + 1 \right\}, \quad (71)$$

где $B_v = 1015$; $Sc_{t\infty} = 0,85$; $\Delta = 3,73$.

Модель (68)—(71) учитывает эффекты нелокальности турбулентного переноса моментов пульсационной скорости частиц до третьего порядка включительно.

Результаты численного решения задачи (68)—(71) с хорошей точностью аппроксимируются выражением

$$\varphi_+ = 2,024 \ln(1 + 0,6\eta) + 3,385 -$$

$$- 0,28 \ln(1,61\eta) \exp\{-0,18 \ln^2(1,8\eta)\} + B_\Phi (Sc_B, \tau_+), \quad (72)$$

$$B_{wf}(Sc_B, \tau_+) = \begin{cases} \frac{Sc_B^4 \tau_+ T_L^+ \left[22,4 - 14 \exp(-0,36\tau_+) \right]}{\left(1 + \tau_+ / T_L^+ \right)^4 \tau_+ T_L^+} & \tau_+ < 14, \\ \frac{140}{\tau_+^2} - \frac{0,95}{\ln \tau_+} & \tau_+ > 14, \end{cases} \quad (73)$$

где $\eta = y_+ / \tau_+$, $T_L^+ = v_\tau^2 T_L / \nu_f$.

Из последнего выражения, записанного в ближайшем к стенке расчетном узле $y = y_1$, следует выражение для скорости частиц

$$(V_{DT})^{-1} = \frac{\frac{1}{\kappa_p} \ln(1 + 0,6\eta_1) + 3,385 - 0,28 \ln(1,61\eta_1) \exp[-0,18 \ln^2(1,8\eta_1)]}{v_\tau} + \frac{B_\Phi (Sc_B, \tau_+)}{v_\tau}, \quad (74)$$

где $\eta_1 = y_1 / v_\tau \tau_p$.

Отметим, что структура выражения (72) соответствует результату (39) изложенной в предыдущем пункте асимптотической теории осаждения частиц, а асимптотика функции B_{wf} при малых τ_+ совпадает с (41). Поэтому выражение (74) имеет более строгое обоснование, чем полуэмпирическая зависимость (58). Чтобы получить граничное условие для концентрации, необходимо приравнять следующее из (47) выражение для радиального потока частиц в первом расчетном узле

$$J_w = \left[u_L - Sc_t^{-1} \frac{\partial(qv_t)}{\partial r} \right] \Phi_1 - \frac{v_t}{Sc_t} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_1$$

к выражению (56), откуда следует граничное условие для концентрации частиц

$$\frac{v_t}{Sc_t} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_1 = - \left[\gamma V_{DT} + Sc_t^{-1} \frac{\partial(qv_t)}{\partial r} \right] \Phi_1. \quad (75)$$

Численное решение уравнений (47)—(53) осуществлялось с использованием неявных конечно-разностных схем и внутренних итераций по нелинейности.

5.3. Моделирование однофазного турбулентного течения в круглой трубе

С целью проверки работоспособности выбранной модели турбулентности для описания течения несущей фазы было проведено сравнение с экспериментальными данными [67; 68] при турбулентном однофазном течении в трубе. На рис. 12 сопоставлены расчетные и экспериментальные профили продольной компоненты средней скорости и кинетической энергии турбулентности, нормированные на скорость потока на оси трубы U_0 , для стандартной k - ε -модели и для модели Мионга—Касаги.

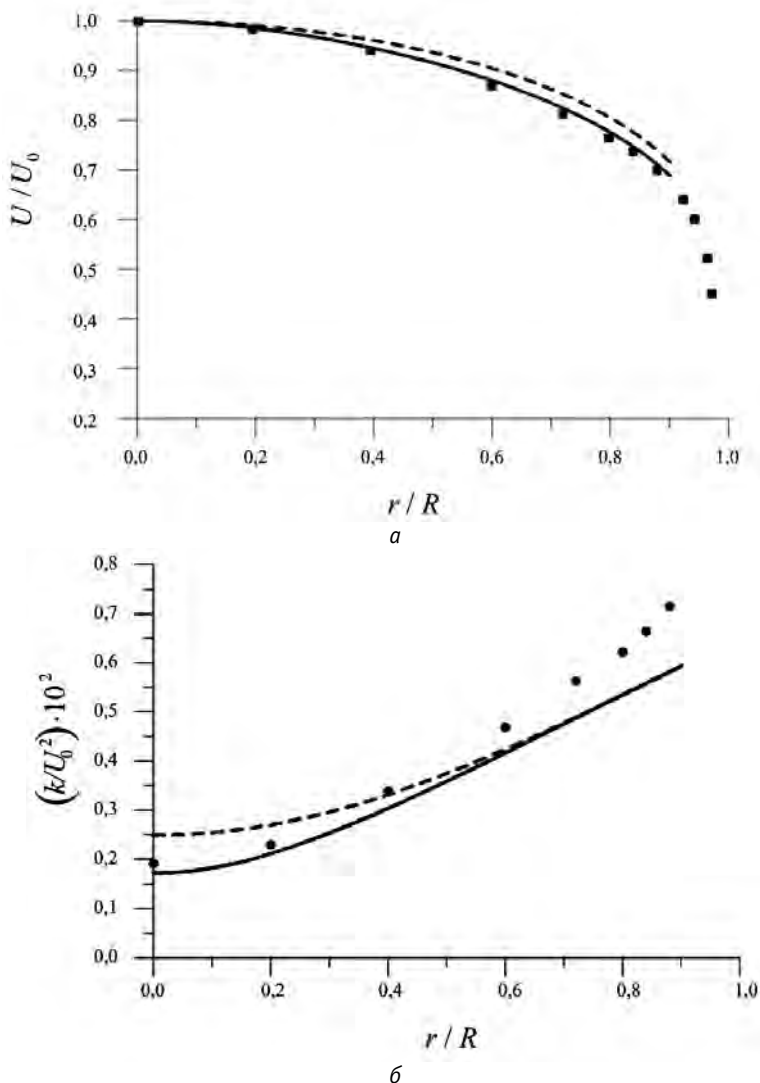


Рис. 12. Радиальные распределения осевой скорости U/U_0 (а, в, д) и кинетической энергии турбулентности k/U_0^2 (б, г, е), рассчитанные по стандартной $k-\varepsilon$ -модели (пунктир) и модели Мионга—Касаги (сплошная линия) в круглой трубе при $Re = 20\,000$ (а, б), $50\,000$ (в, г), $500\,000$ (д, е). Точки — экспериментальные данные [67; 68]

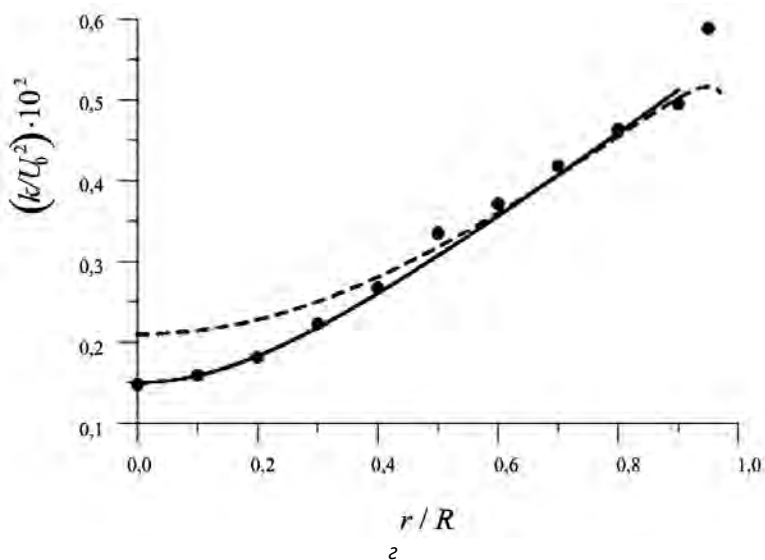
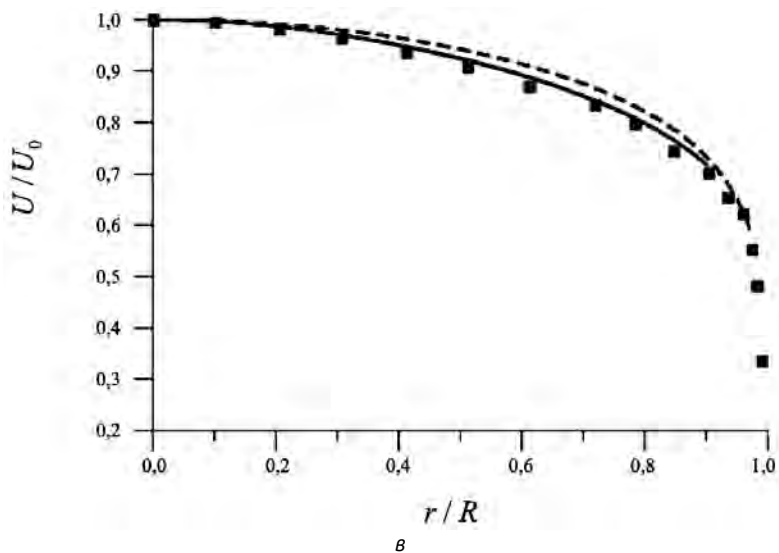


Рис. 12. (продолжение)

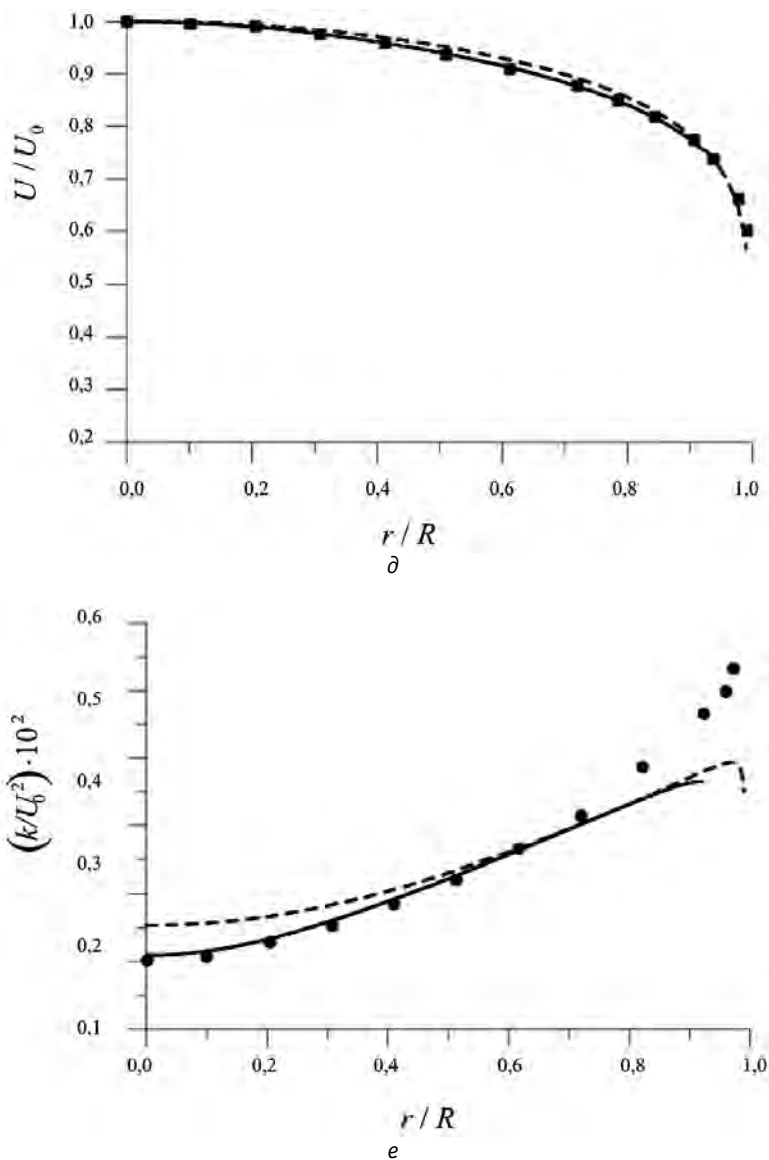


Рис. 12. (окончание)

Видно, что для стандартной k - ε -модели расчетные данные отличаются от экспериментальных, особенно для кинетической энергии турбулентности в приосевой области. Модель Мионга—Касаги лучше описывает распределение кинетической энергии турбулентности в трубе при $Re = 50\,000$, однако при $Re = 500\,000$ все же имеется расхождение с экспериментом в пристенной области, где расчет дает заниженный уровень турбулентных пульсаций. Результаты расчетов с использованием граничных условий в виде пристеночных функций могут зависеть от местоположения первого расчетного узла, в котором эти условия ставятся.

Чтобы исследовать эту зависимость, были проведены расчеты для нескольких местоположений первого расчетного узла в диапазоне $15 < y_+ < 340$. На рис. 13 приведены профили скорости в так называемых единицах стенки $U_+ = U/v_\tau$, $y_+ = v_\tau y/\nu$ в сравнении с экспериментальными данными [67]. Видно, что зависимость результатов расчета от местоположения первого расчетного узла слабая. В то же время можно заметить небольшое уменьшение отклонения расчетного профиля скорости от экспериментального с увеличением y_{1+} . В соответствии с этими результатами расчеты осаждения частиц на стенку трубы проводились при $y_{1+} = 60$.

В целом можно сделать вывод, что k - ε -модель Мионга—Касаги хорошо описывает распределение осевой скорости в трубе и распределение кинетической энергии турбулентности в ядре потока, давая несколько заниженные значения энергии турбулентности в пристенной области. Этот вывод согласуется с результатами [59; 62]. В работе [59] отмечается, что аналогичными недостатками обладают и более сложные дифференциальные модели переноса напряжений Рейнольдса. Отклонения расчетных профилей турбулентной энергии при больших числах Рейнольдса, по-видимому, связаны с активно обсуждаемыми в последнее время особенностями скейлинга турбулентного течения в круглой трубе, более сложного, чем традиционная модель логарифмического слоя (54), (55) [69]. В частности, такое расхождение может быть вызвано влиянием так называемых сверхкрупномасштабных пульсаций (*very large scale motions*), обнаруженных в [70].

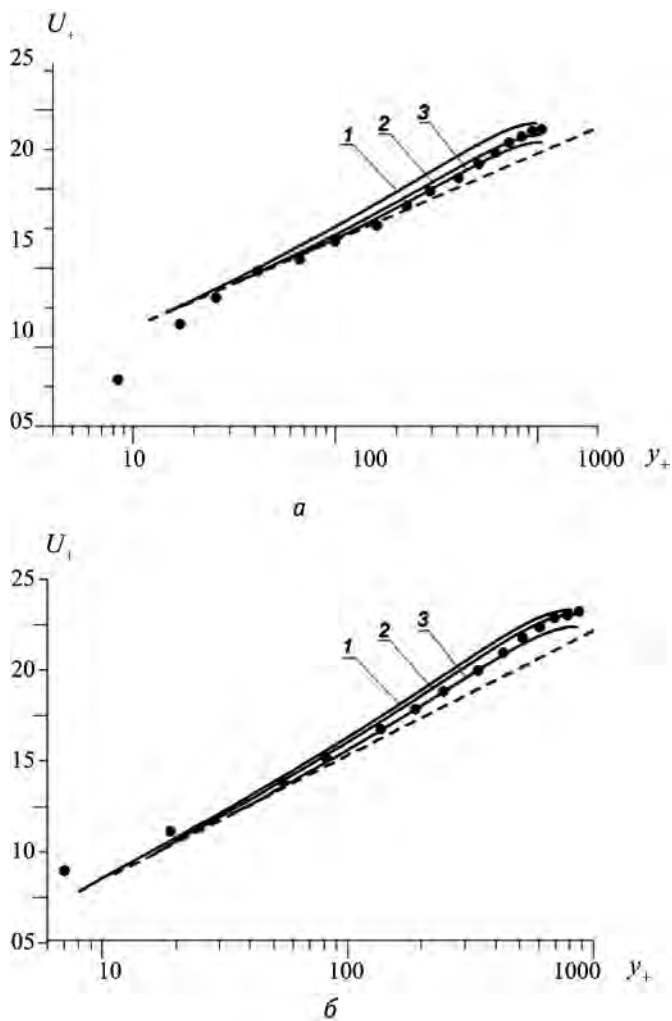


Рис. 13. Профили осевой скорости в единицах стенки для течения в трубе. Точки — экспериментальные данные [67], линии — расчет по модели Мионга—Касаги: *a* — $Re = 50\,000$, 1 — $y_1/R (y_{1+}) = 0,015$ (15), 2 — $y_1/R (y_{1+}) = 0,03$ (30), 3 — $y_1/R (y_{1+}) = 0,06$ (60); *б* — $Re = 500\,000$, 1 — $y_1/R (y_{1+}) = 0,01$ (82), 2 — $y_1/R (y_{1+}) = 0,02$ (170), 3 — $y_1/R (y_{1+}) = 0,04$ (340). Пунктир — логарифмический закон (55)

5.4. Осаждение частиц из вертикального турбулентного дисперсного течения в круглой трубе

В данной работе рассматривается случай малоинерционных частиц с малой массовой концентрацией, поэтому обратное влияние дисперсной фазы на гидродинамику несущей фазы пренебрежимо мало. Это позволяет использовать рассчитанные распределения скорости и кинетической энергии турбулентности для расчета концентрации частиц по уравнению (47) с граничными условиями (75) с привлечением выражений (58) и (74). Геометрия и параметры течения несущей фазы взяты из эксперимента [55] по осаждению аэрозоля в круглой трубе для числа Рейнольдса несущей фазы $Re = 50\ 000$. Безразмерное время релаксации частиц τ_+ в расчетах менялось в широком диапазоне $10^{-2} < \tau_+ < 2 \cdot 10^3$ за счет изменения диаметра частицы от 0,23 до 50 мкм при прочих постоянных параметрах.

На рис. 14 представлено сравнение рассчитанных значений коэффициента осаждения $j_+ = J_w / (v_t \Phi_m)$, где Φ_m — среднемассовая концентрация, как с наиболее часто цитируемыми в литературе экспериментальными данными [55], так и с другими экспериментальными данными, собранными в [41], а также с результатами численного моделирования осаждения частиц в канале методами LES [54] и DNS [52; 53; 71].

Кривая зависимости коэффициента осаждения от параметра инерционности частиц τ_+ имеет три характерных области. При $\tau_+ < 0,1$ процесс осаждения определяется в основном броуновской и турбулентной диффузией. Первоначальное снижение скорости осаждения с ростом τ_+ для очень маленьких частиц происходит благодаря уменьшению коэффициента броуновской диффузии (57) с ростом диаметра частицы. Резкий рост скорости осаждения с увеличением τ_+ для относительно инерционных частиц ($\tau_+ > 1$) объясняется турбулентной миграцией (турбофорезом) частиц. При значениях параметра инерционности $\tau_+ \sim 10$ —20 коэффициент осаждения достигает некоторого предельного значения и с дальнейшим ростом τ_+ имеет тенденцию к снижению. Последнее обусловлено проникновением вовлеченных в турбулентное движение инерционных частиц в вязкий подслой и вызванной этим турбулизацией движения частиц в нем. Влияние броуновской диффузии в этом режиме пренебрежимо мало.

Из рис. 14 видно, что расчетные значения коэффициента осаждения удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными во всем рассматриваемом диапазоне изменения параметра инерционности частиц даже для больших значений времени релаксации частиц $\tau_+ \sim 200$, т. е. высокоинерционных частиц, для которых диффузионно-инерционная модель формально неприменима.

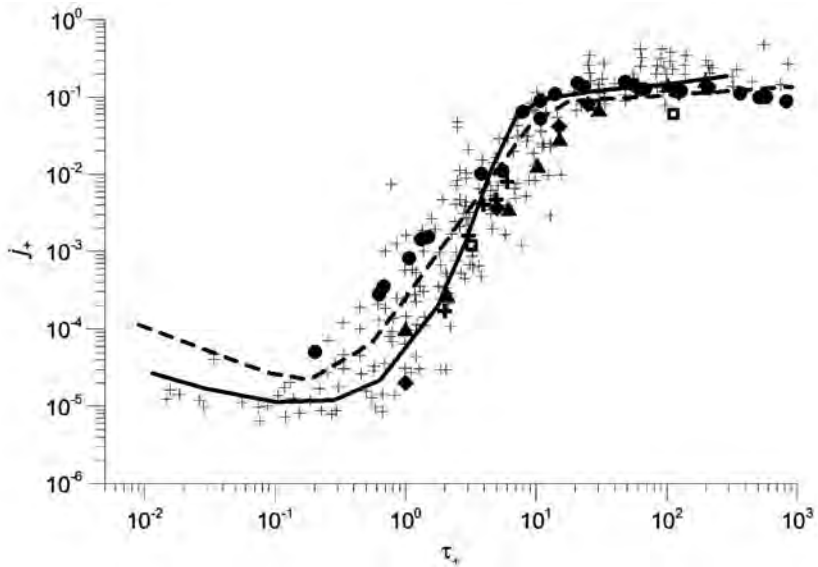


Рис. 14. Зависимость коэффициента осаждения от инерционности частиц.

Пунктирная линия — расчет по диффузионно-инерционной модели с использованием (58), сплошная — с использованием (72). Кружки — экспериментальные данные [55], крестики — экспериментальные данные, собранные в [41], треугольники — LES-расчеты [54], ромбы — DNS-расчеты [53], квадраты — DNS-расчеты [52], жирные крестики — DNS-расчеты [71]

При значениях времен релаксации $\tau_+ > 200$ в результатах расчета не наблюдается тенденции к уменьшению скорости осаждения с ростом τ_+ , имеющей место в экспериментальных данных.

Большой разброс приведенных на рис. 14 экспериментальных данных не позволяет сделать однозначный вывод о преимуществе какого-либо из вариантов граничных условий (58) и (74), использованных в расчетах. Этот разброс связан с различными экспериментальными погрешностями, самой существенной из которых является неконтролируемое влияние полидисперсности частиц.

В частности, как показано в [50], небольшая дисперсия в размерах частиц приводит к существенному повышению зависимости $j_+ = j_+(\tau_+)$, осредненной по спектру размеров частиц. Вследствие этого величины коэффициентов осаждения, полученные с помощью моделирования методами DNS и LES для монодисперсных частиц, как правило, лежат ниже экспериментальных данных. С учетом этих соображений тот факт, что результаты, полученные с помощью (74), лучше согласуются с результатами численного

моделирования с помощью методов DNS и LES, свидетельствует в пользу модели (74).

На точность расчетов коэффициента осаждения также могут влиять отмеченные в подразделе 4.1 погрешности расчета распределений кинетической энергии турбулентности с помощью использованной k - ε -модели. Применение более адекватных моделей турбулентности, учитывающих анизотропию турбулентности в пристенной области, может улучшить предсказательную способность диффузионно-инерционной модели.

Таким образом, представлены результаты моделирования турбулентного дисперсного течения с использованием диффузионно-инерционной модели дисперсной фазы в сочетании с пристеночными функциями. Предложена новая пристеночная функция для уравнения переноса концентрации дисперсной фазы, учитывающая эффекты нелокальности турбулентного переноса дисперсной фазы в пристенной зоне, связанные с инерцией частиц. Учет инерционности частиц позволил расширить пределы применимости диффузионно-инерционной модели до частиц с безразмерным временем релаксации $\tau_+ \sim 200$.

Расчеты с помощью высокорейнольдсовой k - ε -модели Мионга—Касаги с пристеночными функциями и предложенной модели скорости осаждения частиц на поверхности трубы хорошо согласуются с имеющимися в литературе экспериментальными данными и данными прямого численного моделирования. Предложенную модель удобно использовать в современных CFD-кодах для моделирования двухфазных турбулентных течений при больших числах Рейнольдса.

Литература

1. *Ilyushin B. B.* Higher moment diffusion in stable stratification // Closure strategies for turbulent and transitional flows / Ed. by B. E. Launder and N. D. Sandham. — [S. l.]: Cambridge Univ. Press, 2002. — P. 424—448.
2. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 299—303.
3. *Колмогоров А. Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // Докл. АН СССР — 1941. — Т. 32, № 1. — С. 19—21.
4. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика (часть 1,2). — М.: Наука, 1967.
5. *Frenkiel F. N., Klebanov P. S.* Higher-order correlation in turbulent field // Physics of fluids. — 1967. — Vol. 10, № 3. — P. 507—520.
6. *Schumacher J., Sreenivasan K. R., Yeung P. K.* Derivative moment shear flows // Physics of fluids. — 2003. — Vol.15, № 1. — P. 84—90.

7. *Grossmann S., Lohse D., Reeh A.* Developed turbulence: from full simulations to full mode reductions // *Physical Rev. Letters.* — 1996. — Vol. 77, № 27. — P. 5369—5372.
8. *Boffetta G., Celani A., Vergassola M.* Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: Deviations from Gaussian behavior // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 61, № 1. — R29.
9. *Lesieur M.* Turbulence in fluids. — [S. l.]: Kluwer Acad. Publ., 1997.
10. *Baroud C. N., Plapp B. B., Swinney H. L.* Scaling in three dimensional and quasi-two-dimensional rotating turbulent flows // *Physics of fluids.* — 2003. — Vol. 15, № 8. — P. 2091—2104.
11. *Prusa L. M., Smolarkiewicz P. K., Wyszogrodzki A. A.* Parallel computation of gravity wave turbulence in the Earth's atmosphere // *SIAM News.* — 1999. — Vol. 32, № 7.
12. *Alekseenko S. V., Bilsky A. V., Dulin V. M. et al.* Non-intrusive determination of turbulent energy balance in free and confined jet flows // *Proc. of the 4th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-4).* Williamsburg, VA USA, 27—29 June 2005. — Vol. 2. — [S. l.], 2005. — P. 605—610.
13. *Bilsky A. V., Dulin V. M., Markovich D. M.* Application of PIV to estimation of turbulent energy balance in jet flows // *Proc. of Minsk International Colloquium on Physics of Shock Waves, Combustion, Detonation and Non-Equilibrium Processes.* Minsk, 14—19 Nov. 2005. — [S. l.], 2005.
14. *Frisch U.* Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov. — [S. l.]: Cambridge Univ. Press, 1995.
15. *Sagaut P.* Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: an Introduction. — [S. l.]: Springer-Verlag, 2001.
16. *Волков К. Н., Емельянов В. Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. — М.: Физматлит, 2008.
17. *Илюшин Б. Б., Красинский Д. В.* Моделирование динамики турбулентной круглой струи методом крупных вихрей // *Теплофизика и аэромеханика.* — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 49—61.
18. *Ilyushin B. B., Krasinsky D. V., Hrebtov M. Yu.* LES study of the vortex structure of turbulent round jet // *Proc. of 13th Int. Conf. on the Methods of Aerophysical Research.* — Pt. 3. — Novosibirsk: Publ. House "Parallel". 2007. — P.141—146.
19. *Гиневский А. С., Власов Е. В., Каравосов Р. К.* Акустическое управление турбулентными струями. — М.: Физматлит, 2001.
20. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // *J. Fluid Mech.* — 1995. — Vol. 285. — P.69—94.

21. *Borue V.* Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 72, № 10. — P. 1475—1479.
22. *Demenkov A. G., Ilyushin B. B., Chernykh G. G.* Numerical model of round turbulent jets // *J. of Engineering Thermophysics.* — 2009. — Vol. 18, № 1. — P. 49—56.
23. *Rodi W.* The prediction of free turbulent boundary layers by use of two-equation model of turbulence: Ph. D. thesis. — London, 1972.
24. *Rodi W.* Turbulence models and their application in hydraulics. — Karlsruhe, 1980.
25. *Лаундер Б. Е., Морс А.* Численный расчет осесимметричных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений // Турбулентные сдвиговые течения: — 1 / Пер. с англ. под ред. А. С. Гиневского. — М.: Машиностроение, 1982. — С. 291—310.
26. *Panchapakesan N. R., Lumley J. L.* Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. — Pt. 1: Air jet // *J. Fluid Mech.* — 1993. — Vol. 246. — P. 197—223.
27. *Daly B. J., Harlow B. E.* Transport equations in turbulence // *Physics of Fluids.* — 1970. — Vol. 13. — P. 2634—2649.
28. *Медников Е. П.* Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. — М.: Наука, 1981.
29. *Зайчик Л. И., Алипченков В. М.* Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. — М.: Физматлит, 2007.
30. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
31. *Кадер Б. А., Яглом А. М.* Законы подобия для пристенных турбулентных течений // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.* — 1980. — Т. 15. — С. 81—155.
32. *Townsend A. A.* The structure of turbulent shear flow. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956.
33. *Изаксон А.* О формуле распределения скоростей вблизи стенки // *ЖЭТФ.* — 1937. — Т. 7, № 7. — С. 919—924.
34. *Кадер Б. А., Яглом А. М.* Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.* — 1984. — Т. 18. — С. 3—111.
35. *Gersten K.* Some contributions to asymptotic theory for turbulent flows // *Transport Phenomena in Turbulent Flows.* — New York: Hemisphere, 1988. — P. 53—66.

36. Зайчик Л. И., Алипченков В. М. Влияние броуновского движения на столкновения аэрозольных частиц в турбулентном потоке // Теплофизика высоких температур. — 2008. — Т. 46, № 4. — С. 553—562.
37. Деревич И. В., Здор А. Г. Замкнутая модель флуктуационного движения частиц в турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. — 2009. — № 1. — С. 68—82.
38. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию. — М.: Мир, 1987.
39. Clift R., Grace J. R., Weber M. E. Bubbles, Drops and Particles. — New York: Acad. Press, 1978.
40. Duplantier B. Brownian motion, “diverse and undulating” // “Einstein, 1905—2005”. Poincare Seminar / Ed. Th. Damour et al. — Basel: Birkhäuser, 2006. — P. 201—293.
41. McCoy D. D., Hanratty T. J. Rate of deposition of droplets in annular two-phase flow // Intern. J. Multiphase Flow. — 1977. — Vol. 3, № 4. — P. 319—331.
42. Гусев И. Н., Зайчик Л. И. Моделирование динамики частиц в пристеночной области газодисперсного турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1991. — № 1. — С. 50—60.
43. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. — М.: Физматгиз, 1963.
44. Son J. S., Hanratty T. J. Limiting relation for the eddy diffusivity close to a wall // AIChE J. — 1967. — Vol. 13, № 4. — P. 689—696.
45. Shin M., Kim D. S., Lee J. W. Deposition of inertia-dominated particles inside a turbulent boundary layer // Intern. J. Multiphase Flow. — 2003. — Vol. 29, № 6. — P. 893—926.
46. Oesterle B., Zaichik L. I. On Lagrangian time scales and particle dispersion modeling in equilibrium turbulent shear flows // Phys. Fluids. — 2004. — Vol. 16, № 9. — P. 3374—3384.
47. Кутателадзе С. С. Пристенная турбулентность. — Новосибирск: Наука, 1973.
48. Гусев И. Н., Гусева Е. И., Зайчик Л. И. Осаждение частиц на стенках канала в турбулентном потоке // Инж.-физ. журн. — 1990. — Т. 59, № 5. — С. 735—742.
49. Nerisson P., Ricciardi L., Simonin O., Fazileabasse J. Modelling aerosol transport and deposition in a ventilated room // 6th Int. Conf. Multiphase Flow. ICMF 2007. Leipzig. Germany. 2007. — [S. 1.], 2007 — (Paper PS3-5).
50. Chen M., McLaughlin J. B. A new correlation for the aerosol deposition rate in vertical ducts // J. Colloid and Interface Sci. — 1995. — Vol. 169, № 2. — P. 437—455.

51. Wells A. C., Chamberlain A. C. Transport of small particles to vertical surfaces // Brit. J. Appl. Phys. — 1967. — Vol. 18, № 12. — P. 1793—1799.
52. Marchioli C., Giusti M., Salvetti M. V., Soldati A. Direct numerical simulation of particle wall transfer and deposition in upward turbulent pipe flow // Intern. J. Multiphase Flow. — 2003. — Vol. 29, № 6. — P. 1017—1038.
53. Marchioli C., Picciotto M., Soldati A. Influence of gravity and lift on particle velocity statistics and transfer rates in turbulent vertical channel flow // Intern. J. Multiphase Flow. — 2007. — Vol. 33, № 3. — P. 227—251.
54. Wang Q., Squires K. D., Chen M., McLaughlin J. B. On the role of the lift force in turbulence simulations of particle deposition // Int. J. Multiphase Flow. — 1997. — Vol. 23, № 4. — P. 749—763.
55. Liu B. Y. H., Agarwal J. K. Experimental observation of aerosol deposition in turbulent flow // J. Aerosol Sci. — 1974. — Vol. 5, № 2. — P. 145—155.
56. Волков Э. П., Зайчик Л. И., Першуков В. А. Моделирование горения твердого топлива. — М.: Наука, 1994.
57. Zaichik L. I., Soloviev S. L., Skibin A. P., Alipchenkov V. M. A diffusion-inertia model for predicting dispersion of low-inertia particles in turbulent flow // 5th International Conference on Multiphase Flow, Yokohama, Japan. — [S. l.], 2004. — (Paper No. 220).
58. Schiller L., Naumann A. Uber die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung // Ver. Deut. Ind. — 1933. — Bd. 77. — S. 318—320.
59. Martinuzzi R., Pollard A. Comparative study of turbulence models in predicting turbulent pipe flow. Part II: Reynolds stress and k- ϵ Models // AIAA J. — 1989. — Vol. 29. — P. 1714—1721.
60. Launder B. E., Spalding D. B. Mathematical models of turbulence. — New York: Academic Press, 1972.
61. Myong H. K., Kasagi N. A new approach to the improvement of k- ϵ turbulence model for wall-bounded shear flows // JSME Int. J. — 1990. — Vol. 33. — P. 63—72. — (Series 2).
62. Hrenya C. M., Bolio E. J., Chakrabarti D., Sinclair J. L. Comparison of low Reynolds number k- ϵ turbulence models in predicting fully developed pipe flow // Chemical Engineering Science. — 1995. — Vol. 50, № 12. — P. 1923—1941.
63. Sikovsky D. Ph. Generalized wall functions for the turbulent flows with strong adverse pressure gradient // Turbulence, 4th Int. Symp. Heat and Mass Transfer 4, Antalya, Turkey / Ed. by K. Hanjalic, Y. Nagano, M. J. Tummers.— [S. l.], 2003. — P. 614—621.

64. Зайчик Л. И., Гасилов В. А., Горячев В. Д., Ерошенко В. М. Континуальный метод моделирования мелкодисперсных турбулентных потоков с горением и фазовыми переходами // Теплообмен в современной технике / ИВТ РАН. — М., 1998. — С. 263—278.
65. Young J. B., Leeming A. D. A theory of particle deposition in turbulent pipe flow // J. Fluid Mech. — 1997. — Vol. 340. — P. 129—159.
66. Гешев П. И. Линейная модель пристенного переноса / Ин-т теплофизики СО АН СССР. — Новосибирск, 1981. — (Препринт № 73-81).
67. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed flow. — [S. l.], 1954. — (NACA Technical Report 1174).
68. Schildknecht M., Miller J. A., Meier G. E. The influence of suction on the structure of turbulence in fully developed pipe flow // J. Fluid Mech. — 1979. — Vol. 90. — P. 67—107.
69. McKeon B. J., Morrison J. F. Asymptotic scaling in turbulent pipe flow // Phil. Trans. R. Soc. A. — 2007. — Vol. 365. — P. 771—787.
70. Kim K. C., Adrian R. J. Very large-scale motion in the outer layer // Phys. Fluids. — 1999. — Vol. 11. — P. 417—422.
71. McLaughlin J. B. Aerosol particle deposition in numerically simulated channel flow // Phys. Fluids A. — 1989. — Vol. 1. — P. 1211—1224.

Численное моделирование течений жидкости с подвижными границами

А. В. Минаков, А. А. Гаврилов, А. А. Дектерев

1. Введение

В последнее десятилетие бурный рост производительности персональных компьютеров и совершенствование численных алгоритмов обусловили расширение круга прикладных задач, в которых стало возможно использовать методы вычислительного моделирования. С каждым годом в задачах механики сплошных сред происходит увеличение доли вычислительного эксперимента по сравнению с натурным. При этом постоянно повышаются требования к точности и эффективности математических моделей и численных алгоритмов. Появление доступной высокопроизводительной техники и развитие технологий параллельных вычислений позволили приступить к решению задач моделирования сложных «мультифизических» процессов. Наиболее ярко это проявилось в вычислительной гидродинамике. Возникла возможность рассчитывать сложные пространственные турбулентные течения с теплообменом, фазовыми переходами, химическим реагированием, дисперсной фазой.

Среди задач вычислительной гидродинамики особенную сложность и практический интерес представляют задачи моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости с подвижными границами. Течения такого рода широко распространены как в природных явлениях, так и в различных технологических процессах. С практической точки зрения наибольший интерес представляют два класса течений с подвижной границей: течения жидкости со свободной поверхностью и течения жидкости с движущимися телами. Течения жидкости, относящиеся к первому из этих классов, встречаются практически везде, где имеется жидкость, и играют огромную роль в природе и технике: поверхностные волны, капли, струи, пузыри, пленки и т. д. Течения жидкости с движущимися твердыми телами также имеют большое значение во многих приложениях, таких как турбины, клапаны, насосы, миксеры, корабельная и авиационная техника и др. Экспериментальное исследование подобного рода задач зачастую сопряжено со значительными трудностями и затратами, поэтому разработка эффективного и надежного численного алгоритма, способного достоверно описывать течения жидкости с подвижными границами раздела, является актуальной задачей, над решением которой продолжает работать множество специалистов во всем мире.

2. Краткий обзор методов решения задач с подвижными границами

Имеется множество различных подходов к моделированию течений жидкости с подвижными границами. Наиболее полные обзоры методов решения задач с подвижными контактными границами можно найти в [1—13].

Существуют разные виды классификации алгоритмов решения задач с подвижной контактной границей. В литературе наиболее распространена классификация алгоритмов разрешения контактной границы по типу используемой сетки. Их можно условно разделить на три большие группы — лагранжевы и эйлеровы методы, а также так называемые бессеточные методы. В лагранжевых алгоритмах расчетные узлы и ячейки движутся вместе со сплошной средой, в эйлеровых алгоритмах узлы и ячейки покоятся, а сплошная среда движется сквозь эйлерову сетку. Случай подвижных сеток, скорость движения которых отлична от скорости материальной среды, отвечает смешанному эйлерово-лагранжевому описанию движения. В бессеточных методах либо вообще не используется расчетная сетка, либо используется только поверхностная сетка, либо сетка используется только для подготовки данных к расчету и анализу результатов.

2.1. Эйлеровы методы

Обширный обзор литературы по этой группе методов можно найти в [2; 7; 10—12; 13]. Эйлеровы методы хороши тем, что для расчетов используют неподвижную, часто ортогональную и равномерную расчетную сетку. Отслеживание межфазной границы в этой группе методов осуществляется с помощью дискретных лагранжевых или непрерывных эйлеровых маркеров. По способу отслеживания контактной границы эйлеровы методы можно условно разделить на три большие группы: алгоритмы дискретных точечных маркеров (Point Tracking Methods), алгоритмы дискретных или непрерывных поверхностных маркеров (Interface Tracking Methods) и алгоритмы непрерывных объемных маркеров (Interface Capturing Methods).

Идея алгоритмов дискретных точечных маркеров основана на методе частиц в ячейках (Particle-in-Cell), предложенном Харлоу в 1955 г. [14; 15], и продолжена в его более поздних модификациях — MAC (Marker-in-Cell) и SMAC (Simplified Marker in Cell), описание которых можно найти в [17; 16; 17; 18; 20]. В данной группе методов используется смешанное лагранжево-эйлерово представление, при котором течение описывается на неподвижной эйлеровой сетке, а сплошная среда представляется набором частиц (рис. 1).

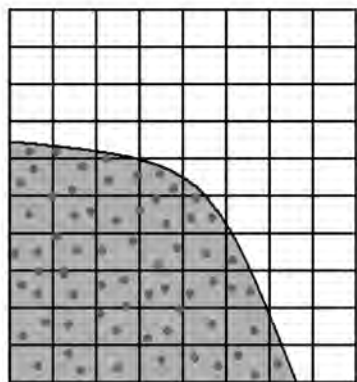


Рис. 1. Схематическое представление контактной границы при помощи метода дискретных точечных маркеров

Методы разрешения контактной границы при помощи дискретных точечных маркеров получили широкое распространение в 1960—1970-е годы (особенно MAC- и SMAC-методы). На их базе в Лос-Аламосской национальной лаборатории были созданы компьютерные программы, которыми активно пользовались для решения задач со свободной поверхностью. Однако алгоритмы дискретных точечных маркеров нельзя отнести к экономичным, и сегодня эти методы практически не используются.

Естественным развитием методов дискретных точечных маркеров явились методы поверхностных маркеров, в которых контактная граница представлена набором дискретных или непрерывных маркеров, расположенных только на поверхности раздела (рис. 2). Эти маркеры перемещаются вместе с границей раздела, и их движение описывается при помощи лагранжева подхода. Описание движения сплошной среды при этом осуществляется в рамках эйлерова подхода на фиксированной сетке. Поскольку маркеры располагаются только на границе раздела, указанные методы более экономичны по сравнению с методами дискретных точечных маркеров и позволяют достаточно точно описывать контактную границу и поверхностное натяжение. Это их основное достоинство. Однако если граница раздела слишком сильно деформируется во время расчета, возникает проблема неоднородного распределения маркеров по поверхности раздела. На контактной границе появляются локальные области с низкой концентрацией маркеров, что приводит к потере точности. Данное препятствие частично преодолевается путем добавления и удаления маркеров с поверхности раздела непосредственно во время расчета, но при этом приходится решать проблемы с балансом массы. Более детальное описание указанной группы методов можно найти в [21; 22].

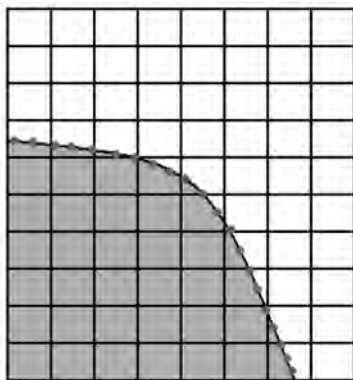


Рис. 2. Схематическое представление контактной границы при помощи метода дискретных поверхностных маркеров

В алгоритмах непрерывных объемных маркеров идентификация границы раздела осуществляется по значениям специальных функций маркеров, сохраняющихся вдоль лагранжевых траекторий и подчиняющихся эйлерову уравнению переноса [24—33]. Точное положение контактной границы при этом явно не отслеживается, и приходится применять специальные методики реконструкции границы раздела. Обычно за границу раздела в данной группе методов принимают изоповерхность среднего значения используемой функции маркера, хотя применяют и более сложные методики, связанные с использованием геометрической реконструкции и др.

К методам, реализующим идею непрерывных маркеров, можно отнести следующие.

Метод крупных частиц (Белоцерковский, Давыдов [34]), который в [5] был применен для расчета неустойчивости Рэлея—Тейлора. При этом в качестве функции маркера фактически использовалась плотность среды.

Метод жидкости в ячейках (Volume-of-Fluid Method) (Хирт, Нихолс [27]), метод псевдоконцентраций (Томпсон [35]), метод скалярного уравнения (Джан, Сполдинг). В данной группе методов в качестве функций маркеров используется функция объемной концентрации жидкости в расчетной ячейке (рис. 3а). По существу эти методы очень схожи и фактически являются разновидностями метода жидкости в ячейках Хирта и Нихолса. Различие заключается в основном в способе определения функции маркера. Детальное описание метода жидкости в ячейках (далее будем называть его VOF-методом) приведено в следующем разделе.

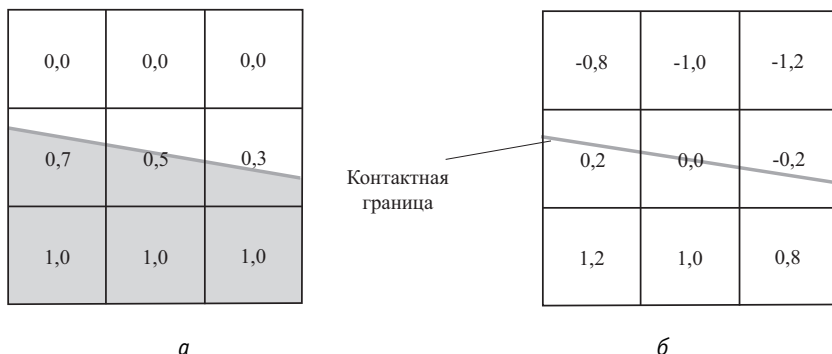


Рис. 3. Схематическое представление контактной границы при помощи методов непрерывных объемных маркеров:
 а — VOF-метод, б — метод функций уровня

Метод функций уровня (Level Set Method), предложенный С. Ошером и Дж. А. Сетианом в [10] и развитый в более поздних работах [11; 12]. В этом методе в качестве функции маркера используется функция уровня, указывающая расстояние до поверхности раздела — примерно так, как это делается в картографии для обозначения высоты рельефа над уровнем моря (рис. 3б). Функция-маркер в данном случае является непрерывной и плавно меняющейся, что существенно облегчает численное решение эйлерова уравнения переноса.

Основным недостатком и трудностью большинства методов непрерывных маркеров является искусственное размытие границы раздела сред, связанное с численной диффузией, возникающей при решении уравнения переноса функции маркера. Особенно актуальна эта проблема для методов, использующих разрывную функцию-маркер (VOF-метод, метод псевдоконцентраций). Подобную проблему можно встретить при численном решении невязких уравнений газовой динамики с ударными волнами и контактными разрывами. В газовой динамике проблему размытия скачков обычно решают при помощи ENO- или TVD-схем, детальное описание которых приведено в разделе 3, или путем применения адаптивных расчетных сеток, сгущенных в области разрыва. Аналогичные подходы применяются и при численном решении уравнения переноса в методе непрерывных объемных маркеров. Существует также несколько специальных методик, основанных на «геометрической реконструкции» поверхности, согласно которой делается предположение о форме свободной поверхности в расчетной ячейке и на основе известного поля скорости осуществляется перенос данной формы. Более подробный анализ этих алгоритмов можно найти в [26; 28—30; 32]. Самая совершенная разновидность метода «гео-

метрической реконструкции» — алгоритм PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation), который довольно точен, однако очень сложен в реализации, плохо обобщается в трехмерном случае для неортогональных расчетных сеток и требует значительных вычислительных затрат.

Несмотря на указанные трудности, методы непрерывных объемных маркеров имеют ряд существенных преимуществ по сравнению с другими методами. Использование этих методов позволяет избежать задания сложных граничных условий на контактной границе. Они дают возможность решать задачи, которые часто не по силам большинству методов с явным выделением контактной границы: опрокидывание волны, распад и соединение пузырей, заполнение резервуаров и др. Кроме того, эти методы успешно применяются для решения комплексных задач с фазовыми переходами, кавитацией, теплообменом и химическим реагированием. Методы непрерывных объемных маркеров в настоящее время можно считать наиболее эффективными при решении задач с подвижными границами. Под эффективностью в данном случае понимается оптимальное соотношение между точностью алгоритма и временем решения задачи. Наибольшую популярность и распространение при решении сложных «мультифизических» задач получил VOF-метод, который применяется в качестве алгоритма решения задач со свободной поверхностью в таких известных CFD-пакетах, как FLUENT, Star-CD, CFX и др.

К другому классу методов с фиксированной эйлеровой сеткой относится широко известный *метод погруженных границ* (Immersed Boundary Method), предложенный Ч. Пескиным [37]. Этот метод широко применяется для моделирования течений жидкости с подвижными границами. Особенно хорошо он зарекомендовал себя на задачах течения жидкости в эластичных каналах (сердце и артерии). Основная его идея состоит в том, что граница поверхности тела отслеживается маркерами, которые перемещаются вместе с подвижной границей. В расчетной ячейке, в которую такой маркер попал, специальным образом интерполируется значение скорости жидкости с учетом информации о геометрии и скорости тела в ближайших узлах. Этот подход лишен характерных для лагранжевых методов проблем с расчетной сеткой. Основным его недостатком является погрешность, связанная с интерполяцией скорости на границах.

2.2. Лагранжевы методы

Большое распространение также получили лагранжевы алгоритмы расчета задач с подвижными контактными границами. В лагранжевых алгоритмах расчетные узлы и ячейки движутся вместе со сплошной средой, при этом граница раздела отслеживается узлами расчетной сетки. Эти методы могут строиться на основе как конечно-разностных, так и конечно-элементных аппроксимаций. Главные достоинства данной группы методов заключают-

ся в высокой точности описания границы раздела и довольно простой программной реализации. Естественно, при таком подходе расчет перемещения или деформации тела в пространстве требует пересчета расчетной сетки на каждом временном шаге, что может быть весьма затратным. Кроме того, поскольку форма тела и траектория его движения часто очень сложны, использование лагранжевых методов может привести к существенному искривлению расчетных ячеек, что дает дополнительную погрешность в результатах расчета.

К лагранжевым методам описания течений жидкости с подвижными границами можно отнести следующие.

Метод LINC (Lagrangian Method for Incompressible Flow) [37], основанный на использовании лагранжевых координат и позволяющий рассчитывать нестационарные течения несжимаемой жидкости со слабой деформацией подвижных границ. Поскольку подвижная граница отслеживается расчетными узлами (рис. 4), этот подход позволяет максимально точно описывать контактную границу и проводить учет сложных граничных условий, например, сил поверхностного натяжения. Однако он оказывается непригодным при сильной деформации подвижной границы.

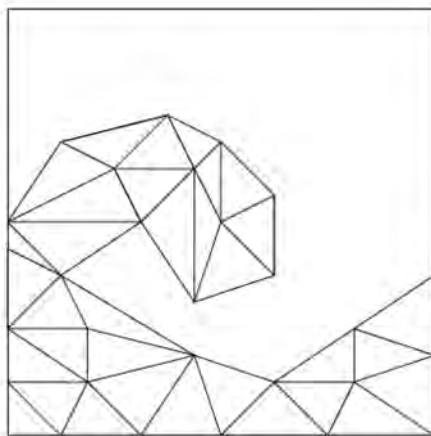


Рис. 4. Схематическое представление контактной границы при помощи лагранжевых методов

ALE-метод (Arbitrary Lagrangian — Eulerian), предложенный Амсденом и Хиртом в [18] и развитый в дальнейшем другими исследователями, является комбинированным эйлерово-лагранжевым методом. В нем описание подвижных границ осуществляется в рамках лагранжева подхода, а описание движения сплошной среды проводится при помощи подхода Эйлера.

ра. Организация такого разбиения на лагранжево и эйлерово описания может осуществляться различными способами. Например, возможна ситуация, когда по одной координате используется лагранжев подход, а по другой — эйлеров. Таким образом, данный метод более гибок по сравнению с методом LINC, однако также ограничен случаем медленно меняющихся и слабodeформируемых границ. Частично решить проблему деформации и перехлеста расчетных ячеек при лагранжевом описании подвижных границ позволяет использование неструктурированных расчетных сеток, а также многоблочных перекрывающихся или скользящих сеток. Этот подход получил особенно большое распространение для моделирования течений с движущимися твердыми телами.

2.3. Бессеточные методы

Стремление избежать трудностей построения сеток и получить решение более экономичным и простым способом выразилось в двух крупных направлениях развития алгоритмов выделения контактной границы, связанных с методами граничных элементов и обширным семейством бессеточных алгоритмов.

Обзор контактных алгоритмов метода *граничных элементов* можно найти в [40]. В основе алгоритмов граничных элементов лежит идея сведения классических линейных уравнений механики сплошных сред к граничным интегральным уравнениям путем представления решений в виде суперпозиции фундаментальных решений, отвечающих единичным возмущениям, или с использованием функций Грина. При этом для дискретизации уравнений объемная сетка не требуется, достаточно построить поверхностную сетку граничных элементов. Таким образом, размерность рассматриваемой задачи можно понизить на единицу, что существенно сказывается на времени счета. Однако при решении нелинейных задач методом граничных элементов приходится вводить внешние итерации по нелинейности, на каждой из которых решается линейная задача. При этом возникают очень серьезные трудности, связанные с плохой сходимостью итерационного процесса.

В настоящее время все большее распространение в сфере численного моделирования задач гидродинамики со свободными границами приобретают *бессеточные методы*. Среди них выделяют подкласс методов частиц. Эти методы не требуют использования сетки ни на стадии построения функций форм, ни на стадии интегрирования уравнений движения. Их основная идея состоит в дискретизации области расчета набором лагранжевых частиц (рис. 5), которые могут свободно передвигаться в рамках наложенных на них посредством основных уравнений динамики сплошной среды связей. Функции формы при таком подходе строятся на каждом шаге по времени с использованием различного набора узлов (частиц). Бессеточная природа этих методов, а также простота реализации и использо-

вания обусловили их большую популярность в сфере решения задач со свободными границами.

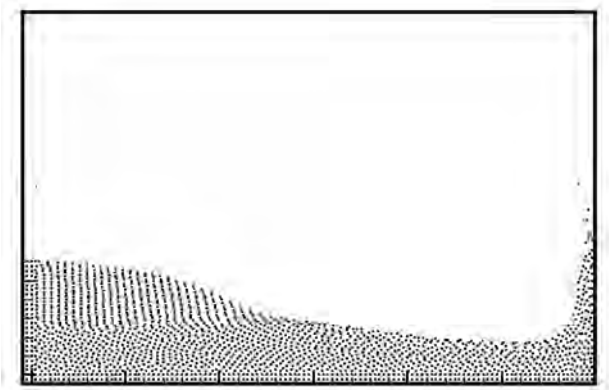


Рис. 5. Схематическое представление свободной границы при помощи метода сглаженных частиц [38]

Наиболее распространенными на данный момент методами частиц являются *метод сглаженных частиц (SPH)* [38; 39] и *полуявный метод движущихся частиц (MPS)* [43]. Существует также множество модификаций метода SPH, в частности, RKPM и MLSPH, призванные улучшить его аппроксимационные характеристики. Эти методы позволяют достаточно точно воспроизводить кинематику течений, однако полученные динамические характеристики, необходимые для расчета гидродинамических нагрузок, зачастую оказываются не очень точными. К общим недостаткам бессеточных методов также можно отнести сравнительно невысокую точность и трудность введения граничных условий. Эти обстоятельства заставили исследователей искать новые методы, сочетающие в себе идеи и возможности бессеточного подхода с достоинствами сеточных методов. Первыми из бессеточных методов нового поколения были *бессеточный метод конечных элементов (Meshless Finite Element Method — MFEM)* и *метод естественных соседей (Natural Element Method — NEM)*. Особенность NEM и MFEM заключается в том, что для стационарных задач они являются обычными (классическими) методами Галеркина, т. е. сеточными. Для нестационарных задач, в которых применяется лагранжев подход к описанию изучаемого процесса, на каждом шаге по времени по найденному на предыдущем шаге положению узлов строится новая сетка, определяющая новую структуру соседей для каждой узловой точки области. На вновь построенной сетке аппроксимированная система уравнений снова решается методом Галеркина. Методы NEM и MFEM сохраняют некоторые преимущества классического метода Галеркина, а именно простоту функций формы

в области определения, непрерывность между элементами, легкость введения граничных условий. При этом они обладают всеми достоинствами бессеточных методов, так как функции формы метода естественных соседей зависят только от положения узловых точек.

Хотя идеология бессеточных методов продолжает интенсивно развиваться, реальное их применение для решения сложных пространственных задач из-за больших вычислительных затрат пока весьма ограничено.

3. Математическая модель и численная методика

3.1. Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости

Согласно современным представлениям трехмерные нестационарные течения вязкой жидкости описываются системой уравнений Навье—Стокса, состоящей из уравнения сохранения массы (или уравнения неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

и уравнений движения (или закона сохранения импульса)

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F}, \quad (2)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости жидкости; $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений; \mathbf{F} — вектор объемных сил; p — статическое давление; ρ — плотность.

Составляющие тензора вязких напряжений τ_{ij} определяются по формуле

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right),$$

где μ — динамическая (молекулярная) вязкость; u_i — компоненты вектора скорости; δ_{ij} — символ Кронекера.

Считается, что при помощи уравнения Навье—Стокса можно описать как ламинарное, так и турбулентное течения, однако в настоящее время возможности существующей вычислительной техники таковы, что практически все реальные достижения в расчетах турбулентных течений связаны с использованием полуэмпирических моделей турбулентности, использующих подход Рейнольдса [41; 42; 44; 45]. Суть этого подхода заключается в решении осредненных уравнений Навье—Стокса

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla (\boldsymbol{\tau} - \overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}) + \mathbf{F},$$

где \mathbf{v} — усредненное по времени поле скоростей; $-\overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}$ — тензор рейнольдсовых напряжений.

При построении двухпараметрических моделей турбулентности для определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений используют гипотезу Буссинеска об изотропной турбулентной вязкости

$$-\overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij},$$

где μ_t — турбулентная вязкость; k — кинетическая энергия турбулентных пульсаций.

Использование концепции Буссинеска позволяет построить целый ряд двухпараметрических полуэмпирических моделей. В данной работе для моделирования турбулентных режимов течения применялась стандартная k - ε -модель. Уравнения этой модели имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v} \cdot k) &= \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \cdot \nabla k \right) + P - \rho \varepsilon, \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v} \cdot \varepsilon) &= \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ε — скорость диссипации турбулентных пульсаций; P — скорость генерации турбулентности:

$$P = \mu_t \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Турбулентная вязкость при этом определяется следующим образом:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Поскольку модель полуэмпирическая, для ее замыкания необходимо задать величины входящих в модель констант. Для стандартной k - ε -модели константы замыкания составляют:

$$C_\mu = 0,09, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3, \quad C_1 = 1,44, \quad C_2 = 1,92.$$

3.2. Метод жидкости в ячейках (VOF-метод)

В данной работе для решения задач со свободной границей, как уже было сказано, использовался предложенный Хиртом и Нихолсом метод жидкости в ячейках [27]. Он по праву считается одним из самых эффективных методов решения задач со свободной поверхностью жидкости. Идея этого метода состоит в том, что жидкость и газ рассматриваются как единая двухкомпонентная среда, и пространственное распределение фаз в пределах расчетной области определяется при помощи специальной функции маркера $F(x, y, z, t)$, величина которой задает объемную долю жидкой фазы в расчетной ячейке следующим образом:

$$F(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & \text{если ячейка пустая,} \\ 1, & \text{если ячейка целиком заполнена жидкостью,} \end{cases}$$

и $0 < F(x, y, z) < 1$, если через ячейку проходит граница раздела фаз.

На рис. 6. представлен пример представления свободной поверхности жидкости при помощи функции $F(x, y, z, t)$ на прямоугольной расчетной сетке.

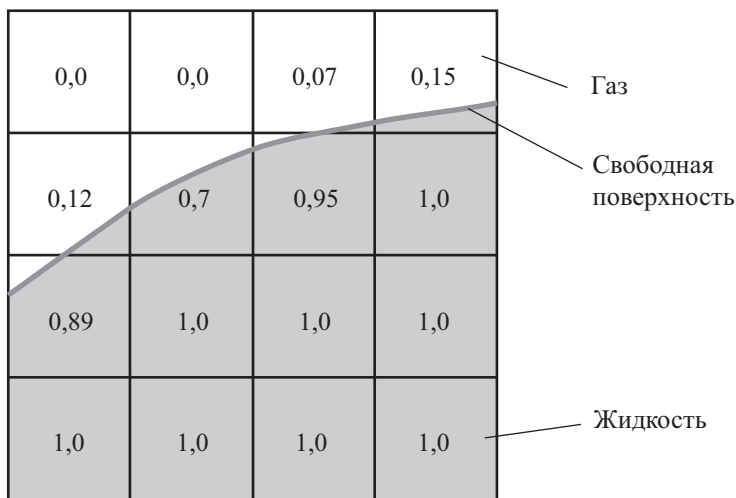


Рис. 6. Представление свободной поверхности жидкости при помощи доли жидкой фазы в ячейке

Поскольку свободная поверхность движется вместе с жидкостью, отслеживание перемещения свободной границы в пространстве осуществляется путем решения уравнения переноса объемной доли жидкой фазы в ячейке

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости двухфазной среды, найденный из решения уравнений гидродинамики (1) и (2) или (1) и (3) — в случае турбулентного режима течения.

Плотность и молекулярная вязкость рассматриваемой двухкомпонентной среды находятся через объемную долю жидкости в ячейке по правилу смеси:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 F + (1 - F) \rho_2, \\ \mu &= \mu_1 F + (1 - F) \mu_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ_1, μ_1 — плотность и вязкость жидкости; ρ_2, μ_2 — плотность и вязкость газа. Полученные таким способом величины плотности и вязкости входят в уравнения движения (1) и (2) и определяют физические свойства двухфазной среды.

При рассмотрении течений жидкости с границей раздела приходится сталкиваться с явлением поверхностного натяжения, пренебречь которым во многих случаях нельзя. Поверхностное натяжение играет огромную роль как в природе, так и в различных приложениях. Примеры течений с большим значением поверхностного натяжения можно найти при рассмотрении капиллярных явлений, кавитации, формировании и динамики пузырей, капель, пленок и т. д. Изучение такого рода течений — очень трудная задача. Поэтому к достоинствам VOF-метода также следует отнести и то обстоятельство, что он позволяет относительно просто учесть влияние сил поверхностного натяжения.

Чаще всего для моделирования поверхностного натяжения в рамках VOF-метода используют алгоритм CSF (Continuum Surface Force) [24], суть которого состоит во введении в уравнения движения (2) дополнительной объемной силы \mathbf{F}_s , величина которой определяется из соотношения

$$\mathbf{F}_s = \sigma k \nabla F,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; k — кривизна свободной поверхности, которая определяется как дивергенция вектора нормали:

$$k = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right).$$

Нормаль к свободной поверхности вычисляется, в свою очередь, как градиент объемной доли жидкой фазы в ячейке:

$$\mathbf{n} = \nabla F.$$

При этом на твердой стенке величина вектора нормали определяется по кривому углу смачивания θ :

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_w \cos(\theta) + \boldsymbol{\tau}_w \sin(\theta),$$

где \mathbf{n}_w , $\boldsymbol{\tau}_w$ — нормальный и тангенциальный к стенке векторы (рис. 7).



Рис. 7. Условия на линии контакта

3.3. Метод переноса объемной доли твердого тела в расчетной ячейке [45]

Для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости с движущимися твердыми телами в данной работе предложен алгоритм переноса объемной доли твердого тела в расчетной ячейке. Этот алгоритм можно рассматривать как расширение классического метода жидкости в ячейках Хирта на решение задач с подвижными твердыми телами. Его суть состоит в том, что для описания движения твердого тела используется эйлеров подход, и положение тела в пространстве определяется путем решения конвективного уравнения переноса объемной доли твердого тела в расчетной ячейке. Для организации взаимодействия между твердым телом и жидкостью в расчетных ячейках, занятых телом, в уравнение закона сохранения импульса жидкой среды вносится сила сопротивления, обеспечивающая равенство скорости потока и скорости тела в данных ячейках.

Перейдем к описанию метода переноса объемной доли твердого тела в ячейке. Так же как в классическом VOF-методе для описания течений со

свободной поверхностью была введена доля жидкой фазы в расчетной ячейке, для описания движения твердого тела в рассмотрение можно ввести объемную долю твердого тела в расчетной ячейке $S(x, y, z, t)$, которая определяется следующим образом:

$$S(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & \text{если ячейка пустая,} \\ 1, & \text{если ячейка целиком заполнена твердым телом,} \end{cases}$$

и $0 < S < 1$, если через ячейку проходит граница тела.

Использование похожего подхода можно найти в методе дробных ячеек Ю. М. Давыдова и О. М. Белоцерковского [5].

На рис. 8 продемонстрировано, как при помощи функции $S(x, y, z, t)$ на ортогональной равномерной сетке можно задать поверхность шара.

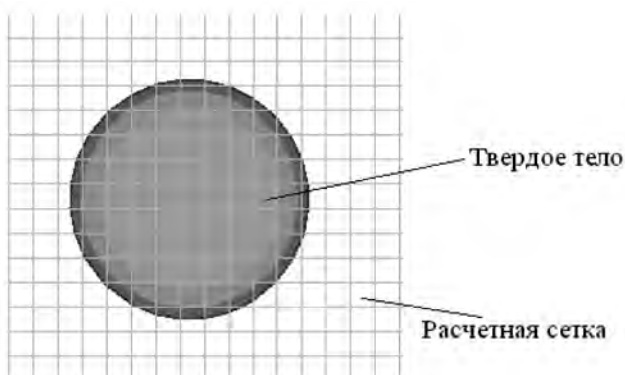


Рис. 8. Задание при помощи функции $S(x, y, z, t)$ формы твердого тела на ортогональной равномерной сетке

Для описания движения твердого тела будем использовать эйлеров подход. Отслеживание перемещения тела в пространстве предлагается осуществлять путем решения уравнения переноса для объемной доли твердого тела в расчетной ячейке

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla S = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{v}_s — скорость движения твердого тела в пространстве, которая складывается из скорости перемещения центра масс и угловой скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{CM}}),$$

где скорость движения центра масс \mathbf{v}_{CM} и угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ находятся из уравнений движения тела

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} &= \sum \mathbf{F}_f, \\ \mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \sum \mathbf{M}_f, \end{aligned} \quad (7)$$

где m — масса тела; \mathbf{I} — тензор момента инерции тела; \mathbf{F}_f — силы, действующие на тело, в том числе и силы сопротивления со стороны жидкости; \mathbf{M}_f — момент этих сил.

Масса, объем, компоненты тензора инерции, а также координаты центра масс твердого тела находятся естественным способом путем вычисления следующих интегралов по всему объему расчетной области Ω :

$$m = \int_{\Omega} \rho_T S(x, y, z, t) dV,$$

$$V_T = \int_{\Omega} S(x, y, z, t) dV,$$

$$I_{xx} = \int_{\Omega} \left((y - y_{\text{CM}})^2 + (z - z_{\text{CM}})^2 \right) \rho_T S(x, y, z, t) dV,$$

$$I_{yy} = \int_{\Omega} \left((x - x_{\text{CM}})^2 + (z - z_{\text{CM}})^2 \right) \rho_T S(x, y, z, t) dV,$$

$$I_{zz} = \int_{\Omega} \left((x - x_{\text{CM}})^2 + (y - y_{\text{CM}})^2 \right) \rho_T S(x, y, z, t) dV,$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{\int_{\Omega} x S(x, y, z, t) dV}{V_T},$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{\int_{\Omega} y S(x, y, z, t) dV}{V_T},$$

$$z_{\text{CM}} = \frac{\int_{\Omega} z S(x, y, z, t) dV}{V_T},$$

где ρ_T — плотность твердого тела; V_T — объем; I_{xx} — компонента тензора инерции; x_{CM} — координата центра масс.

Для нахождения сил и моментов сил сопротивления, действующих на тело со стороны потока, необходимо решить систему уравнений движения жидкости с учетом наличия в расчетной области рассматриваемого тела, т. е. в полной постановке решить задачу обтекания твердого тела. Моделирование наличия тела в потоке жидкости без деформации расчетной сетки можно провести различными способами. Чаще всего используют подход, связанный с искусственным завышением молекулярной вязкости в области, занятой телом. Такой подход был рассмотрен на начальном этапе работы. Однако при проведении методических расчетов было обнаружено, что для корректного описания наличия тела в потоке данным способом необходимо, чтобы вязкость в области тела на несколько порядков превышала вязкость жидкости. В результате получалась задача с большим градиентом коэффициента вязкости, скорость решения которой очень сильно уменьшалась по сравнению со случаем однородной вязкости. Поэтому был выбран другой способ моделирования наличия тела в жидкости. Суть этого подхода заключается во введении в правую часть уравнений гидродинамики силы сопротивления, вносимого твердым телом в поток:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_T. \quad (8)$$

Величина этой силы определяется из следующего соотношения:

$$\mathbf{F}_T = -k \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot S(x, y, z, t). \quad (9)$$

Входящий в это выражение коэффициент сопротивления k задается из условия равенства скорости потока и твердого тела в ячейках, занятых телом. Схожий подход широко используется в методе погруженных границ (IBM-метод [37]), в котором подобная сила вводится в узлах, лежащих на поверхности тела.

Силы сопротивления, действующие на тело со стороны жидкости, а также моменты этих сил находятся из следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= -\int_S p \cdot \mathbf{n} ds, \quad \mathbf{F}_\tau = -\int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} ds, \\ \mathbf{M}_p &= -\int_S p (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{CM}}) \times \mathbf{n} ds, \quad \mathbf{M}_\tau = -\int_S \boldsymbol{\tau} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{CM}}) \times \mathbf{t} ds, \end{aligned} \quad (10)$$

где \mathbf{F}_p — сила давления; \mathbf{F}_τ — сила трения; τ — напряжение трения; \mathbf{n} , \mathbf{t} — нормальный и тангенциальный к поверхности тела векторы; p — давление в жидкости. Интегралы (9) вычисляются по поверхности твердого тела S .

В итоге суммарная сила, действующая на тело со стороны жидкости и входящая в уравнение движения тела (7), определяется сложением сил давления и трения:

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau.$$

Аналогично определяется и суммарный момент:

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_\tau.$$

Основным преимуществом данного метода является то, что при описании движения твердого тела в потоке расчетная сетка не изменяется в процессе движения. При этом метод не накладывает никаких ограничений на форму поверхности твердого тела и траекторию его движения и может применяться для произвольной геометрии тел и любого вида движения. Расчетная сетка при этом может быть равномерной и ортогональной, что обеспечивает наилучшие условия для точности и скорости решения численного алгоритма. Метод не требует перестройки расчетной сетки на каждом временном шаге, так как это делается в лагранжевых методах, а значит, существенно экономит расчетное время.

К достоинствам метода также можно отнести и относительную простоту его численной реализации по сравнению с другими алгоритмами, описывающими движение тел в потоке. Фактически для описания движения тела при помощи этого метода дополнительно необходимо реализовать процедуру решения одного пространственного уравнения переноса, не внося существенных изменений в расчетный алгоритм в целом.

Еще одно его достоинство состоит в том, что его можно использовать не только для описания движения тел, но и для расчета течения жидкости в объектах сложной геометрии, используя при этом декартову расчетную сетку. Геометрия объекта при этом задается не расчетной сеткой, а искусственно встроенным в декартову расчетную область неподвижным твердым телом (например, как на рис. 8), форма которого совпадает с границей объекта, в котором происходит течение.

К недостаткам метода следует отнести искусственное размытие границы твердого тела, связанное с численным решением эйлера уравнения переноса. Существенно улучшить качество численного решения этого уравнения позволяет использование предложенной в работе методики на основе TVD-схемы Superbee с использованием локально-одномерного расщепления пространственного оператора. Детально эта методика изложена в следующем подразделе.

3.4. Связь полей скорости и давления для несжимаемых течений

При решении уравнений Навье—Стокса в естественных переменных для несжимаемой жидкости возникают трудности в связи со сложностью интерпретации взаимодействия давления и составляющих скорости. Это обусловлено тем, что давление как искомый параметр в исходных дифференциальных уравнениях не выражается явным образом. Есть несколько подходов к решению этой проблемы — методы, связанные с искусственной сжимаемостью, методы, использующие функции тока и завихренности, и методы, основанные на итерационном решении уравнения на поправку давления.

В методах искусственной сжимаемости в уравнение неразрывности вводится нестационарная производная от давления, и для получения стационарного решения необходимо решать задачу на установление, что очень накладно. Подход, связанный с исключением из исходных дифференциальных уравнений давления и переходом к переменным функции тока и завихренности, хорошо зарекомендовал себя при решении двумерных задач. Однако при обращении к трехмерным задачам в рамках данного подхода приходится решать уже шесть уравнений вместо четырех, которые были в естественных переменных. Кроме того, существует проблема формулировки граничного условия для завихренности на твердой стенке. К тому же, получив решение в переменных функции тока и завихренности, приходится решать новую трудную задачу восстановления поля давления по этим величинам. Поэтому данный подход применяется очень редко. В настоящее время наибольшее распространение получил подход, связанный с решением задачи в естественных переменных с использованием физического расщепления исходной задачи, реализованный в процедуре SIMPLE и более поздних ее модификациях, предложенной Патанкарком и Сполдингом [41; 42]. Из дискретных аналогов уравнений количества движения и неразрывности выводится уравнение для поправки давления. Используя решение уравнения, производят коррекцию поля скорости и давления.

В данной работе для связи полей скорости и давления используется модификация SIMPLE-алгоритма — SIMPLEC-процедура, которая позволяет проводить расчеты с более высокими значениями параметров релаксации, что существенно увеличивает скорость сходимости.

Рассмотрим методику применения SIMPLEC-процедуры для решения нестационарных уравнений Навье—Стокса (1) и (2).

Итерационный процесс вычислений поля скорости и давления на каждом временном шаге состоит из трех этапов:

1. Определение промежуточной скорости \mathbf{v}^* по давлению с предыдущей итерации:

$$\frac{\rho(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n)}{\tau} + L(\mathbf{v}^k) \mathbf{v}^* = -\nabla p^k, \quad (11)$$

где \mathbf{v}^n — значение вектора скорости на предыдущем временном слое; \mathbf{v}^k и p^k — поле скорости и давление на предыдущей итерации; $L(\mathbf{v}^k)$ — конвективно-диффузионный оператор. Значения на нулевой итерации выбираются равными значениям с предыдущего временного слоя:

$$\mathbf{v}^{k=0} = \mathbf{v}^n, \quad p^{k=0} = p^n.$$

2. Определение поправки давления по найденному значению промежуточной скорости:

$$\nabla(\tau \nabla p') = \nabla(\rho \mathbf{v}^*). \quad (12)$$

Здесь τ — коэффициент, имеющий размерность времени и для алгоритма SIMPLEC принимающий вид

$$\tau = \frac{\rho J}{\frac{A_p}{\alpha_u} - \sum A_{sp}}, \quad (13)$$

где J — объем контрольного объема; α_u — коэффициент нижней релаксации ($0 < \alpha_u < 1$), который в данной работе брался равным 0,8; A_p и A_{sp} — коэффициенты матрицы, получающиеся после дискретизации уравнения (11) методом контрольного объема.

3. Коррекция скорости и давления:

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\tau}{\rho} \nabla(p'),$$
$$p^{k+1} = p^k + \alpha_p p',$$

где α_p — коэффициент нижней релаксации для давления. Расчеты показывают, что метод может сходиться и при $\alpha_p = 1$, но для большей устойчивости коэффициент α_p задавался равным 0,9.

Далее описанный итерационный процесс повторяется до достижения сходимости. Сходимость считается достигнутой, если выполнен следующий критерий:

$$\frac{\|\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|}{\|\mathbf{v}^k\|} < \varepsilon,$$

где ε — относительная точность расчета (задавалась равной 10^{-4}).

Полученное в результате сходимости алгоритма решение считается решением на рассматриваемом временном слое:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{k+1}, \quad p^{n+1} = p^{k+1}.$$

Далее весь алгоритм повторяется уже на новом временном слое.

Приведенные формулы SIMPLEC-процедуры записаны для случая постоянной плотности. В методе жидкости в ячейках под плотностью среды понимают величину, определяемую из выражения (5). Эту величину можно рассматривать как плотность некоторой двухфазной среды, состоящей из несжимаемого газа и жидкости. Эта плотность зависит от времени. Сформулировать алгоритм для случая нестационарной плотности не составляет труда. Эти алгоритмы с успехом применяются для расчета сжимаемых течений. Однако для метода жидкости в ячейках напрямую применить SIMPLEC-алгоритм в том виде, в каком он записан выше, не удастся, поскольку в правую часть уравнения на поправку давления (12) входит плотность. А так как плотность жидкости и газа в обычных условиях отличаются на три порядка, то при численном решении уравнения на поправку давления возникает разностная задача с сильно переменной правой частью, решить которую обычными способами невозможно.

Существует несколько способов обойти эту проблему.

Во-первых, — использование разнесенных (или шахматных) сеток, для которых давление локализовано в центре контрольного объема, а компоненты скорости — на его гранях. Таким способом эта проблема была решена в классическом методе жидкости в ячейках.

Во-вторых, — применение специальной поправки [45] к процедуре интерполяции $R_{\text{хи}}\text{—}C_{\text{чоу}}$ (об этой интерполяции будет сказано отдельно). Данная поправка вводит искусственную диссипацию в область градиента плотности, тем самым предотвращая осцилляции скорости и стабилизируя расчет. Третий способ — самый простой. Он заключается в решении уравнений движения жидкости в том виде, в котором плотность перенесена в правую часть:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{-\nabla p + \nabla(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F}}{\rho}.$$

При этом при построении SIMPLEC-алгоритма для этой формы записи уравнение на поправку давления будет иметь вид

$$\nabla(\tau \nabla p') = \nabla(\mathbf{v}^*),$$

где параметр τ определяется следующим образом:

$$\tau = \frac{J}{\rho \left(\frac{A_p}{\alpha_u} - \sum A_{sp} \right)}.$$

Уравнение коррекции скорости при этом имеет вид

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^* - \tau \nabla(p').$$

При такой форме записи правая часть уравнения на поправку давления не содержит плотности, следовательно, не возникают описанные выше проблемы, связанные с большим градиентом плотности. В настоящей работе был применен этот подход.

Для расчетов используются одноблочные структурированные криволинейные сетки. При этом алгоритм строится на так называемой полностью совмещенной (non-staggered или collocated) расчетной сетке, для которой значения вектора скорости и давления определяются в одних и тех же узлах, лежащих в центрах контрольных объемов. Применение совмещенных сеток позволяет упростить программирование, снизить потребность в памяти для хранения массивов, уменьшить количество операций и в целом повысить экономичность расчетного алгоритма. Однако известно, что при расчетах на совмещенных сетках возникает проблема несогласованности полей скорости и давления и, как следствие, возникновения нефизических колебаний поля давления. Обычно для борьбы с осцилляциями давления успешно используют разнесенные (шахматные) сетки, для которых значения составляющих скорости определяются в центрах граней, а значения давления — в центрах контрольных объемов. Альтернативным использованию шахматной сетки является подход Рхи—Чоу [41; 45], заключающийся в том, что в конвективный поток через любую грань контрольного объема вводится поправка, величина которой определяется разностью между градиентами давления, вычисленными на одинарном и двойном шагах сетки. Часто такую процедуру регуляризации рассматривают как введение в правую часть уравнения на поправку давления слагаемого, пропорционального четвертой производной от давления и повышающего точность нахождения конвективных потоков. В настоящей работе такой подход и был использован.

3.5. Конечно-разностные уравнения

Для решения заложенных в алгоритм дифференциальных уравнений в данной работе используется широко известный метод контрольного объема. Его суть заключается в разбиении расчетной области на контрольные объемы и интегрировании исходных уравнений сохранения по каждому контрольному объему для получения конечно-разностных соотношений. Свойства этого метода достаточно хорошо описаны в монографиях [41; 42]. Он обеспечивает точное интегральное выполнение физических законов даже на грубой расчетной сетке. Следовательно, построенная на базе этого метода разностная схема будет консервативной.

Описание дискретизации используемых в математической модели дифференциальных уравнений будем проводить на примере обобщенного конвективно-диффузионного уравнения сохранения скалярной величины Φ :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\Phi) = \nabla \cdot (\Gamma_{\Phi} \nabla\Phi) + S_{\Phi}, \quad (14)$$

где S_{Φ} — источниковый член, природа которого определяется характером рассматриваемой задачи; Γ_{Φ} — обобщенный коэффициент диффузии; \mathbf{v} — вектор скорости потока. Выбрав надлежащим образом скалярную переменную Φ , коэффициент диффузии Γ_{Φ} и источник S_{Φ} , можно получить любое из упомянутых выше дифференциальных уравнений.

Дискретизацию уравнения (14) будем производить методом контрольного объема. Интегрируем данное уравнение по контрольному объему, в центре которого лежит узел с индексами i, j, k (для краткости записи присвоим этому узлу индекс p):

$$\iiint \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV + \iiint \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\Phi) dV = \iiint \nabla \cdot (\Gamma_{\Phi} \nabla\Phi) dV + \iiint S_{\Phi} dV.$$

Используя теорему о среднем значении интеграла и формулу Гаусса—Остроградского, переходим от объемных интегралов к поверхностным:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)_p}{\partial t} \cdot J + I_R - I_L + I_D - I_F + I_T - I_B = S_{\Phi}^p \cdot J,$$

где J — объем контрольного объема; S_{Φ}^p — среднее в ячейке значение источникового члена; I — суммарный конвективно-диффузионный поток через соответствующую грань контрольного объема.

Описание дискретизации потоков удобно проводить на одномерном шаблоне. Рассмотрим дискретизацию в направлении оси Ox (дискретизация в

остальных направлениях будет осуществляться аналогично). Для простоты предположим, что узлы в направлении оси Ox расположены равномерно с шагом Δx . Грани контрольных объемов проходят посередине между узлами (рис. 9).

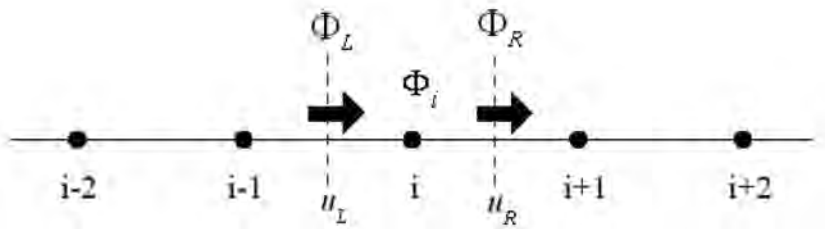


Рис. 9. Одномерный контрольный объем

Рассмотрим контрольный объем, в центре которого находится узел с индексом i . Величина суммарного потока для правой грани этого контрольного объема будет определяться как

$$I_R = A_R \rho_R u_R \Phi_R - A_R \Gamma_R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_R.$$

Первое слагаемое этого выражения является конвективным потоком, второе — диффузионным. Здесь A_R — площадь грани; ρ_R , u_R , Γ_R — значения плотности, скорости и коэффициента диффузии на правой грани контрольного объема, которые находятся при помощи интерполяции из соседних узлов:

$$u_R = \frac{u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{2},$$

$$\rho_R = \frac{\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}}{2},$$

$$\Gamma_R = \frac{\Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i+1,j,k}}{2}.$$

Для задач с большим градиентом коэффициента диффузии в качестве значения коэффициента диффузии на грани лучше выбрать среднегармоническую величину:

$$\Gamma_R = 2 \frac{\Gamma_{i,j,k} \cdot \Gamma_{i+1,j,k}}{\Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i+1,j,k}}.$$

Аппроксимация диффузионной части суммарного потока I производится при помощи центрально-разностной схемы второго порядка точности.

$$A_R \Gamma_R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_R = A_R \Gamma_R \left(\frac{\Phi_{i+1,j,k} - \Phi_{i,j,k}}{\Delta x} \right).$$

Аппроксимация диффузионного потока с большей точностью, как правило, обычно не требуется.

Задача нахождения конвективной части суммарного потока I сводится к отысканию значений искомой функции Φ на гранях контрольного объема Φ_R по известным ее значениям в узлах сетки. Выбор способа интерполяции величины Φ между узлами расчетной сетки определяет свойства полученной при этом разностной схемы. В данной работе были рассмотрены следующие схемы аппроксимации.

Противопоточная схема первого порядка (UDS). При определении величины Φ_R с помощью противопоточной схемы первого порядка учитывается направление скорости потока на данной грани:

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1}, & \text{если } u_R < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Данная схема обладает максимально возможной устойчивостью, однако обладает первым порядком точности, что приводит к возникновению значительной численной вязкости. В связи с этим ее применяют все реже. Однако благодаря своей устойчивости она по-прежнему актуальна при решении некоторых сложных задач с плохой сходимостью. Поэтому UDS до сих пор входит в набор схем аппроксимации основных коммерческих CFD-пакетов (FLUENT, STAR-CD).

Иногда, чтобы повысить точность UDS-схемы без потери ею устойчивости, используют гибридную схему, сочетающую противопоточную и центрально-разностную схемы:

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i, & \text{если } Re_h > 2, \\ \frac{\Phi_{i+1} + \Phi_i}{2}, & \text{если } |Re_h| \leq 2, \\ \Phi_{i+1}, & \text{если } Re_h < -2, \end{cases}$$

где $Re_h = \frac{u_R \Delta x}{\Gamma_R}$ — сеточное число Рейнольдса.

Эта схема устойчива при любых числа Рейнольдса, в то же время при расчете сложных циркуляционных течений, когда отсутствует преобладающее направление движения жидкости, гибридная схема вызывает большие вычислительные ошибки при нахождении локальных характеристик течения.

При использовании данной схемы на практике при больших величинах сеточного числа Re_h часто пренебрегают диффузионными потоками.

Противопоточные схемы высокого порядка. При построении схем высокого порядка для повышения их устойчивости в работе использован следующий широко известный подход [41]:

$$\Phi_R = \left(\Phi_R^{UDS} \right)^{k+1} + \left(\Phi_R^{HOS} - \Phi_R^{UDS} \right)^k,$$

где Φ_R^{UDS} и Φ_R^{HOS} — величины искомой функции Φ , полученные при помощи схемы UDS и какой-либо схемы более высокого порядка; k — номер итерации.

При этом в качестве основной схемы берется схема UDS, дополняемая некоторой корректирующей добавкой, которая явно вносится в источниковый член с предыдущей итерации. Полученная таким образом схема с точки зрения сходимости почти не уступает гибридной схеме, однако существенно превосходит ее по точности. Исходя из этого, все представленные ниже схемы записаны в виде, в котором явно выделены схема UDS и корректирующая добавка:

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + COR^+, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} + COR^-, & \text{если } u_R < 0. \end{cases}$$

Линейная противопоточная схема второго порядка (LUDS) [71]. В данной схеме величина Φ_R находится при помощи линейной интерполяции по двум прилегающим к грани R узлам, лежащим выше по потоку:

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{2}, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} + \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i+2}}{2}, & \text{если } u_R < 0. \end{cases}$$

Квадратичная противопоточная схема (QUICK). Пожалуй, самая распространенная на сегодняшний день схема в вычислительной гидродинамике.

Предложенная Леонардом в работе [47], она использует для определения величины Φ_R квадратичную интерполяцию:

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + \frac{3\Phi_{i+1} - 2\Phi_i - \Phi_{i-1}}{8}, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} + \frac{3\Phi_i - 2\Phi_{i+1} - \Phi_{i+2}}{8}, & \text{если } u_R < 0. \end{cases}$$

Эта схема имеет второй порядок аппроксимации и обладает достаточно высокой скоростью сходимости, чем и объясняется ее широкое применение при решении задач гидродинамики и тепломассообмена.

Ниже приведено еще несколько противопоточных схем более высокого порядка.

Схема третьего порядка (Чен) [48].

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{4}, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} + \frac{\Phi_i - \Phi_{i+2}}{4}, & \text{если } u_R < 0. \end{cases}$$

Схема третьего порядка (KWMR) [49].

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + \frac{\Phi_{i+2} - \Phi_{i+1} + 2\Phi_i - 2\Phi_{i-1}}{6}, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} + \frac{-2\Phi_{i+2} + 2\Phi_{i+1} - \Phi_i + \Phi_{i-1}}{6}, & \text{если } u_R < 0. \end{cases}$$

Схема четвертого порядка (Перик) [41].

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + \frac{-\Phi_{i+2} + 9\Phi_{i+1} - 7\Phi_i - \Phi_{i-1}}{16}, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} + \frac{-\Phi_{i+2} - 7\Phi_{i+1} + 9\Phi_i - \Phi_{i-1}}{16}, & \text{если } u_R < 0. \end{cases}$$

Схема пятого порядка (Рай) [50].

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + \frac{-6\Phi_{i+2} + 54\Phi_{i+1} - 26\Phi_i - 26\Phi_{i-1} + 4\Phi_{i-2}}{120}, & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} + \frac{4\Phi_{i+3} - 26\Phi_{i+2} - 26\Phi_{i+1} + 54\Phi_i - 6\Phi_{i-1}}{120}, & \text{если } u_R < 0. \end{cases}$$

Противопоточные схемы с ограничением потока. После публикации Колгана [51] в 1972 г. начало интенсивно развиваться новое поколение схем аппроксимации конвективного потока, которые впоследствии получили название TVD-схемы (Total Variation Diminishing). Несмотря на то что эти схемы разрабатывались прежде всего для разрывных решений газовой динамики, они получили широкое распространение и в области численного моделирования гладких решений задач несжимаемой жидкости. При этом их основным положительным свойством является монотонность получаемого решения, которое достигается благодаря специальной методике расчета конвективных потоков через грани контрольного объема.

$$\Phi_R = \begin{cases} \Phi_i + \frac{1}{2} \Psi(r^+) \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1}), & \text{если } u_R > 0, \\ \Phi_{i+1} - \frac{1}{2} \Psi(r^-) \cdot (\Phi_{i+2} - \Phi_{i+1}), & \text{если } u_R < 0, \end{cases}$$

$$r^+ = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Phi_i - \Phi_{i-1}}, \quad r^- = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Phi_{i+2} - \Phi_{i+1}},$$

где $\Psi(r)$ — функция-ограничитель, которая отвечает за свойства полученной схемы. Функция-ограничитель $\Psi(r)$ строится таким образом, чтобы давать высокий порядок аппроксимации там, где это возможно (на гладких участках решения), и в то же время гарантировать выполнение критерия ограниченности разностной схемы.

Показано, что TVD-схема будет обладать свойством ограниченности, если ее функция-ограничитель $\Psi(r)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\Psi(r) \leq \frac{2(1-c)}{c}, \quad \Psi(r) \leq 2r, \quad \Psi(r) \geq 0, \quad (16)$$

где c — число Куранта.

Если изобразить функцию $\Psi(r)$ графически, получим так называемую FLD-диаграмму (рис. 10). Область на FLD-диаграмме, удовлетворяющая условиям (16), называют TVD-областью; для того чтобы TVD-схема обладала свойством монотонности, необходимо, чтобы ее функция-ограничитель лежала в TVD-области.

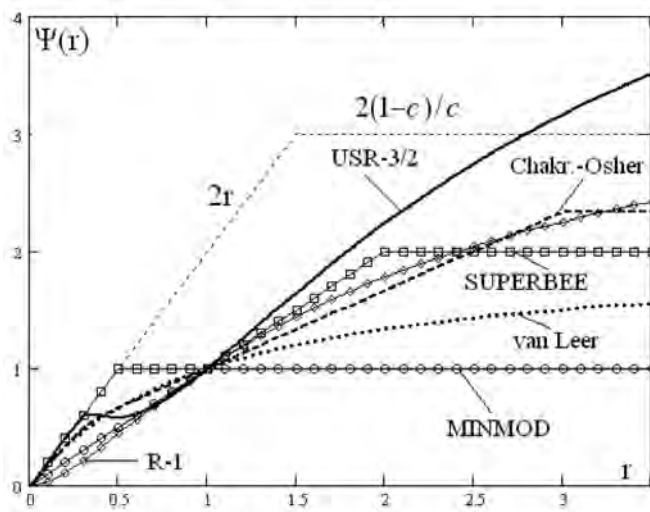


Рис. 10. FLD-диаграмма

В табл. 1 приведены наиболее известные функции-ограничители [40; 52; 53; 71], среди которых есть как минимаксные, так и алгебраические. Они задают практически весь встречающийся в литературе набор TVD-схем. Причем ограничители PL-k, R-k, USPL-k, USR-k задают целые семейства схем.

Так, при $k = \frac{1}{2}$ и $M = 4$ в ограничителе PL-k получаем TVD-схему

SMART, при $k = \frac{1}{2}$ и $M = 2$ — схему UMIST, при $k = 0$ и $M = 2$ — схему

MUSCL. Ограничитель R-k при $k = 0$ совпадает с ограничителем Ван Лира,

при $k = \frac{1}{2}$ получаем TVD-схему третьего порядка аппроксимации ISNAS.

Дискретизация по времени уравнений гидродинамики в данной работе осуществлялась неявным способом, при этом использовалась схема первого порядка аппроксимации временной производной:

$$\frac{(\rho\Phi)_P^{n+1} - (\rho\Phi)_P^n}{\tau} + L^h(\Phi)^{n+1} = 0, \quad (17)$$

где τ — шаг по времени; $L^h(\Phi)$ — конечно-разностный оператор, полученный после дискретизации уравнения (14) по пространству; n — номер временного слоя.

Таблица 1. Наиболее известные функции-ограничители

Схема аппроксимации	Ограничитель
MINMOD	$\Psi(r) = \max(0, \min(r, 1))$
UMIST	$\Psi(r) = \max(0, \min(2, r))$
SUPERBEE	$\Psi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$
Van Leer	$\Psi(r) = \frac{r + r }{r + 1}$
Van ALBADA	$\Psi(r) = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1}$
W2	$\Psi(r) = (1 + \omega \cdot \Theta) \cdot \min \text{mod}(1, r),$ $\Theta = \frac{ \Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1} }{ \Phi_{i+1} - \Phi_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} }, \quad \omega = 2$
MUSCL	$\Psi(r) = \max\left(0, \min\left(2, \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}, 2r\right)\right)$
USR-k	$\Psi(r) = \begin{cases} r + r , & r \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{(8+9k)r^2 + (2-12k)r + 2 + 3k}{3(1+r)^2}, & r \geq \frac{1}{3}, \end{cases} \quad -1 \leq k \leq 1$
R-k	$\Psi(r) = \begin{cases} (r + r) \cdot \frac{[-r^2 + (3+k)r - k]}{(1+r)^2}, & r \leq 1, -1 \leq k < 0, \\ \frac{(2+k)r - k}{1+r}, & r \geq 1, -1 \leq k < 0, \\ (r + r) \cdot \frac{[(1+k)r + 1 - k]}{(1+r)^2}, & 0 \leq k \leq 0. \end{cases}$

Таблица 1 (окончание)

Схема аппроксимации	Ограничитель
Симметричная PL-k	$\Psi(r) = \max\left(0, \min\left(M, \frac{1+k}{2}r + \frac{1-k}{2}, \frac{1-k}{2}r + \frac{1+k}{2}, 2r\right)\right)$ $1 \leq M \leq 4, \quad -1 \leq k \leq 1$
USPL-k	$\Psi(r) = \max\left(0, \min\left(2r, \frac{2}{3}\right), \min\left(M, \frac{1+k}{2}r + \frac{1-k}{2}, 2r\right)\right)$

Тестирование расчетного алгоритма показало, что на достоверность результатов, полученных при использовании VOF-метода, а также предлагаемого метода расчета течений с движущимися телами, определяющее влияние оказывает качество решения уравнений переноса

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0. \quad (18)$$

В связи с этим выбору метода решения уравнения (18) было уделено повышенное внимание. В работе были рассмотрены следующие методы интегрирования данного уравнения.

Явная схема первого порядка.

$$\frac{F_P^{n+1} - F_P^n}{\tau} + L^h(F^n) = 0,$$

где $L^h(F^n)$ — конечно-разностный конвективный оператор, аппроксимация которого осуществлялась описанными выше схемами; τ — временной шаг, величина которого в данном случае определялась из условия Куранта.

Неявная схема первого порядка.

$$\frac{F_P^{n+1} - F_P^n}{\tau} + L^h(F^{n+1}) = 0.$$

В данном случае временной шаг τ совпадает с временным шагом, с которым интегрировались уравнения гидродинамики, — схема (17).

Неявная схема второго порядка.

$$\frac{3F_p^{n+1} - 4F_p^n + F_p^{n-1}}{2\tau} + L^h(F^{n+1}) = 0.$$

Несмотря на то что при аппроксимации уравнений гидродинамики использовался первый порядок аппроксимации, тестовые расчеты показывают, что использование второго порядка при аппроксимации уравнения переноса доли жидкой (твердой) фазы (18) позволяет улучшить точность решения всей задачи.

Явная схема с локально одномерным расщеплением по пространству [55; 56]. Поскольку многие из приведенных выше схем аппроксимации конвективного потока разрабатывались изначально для одномерных задач, применение их к решению пространственных задач часто не дает таких хороших результатов, как в одномерном случае. Поэтому для улучшения качества пространственных решений в данной работе предлагается использовать локально-одномерное расщепление пространственного оператора. Теория локально-одномерных схем изложена в работах А. А. Самарского [55]. В данной работе локально-одномерная схема применена для решения уравнения конвективного переноса.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{F}_p - F_p^n}{\tau} + L_x^h(F^n) &= 0, \\ \frac{\tilde{F}_p - \hat{F}_p}{\tau} + L_y^h(\hat{F}) &= 0, \\ \frac{F_p^{n+1} - \tilde{F}_p}{\tau} + L_z^h(\tilde{F}) &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где L_R^h — одномерные конечно-разностные конвективные операторы. Данная схема обладает первым порядком аппроксимации и при соблюдении условия Куранта является устойчивой.

Проведенные в настоящей работе тестовые расчеты показали, что при использовании данной схемы для решения пространственных конвективных задач в численном решении обнаруживается некоторое нефизическое поведение. Так, при решении двумерной задачи о переносе с постоянной скоростью начального распределения в виде «круга» на грубых сетках в численном решении «круг» может вырождаться в «шайбу». Причина такого нефизического поведения схемы — в ее ярко выраженной несимметрии, связанной с наличием выделенных направлений. Для уменьшения этой несимметрии в работе был использован подход, связанный с чередованием на каждом временном шаге направлений решения. Так, если на $(n+1)$ -м временном слое решение было получено согласно алгоритму (19), то на следующем временном слое данный алгоритм будет иметь вид

$$\frac{\hat{F}_P - F_P^n}{\tau} + L_z^h(F^n) = 0,$$

$$\frac{\tilde{F}_P - \hat{F}_P}{\tau} + L_y^h(\hat{F}) = 0,$$

$$\frac{F_P^{n+1} - \tilde{F}_P}{\tau} + L_x^h(\tilde{F}) = 0.$$

Расчеты показывают, что применение такой процедуры к локально-одномерной схеме позволяет повысить ее симметричность и, как следствие, существенно улучшить качество решения.

4. Тестирование и применение расчетного алгоритма

4.1. Тестирование методов решения уравнения переноса

Как уже указывалось, точность VOF-метода, а также предлагаемой методики расчета движения тел в потоке существенно зависит от качества решения эйлерова уравнения переноса. Поэтому вопросу выбора метода решения конвективного уравнения переноса и его тестированию было уделено большое внимание.

Верификация методов решения уравнения конвективного переноса проводилась на большом числе одномерных и пространственных задач. Здесь приводятся два наиболее характерных примера, на которых хорошо выявляются различия исследованных методов.

Конвективный перенос квадрата. В этом тесте рассматривается двумерная конвективная задача

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0.$$

Начальное распределение для этой задачи представлено на рис. 11б. Функция F равна нулю на всей расчетной области, кроме квадрата, расположенного в ее левом нижнем углу, где $F = 1$. Данное начальное распределение переносится однородным потоком, направленным по диагонали расчетной области. Скорость потока $\mathbf{v} = 1,41$ м/с. Естественно, что в такой постановке точным решением задачи будет сдвиг начального распределения вверх по диагонали расчетной области на расстояние, пропорциональное времени расчета (рис. 11в).

Размеры расчетной области — 1×1 м, размер ребра квадрата — $0,25$ м. Для расчета использовалась равномерная ортогональная сетка, состоящая из 61×61 узлов (рис. 12а). Число Куранта для TVD-схем задавалось равным $0,8$, для остальных схем — $0,25$. Время расчета — $0,6$ с. Решение задачи осуществлялось множеством различных способов. При этом варьировались не только схемы аппроксимации конвективных потоков, но и способы дискретизации временной производной. Результаты расчетов с помощью различных схем представлены на рис. 13, где приведены раскрашенные изолинии функции F . Синий цвет соответствует значению $F = 0$, красный — $F = 1$.

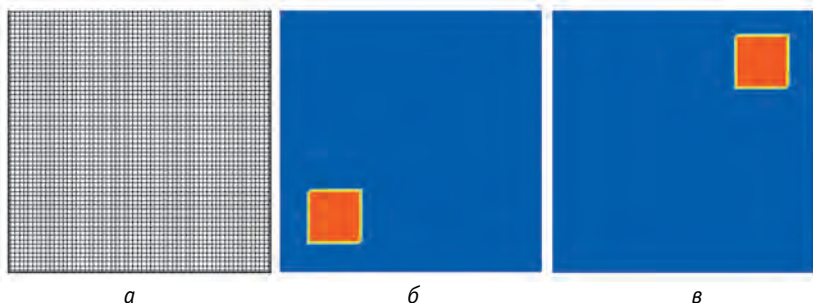


Рис. 11. Задача о конвективном переносе квадрата:
а — расчетная сетка 61×61 узла, б — начальное распределение,
в — точное решение

Из представленных рисунков видно, что метод интегрирования уравнения переноса оказывает существенное влияние на качество численного решения. Анализ показывает, что применение наиболее устойчивых схем высокого порядка аппроксимации по пространству (гибридной, MINMOD, UMIST) приводит к существенному размазыванию численного решения. При решении задачи о переносе квадрата гибридной схемой амплитуда численного решения в течение 30 временных шагов уменьшается примерно в два раза. Естественно, применение такого рода схем для решения рассматриваемого класса задач недопустимо.

Использование немонотонных противопоточных схем высокого порядка, таких как QUICK, для решения конвективного уравнения переноса приводит к возникновению осцилляции решения, погасить которую удастся только значительным уменьшением временного шага или сгущением расчетной сетки. Наличие осцилляции решения можно наблюдать практически на всех рисунках, соответствующих схеме QUICK.

Поэтому применение немонотонных противопоточных схем высокого порядка для решения поставленной задачи также нежелательно.

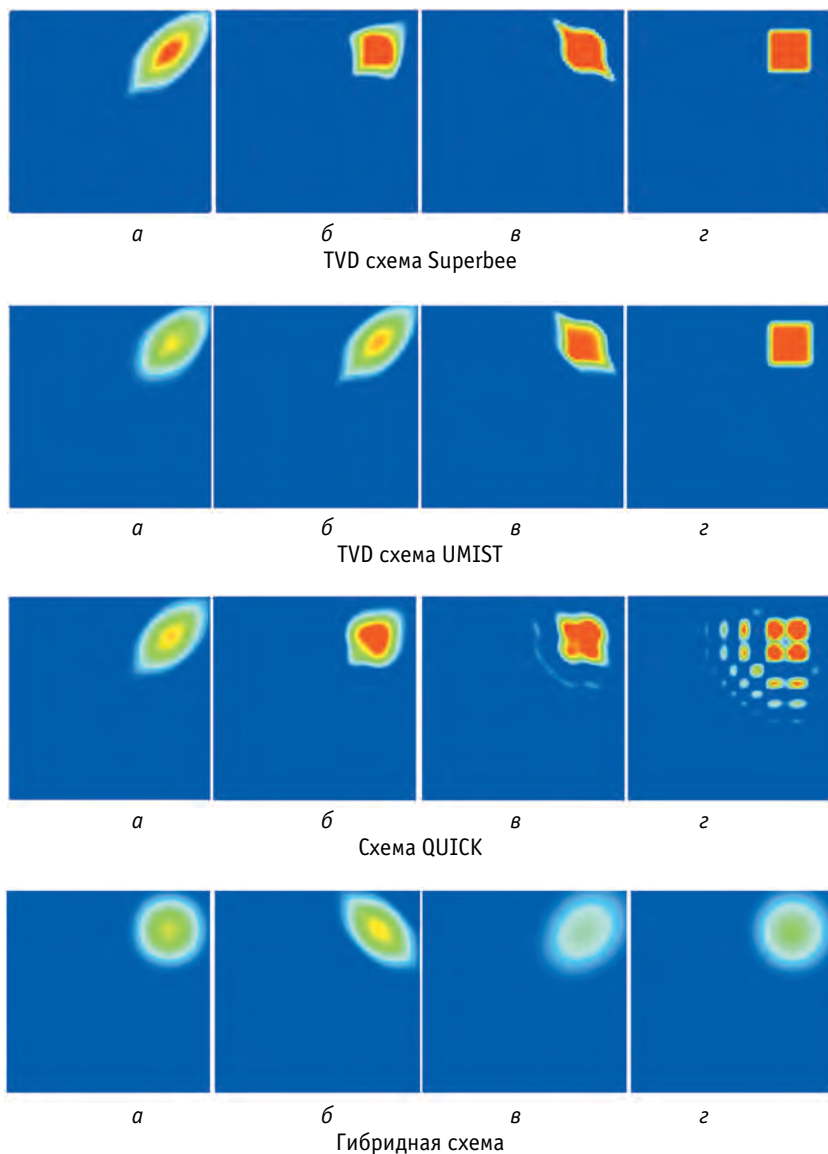


Рис. 12. Численное решение задачи о переносе квадрата:
а — неявная схема первого порядка по времени, *б* — неявная схема второго порядка по времени, *в* — явная схема первого порядка по времени, *г* — явная схема с локально одномерным расщеплением

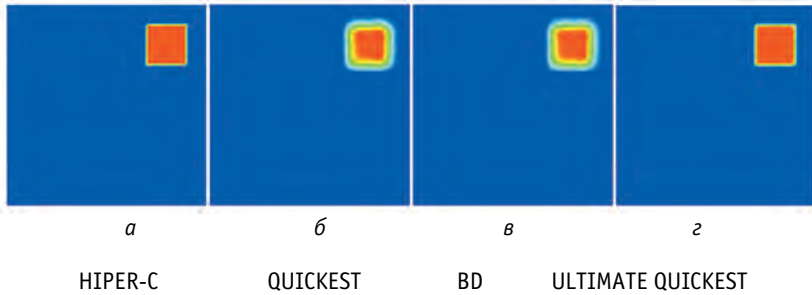


Рис. 12. (окончание)

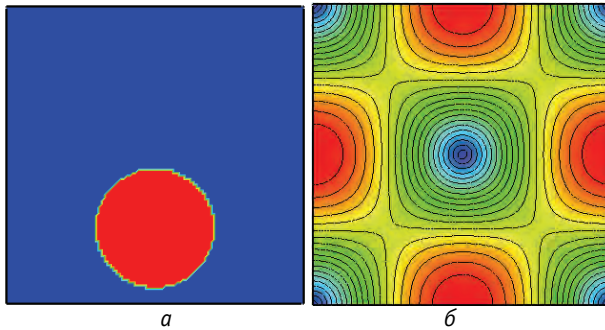


Рис. 13. Задача о деформации круга:
а — начальное распределение, б — изолинии модуля скорости

Использование второго порядка аппроксимации временной производной при ее неявной реализации позволяет во всех случаях существенно улучшить качество численного решения по сравнению с первым порядком аппроксимации при одинаковом значении временного шага. Это видно из сравнения рисунков «а» и «б». Поэтому при неявной реализации временного члена уравнения переноса предпочтительнее использовать аппроксимацию второго порядка.

Обнаружено интересное различие в поведении явной и неявной реализации рассмотренных схем аппроксимации. При решении уравнения переноса неявной схемой решение «растягивается» в направлении вектора скорости, при решении явной схемой — в перпендикулярном направлении. Это можно наблюдать при сравнении рисунков «а» и «в». В целом же неявная реализация оказалась существенно более диссипативной, чем явная, поэтому для решения конвективного уравнения переноса желаем

тельнее использовать явную схему, несмотря на то, что временной шаг при этом должен быть ограничен условием Куранта.

Установлено, что применение локально-одномерного расщепления пространственного конвективного оператора позволяет существенно улучшить качество решения многомерных задач. Это становится очевидно, если сравнить рисунки «в» и «г» для всех рассмотренных тестовых задач.

Применение «сжимающих» (compressive) схем [53—54], хотя в целом повышает точность численного решения (особенно это относится к схемам HIPER-C и ULTIMATE QUICKEST), однако для устойчивого счета требует использования низких значений числа Куранта (меньше 0,25), в то время как, например, TVD-схема Superbee практически всегда устойчиво считает при значении числа Куранта 0,7.

По итогам тестовых расчетов лучшим для решения конвективного уравнения переноса является численный алгоритм, основанный на явной TVD-схеме Superbee с использованием локально-одномерного расщепления пространственного оператора. Этот алгоритм сочетает в себе высокую разрешающую способность контактных разрывов, которой обладает TVD-схема Superbee, и хорошее качество пространственного решения, которое достигается благодаря локально-одномерному расщеплению конвективного оператора. Таким образом, в данной работе этот алгоритм предлагается использовать в качестве простого в реализации и эффективного в применении метода решения конвективного уравнения переноса.

Задача о «деформации круга». В предыдущих тестовых задачах элементарного переноса и вращения простых объектов поле скорости удовлетворяло не только условию $\operatorname{div}(\mathbf{v})=0$, но и условиям $du/dx=0$ и $dv/dy=0$. Поэтому форма переносимого объекта не должна была меняться в процессе движения, однако, как видно из представленных выше рисунков, даже в этом случае получить численное решение хорошего качества — задача очень трудная. При реальном же движении жидкости со свободной поверхностью ее форма может существенно деформироваться и искажаться, и используемый для расчета численный алгоритм должен такое поведение описывать. В связи с этим широкую популярность в качестве теста для алгоритмов расчета течений жидкости со свободной поверхностью получила следующая задача, численное решение которой можно найти во многих источниках [28; 29].

Начальное распределение для данной задачи представлено на рис. 13а. Радиус круга равен $\pi/5$. Размеры расчетной области — $\pi \times \pi$. Расчетная сетка — 100×100 узлов. Число Куранта — 0,25.

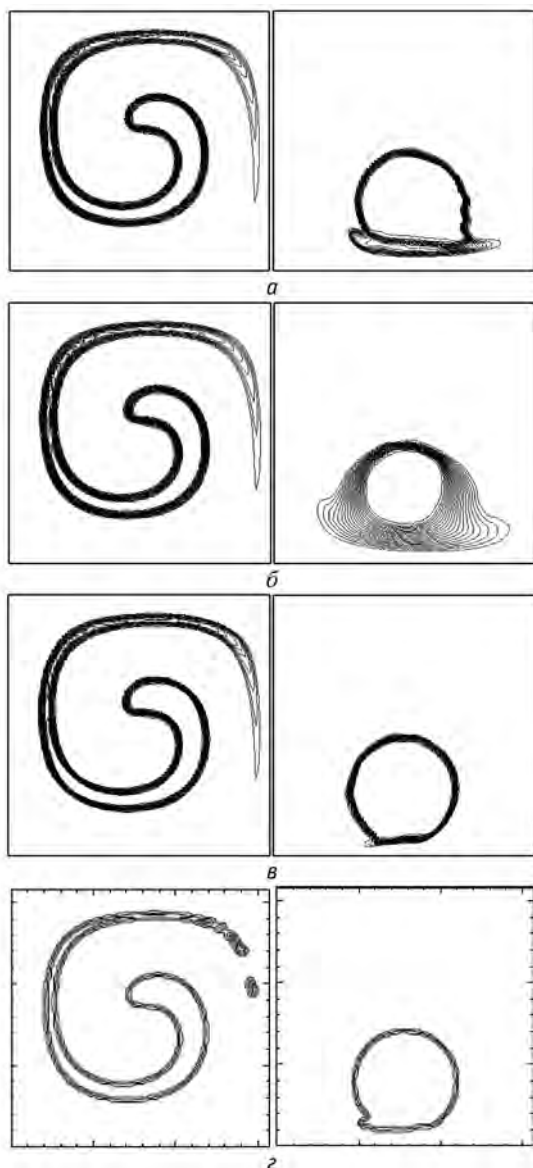


Рис. 14. Численное решение задачи о «деформации круга» после 2000 временных шагов «вперед» и «обратно»:
а — явная схема первого порядка по времени, *б* — неявная схема второго порядка по времени, *в* — явная схема с локально одномерным расщеплением, *г* — решение, полученное схемой Юнга

Поле скорости задается следующим образом (рис. 13б):

$$u = -\cos(y)\sin(x),$$
$$v = \cos(x)\sin(y).$$

Далее в течение N временных шагов решается уравнение переноса с данным начальным распределением и полем скорости, после чего вектор скорости меняет знак, и решение продолжается еще в течение N временных шагов. Ясно, что точным решением задачи будет начальное распределение.

На рис. 14 приведено численное решение этой задачи при помощи схемы Superbee в различной реализации для 2000 временных шагов «вперед» (левые рисунки) и 2000 временных шагов «обратно» (правые рисунки).

Для сравнения на рисунках «г» приведено решение, полученное при помощи метода Юнга, считающегося одним из лучших методов решения конвективного уравнения переноса. Этот метод довольно точен, однако очень сложен в реализации, плохо обобщается в трехмерном случае для неортогональных расчетных сеток и требует значительных вычислительных затрат. Данные для сравнения были взяты из [28]. Из рисунков видно, что если после первых 2000 шагов решения, полученные разными методами, практически совпадают, то после 2000 шагов в обратном направлении обнаруживаются существенные различия. Тем не менее решение, полученное предложенным в работе алгоритмом, на основе схемы Superbee с локально-одномерным расщеплением хорошо согласуется с решением схемой Юнга. Явная схема первого порядка и неявная схема второго порядка приводят к достаточно серьезной деформации и размытию формы круга.

4.2. Обрушение водяного столба в двумерной постановке

Эта задача является одним из самых распространенных тестов для алгоритмов решения задач со свободной поверхностью. Ее численное решение различными методами можно найти во многих работах [38; 43]. Постановка задачи представлена на рис. 15. Стенка высотой $2a$ ограничивает столб воды шириной a , в начальный момент расчета стенка мгновенно удаляется, и под действием силы тяжести жидкость растекается по расчетной области. Результаты расчета процесса обрушения дамбы обычно сравнивают с экспериментальными данными Дж. Мартина и В. Мойса [58]. Сопоставление с экспериментом проводят по двум параметрам: расстоянию x , на которое распространится вода за время t от начала открытия дамбы, и уровню воды b у левой стенки резервуара с жидкостью.

Расчет процесса обрушения водяного столба проводился при следующих параметрах: размеры расчетной области — $1,25 \times 0,7$ м, начальная ширина водяного столба — $0,2$ м, высота — $0,4$ м. Для расчета использовалась

однородная сетка, состоящая из 80×142 узлов. В качестве граничных условий на стенках расчетной области задавались условия прилипания. Для аппроксимации конвективных членов уравнений гидродинамики использовалась схема QUICK. Уравнение переноса объемной доли жидкой фазы в расчетной ячейке решалось явной TVD-схемой Superbee с использованием локально-одномерного расщепления. Временной шаг для решения уравнений гидродинамики задавался равным $0,0025$ с. Временной шаг для решения уравнения переноса концентрации жидкой фазы определялся из условия Куранта $CFL = 0,7$.

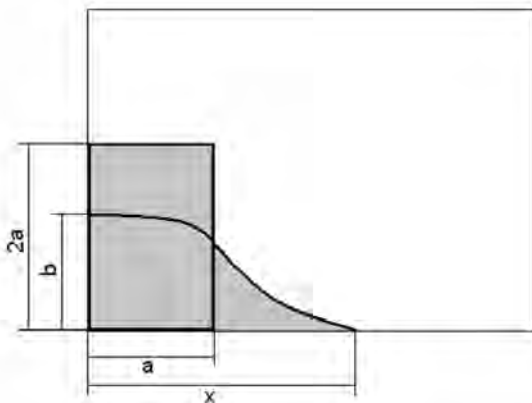
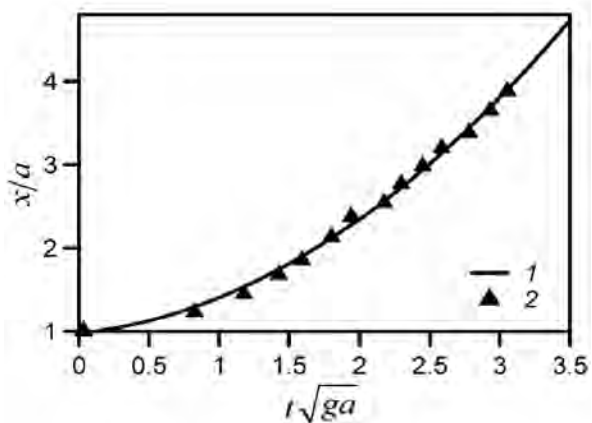


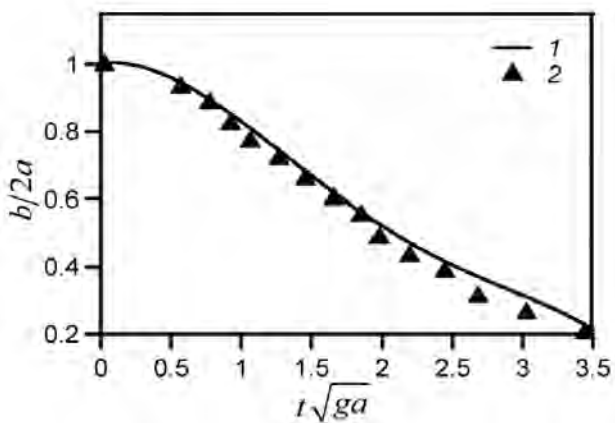
Рис. 15. Постановка задачи об обрушении водяного столба в двумерной постановке

Количественное сравнение результатов расчета с экспериментом [58] представлено на рис. 16. Видно, что наблюдается достаточно хорошее совпадение численных результатов с экспериментальными данными.

Качественное поведение жидкости после разрушения дамбы можно видеть на рис. 17, где приведена форма свободной поверхности воды в разные моменты времени. Свободная поверхность показана при помощи окрашенных изолиний функции F . Для сравнения с расчетом приведены сделанные в те же моменты экспериментальные фотографии, взятые из [59]. В данном эксперименте начальные размеры водяного столба были равны $0,2 \times 0,25$ м. Расчет проведен для аналогичных параметров. Из представленных рисунков видно, что наблюдается качественное согласование расчета и эксперимента как по форме свободной поверхности, так и по расстоянию, на которое распространяется вода за равные промежутки времени.



а



б

Рис. 16. Количественное сравнение результатов расчета с экспериментом: *a* — расстояние x , на которое распространится вода за время t , *б* — уровень воды у левой стенки резервуара; 1 — расчет, 2 — эксперимент

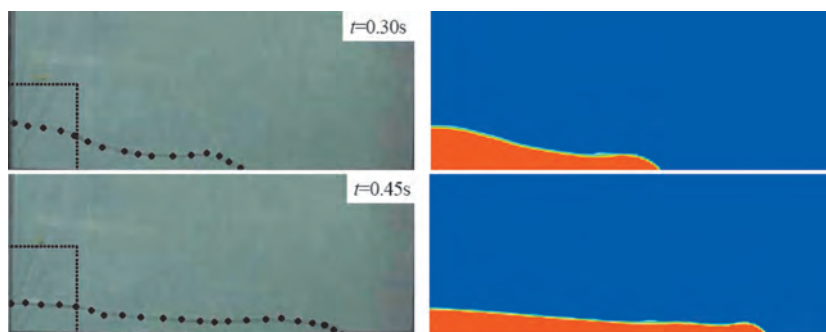


Рис. 17. Форма свободной поверхности воды в моменты времени 0,3 с и 0,45 с после начала движения. Левые рисунки — экспериментальные фотографии

4.3. Обрушение водяного столба в пространственной постановке с натеканием жидкости на препятствие

В следующем тесте рассмотрена задача об обрушении водяного столба в трехмерной постановке. Трехмерность задачи в данном случае обусловлена наличием препятствия конечного размера, установленного на пути движущейся воды. Постановка задачи представлена на рис. 18. В резервуаре размерами $3,2 \times 1 \times 1$ м перегородкой отделен столб воды высотой 0,55 м и шириной 1,2 м. На дне резервуара на расстоянии 1,17 м от перегородки закреплен брусок размерами $0,16 \times 0,16 \times 0,40$ м.

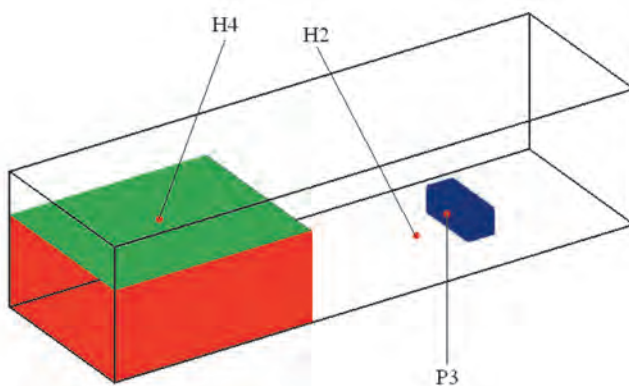


Рис. 18. Постановка задачи об обрушении водяного столба в пространственной постановке

Экспериментальное исследование этой задачи было проведено в Морском научно-исследовательском институте Нидерландов (MARIN). Данные взяты из [60; 61]. В эксперименте измерялся уровень жидкости в четырех точках резервуара, а также давление в нескольких точках на поверхности бруска. В настоящей работе сравнение с экспериментом проводилось для двух точек по глубине жидкости (Н2 и Н4) и одной точке по давлению (Р3).

Точки располагаются на оси симметрии резервуара и имеют следующие координаты: точка Н4 — расположена на расстоянии 2,66 м от правой стенки резервуара, точка Н2 на расстоянии 1 м, точка Р3 — на правой стенке бруска на высоте 0,099 м от дна резервуара.

На рис. 19 приведена расчетная форма свободной поверхности жидкости в различные моменты времени. Свободная поверхность жидкости показана при помощи изоповерхности функции F со значением, равным 0,5. Из анализа поведения формы свободной поверхности жидкости во времени можно составить следующую картину движения воды в резервуаре. После открытия перегородки жидкость начинает двигаться по резервуару, и сначала ситуация мало чем отличается от рассмотренной ранее задачи о двумерном обрушении. Примерно через 0,4 с после начала движения жидкость достигает передней грани бруска, о чем свидетельствует резкое повышение давления в этот момент на графике рис. 20.

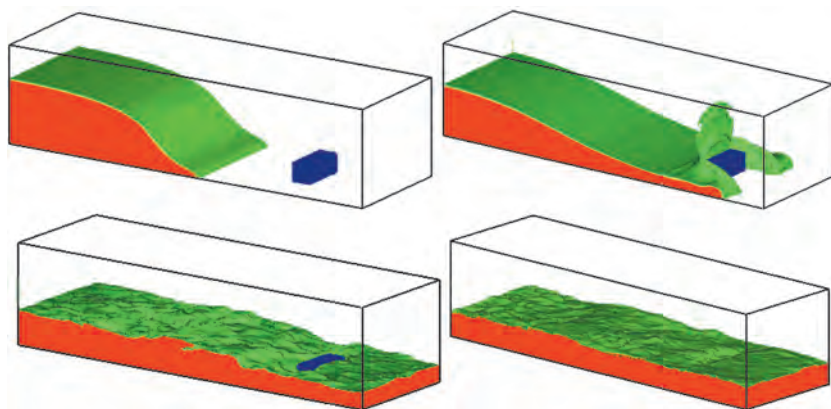


Рис. 19. Форма свободной поверхности жидкости в различные моменты времени

В результате удара о поверхность бруска жидкость выплескивается на высоту примерно 0,6 м над дном резервуара. Передний фронт жидкости, который не встретил на своем пути бруска, при этом продвигается дальше по резервуару, обтекая брусок. В момент времени, примерно равный 0,8 с,

жидкость, которая обтекла брусок с боков, доходит до правой стенки резервуара и начинает подниматься вверх. Далее примерно в течение 0,6 с жидкость накапливается у правой стенки резервуара, достигая максимального подъема в момент времени 1,8 с. После этого начинается движение жидкости в обратном направлении. В момент времени 2,6 с отраженная от правой стенки волна жидкости доходит до точки Н4, о чем свидетельствует начало роста уровня жидкости в этот момент на графике рис. 21. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока колебания полностью не затухнут и жидкость не остановится.

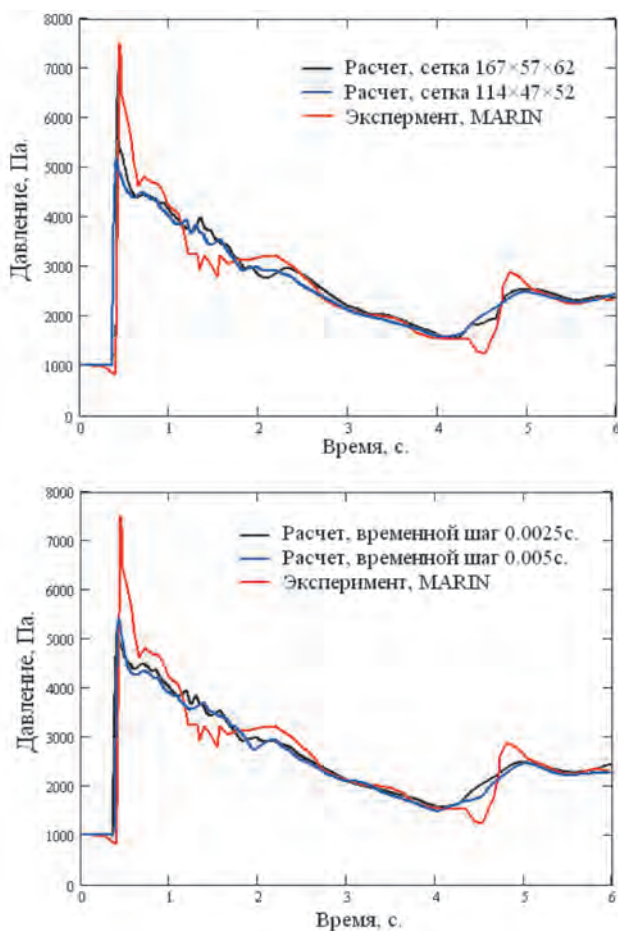


Рис. 20. Давление в точке P3

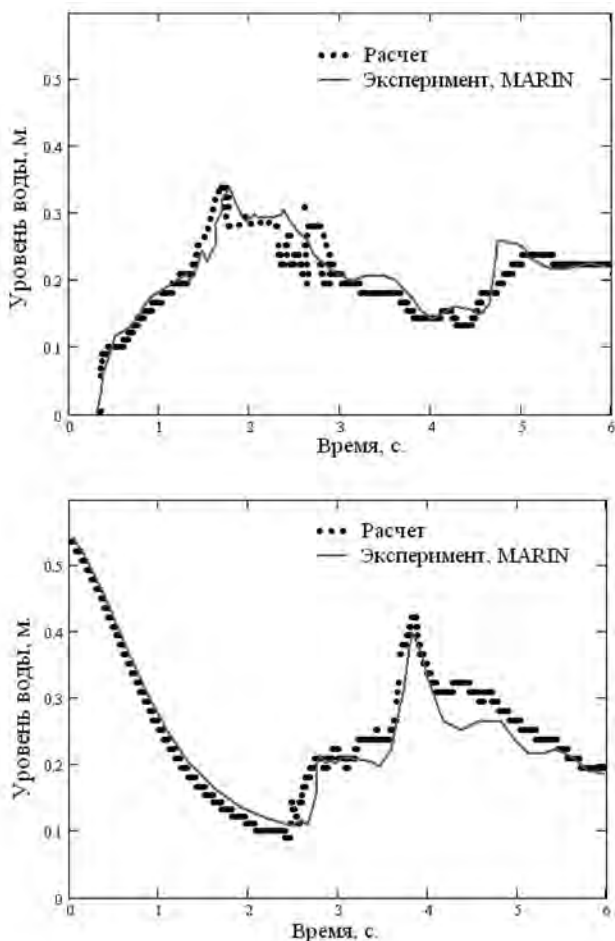


Рис. 21. Уровень жидкости в точках N2 и N4

На рис. 20 и 21 видно, что наблюдается хорошее согласование расчета и эксперимента как по положению свободной поверхности в различные моменты в точках N2 и N4, так и по величине относительного давления в точке P3. Было проведено несколько расчетов обрушения водяного столба на менее детальной сетке, состоящей из $114 \times 47 \times 52$ расчетных узлов. Анализ показывает, что в целом результаты, полученные на сетке $114 \times 47 \times 52$ и на сетке $167 \times 57 \times 62$, которая в два раза детальнее, различаются не очень сильно. Максимальное различие наблюдается в величине пика давления в момент удара жидкости о брусок. Аналогичное заключение можно сделать и для величины временного шага.

4.4. Задача о колебаниях жидкости в баке

В следующем тесте рассмотрен процесс колебаний жидкости в закрытом баке под действием периодической вынуждающей горизонтальной силы. В закрытом баке размерами $1,2 \times 0,6 \times 0,2$ м в начальный момент покоится жидкость (рис. 22). Жидкость не полностью заполняет бак. Под действием горизонтальной периодической силы бак начинает двигаться с ускорением, передавая движение жидкости.

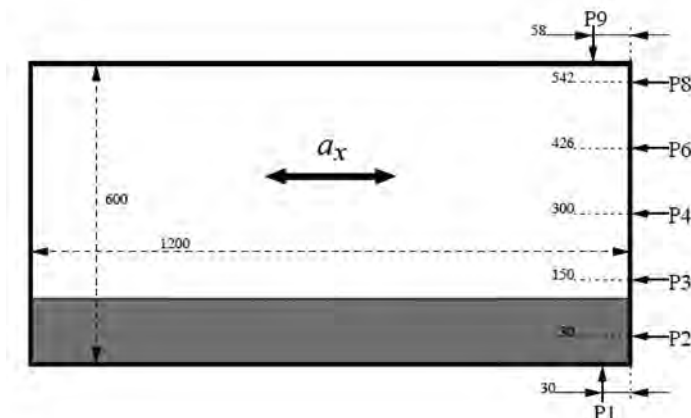


Рис. 22. Постановка задачи о колебаниях жидкости в баке

Экспериментальное исследование данной задачи было проведено М. Хинацу, Й. Цукадой и др. [62]. Постановка и данные для сравнения были взяты из [63]. Описание результатов численного моделирования данной задачи также можно найти в [64; 65]. В эксперименте было рассмотрено два уровня заполнения бака жидкостью (20% и 60%) и несколько режимов колебаний бака. Для моделирования был выбран уровень заполнения 20% и резонансный режим колебаний жидкости.

В эксперименте при помощи датчиков проводилось непрерывное измерение давления в девяти точках на стенках бака в его центральном сечении (см. рис. 22).

Моделирование данной задачи в работе было проведено в двумерной постановке. Хотя в реальности эта задача трехмерная, последующее сравнение с экспериментом показало, что использование двумерной постановки вполне оправданно.

При моделировании считалось, что бак неподвижен, а жидкость движется с горизонтальным ускорением:

$$a_x = -A\omega^2 \cos(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период движения бака; $A = 0,06$ м — амплитуда движения.

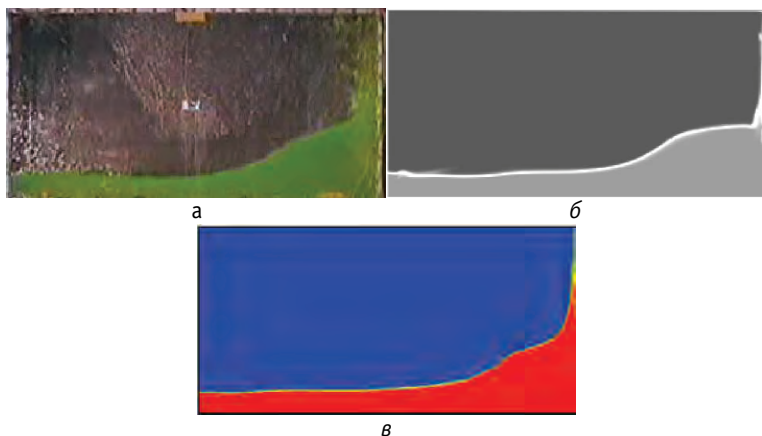


Рис. 23. Форма свободной поверхности воды в момент времени $t = 3,32$ с:
а — экспериментальная фотография — М. Хиначу, б — расчет [65],
в — расчет (данная работа)

Для расчетов использовались ортогональные равномерные сетки различной детализации — $160 \times 80 \times 3$ и $280 \times 140 \times 3$ узлов. На стенках бака задавались условия прилипания. Для вырождения задачи в двумерную на стенках, параллельных центральному поперечному сечению, задавались условия симметрии.

На рис. 23 представлено качественное сравнение результатов моделирования с экспериментом, а также с расчетами, взятыми из [65]. Расчеты в [65] были проведены при помощи VOF-метода на сетке 256×128 схемой CISCAM. Форма свободной поверхности жидкости в сходные моменты времени в эксперименте и расчетах в целом качественно согласуется. Количественное сопоставление расчета и эксперимента представлено на рис. 24. На графиках приведена величина статического давления на стенках бака в зависимости от времени для грубой и детальной расчетной сетки. Видно, что всюду, кроме первого периода колебаний, статическое давление в расчетах хорошо согласуется с экспериментом как по величине, так и по периоду изменений. С увеличением детализации расчетной сетки совпадение расчета и эксперимента немного увеличивается. Наиболее наглядно это видно по величине пиков давления. Однако к существенным изменениям картины течения детализация сетки не приводит.

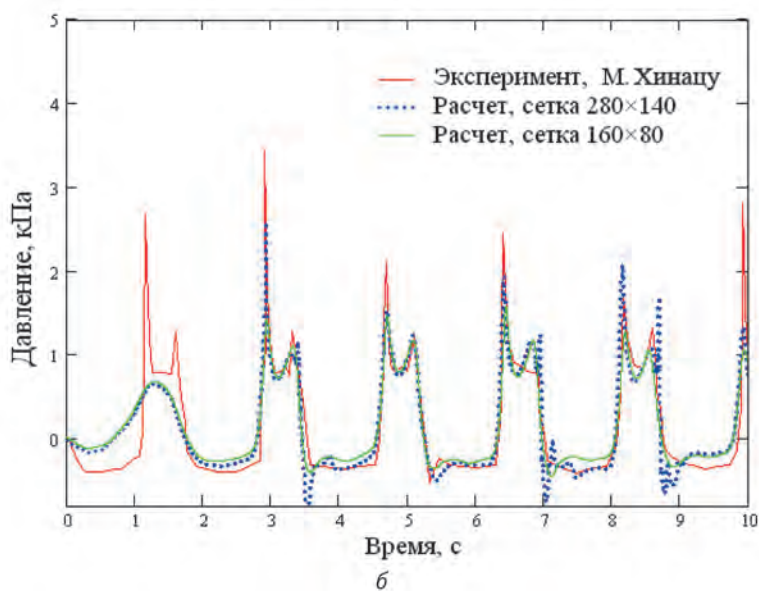
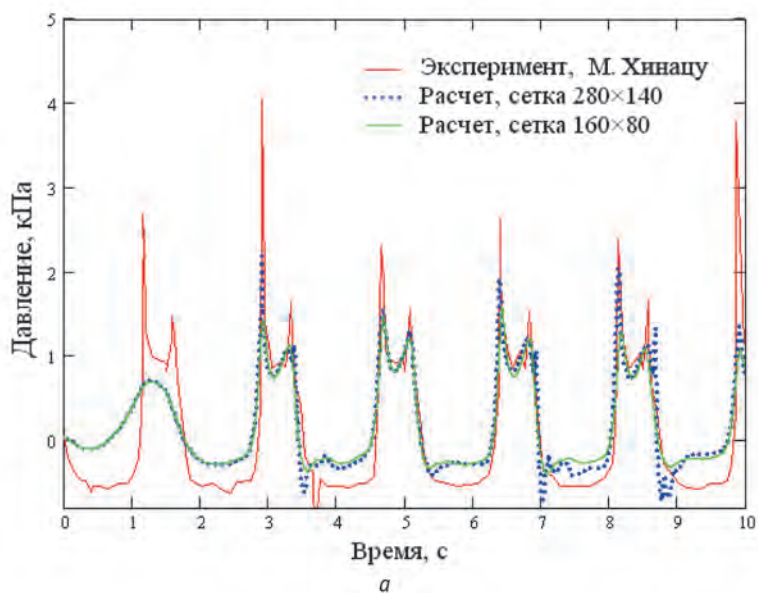


Рис. 24. Давление в точках P1 (а) и P2 (б)

4.5. Падение шара в канале с вязкой средой

Шарик диаметром 0,4 см и массой 0,07 г совершает свободное падение в канале, заполненном вязкой средой [66]. Размеры канала — $2 \times 2 \times 8$ см, вязкость среды — 0,02 Па·с. Определялась зависимость скорости падения шарика от времени. Для расчета использовалась равномерная сетка, состоящая из $40 \times 40 \times 160$ расчетных узлов. Задача решалась методом переноса доли твердой фазы. Аппроксимация конвективных членов уравнений гидродинамики проводилась при помощи схемы QUICK. Уравнение переноса доли твердой фазы в расчетной ячейке решалось явной схемой Superbee с использованием локально-одномерного расщепления. Временной шаг для решения уравнений гидродинамики задавался равным 0,001 с. Временной шаг для решения уравнения переноса доли твердого тела в ячейке определялся из условия Куранта $CFL = 0,25$. Уравнения движения шарика решались методом Рунге—Куты второго порядка точности.

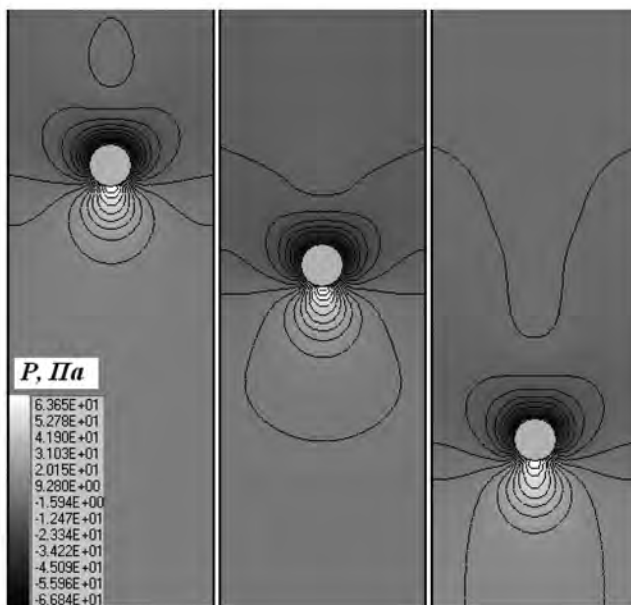


Рис. 25. Изолинии поля давления в различные моменты

На рис. 25 представлено распределение поля давления в центральном продольном сечении канала в различные моменты. Видно, что рассматриваемое течение очень «вязкое» и практически соответствует потенциальному обте-

канию шара. Полученные результаты были сопоставлены с расчетными данными из [66], где задача была решена одним из вариантов лагранжева *body-fitted* метода, в котором граница поверхности твердого тела отслеживается узлами детальной расчетной сетки.

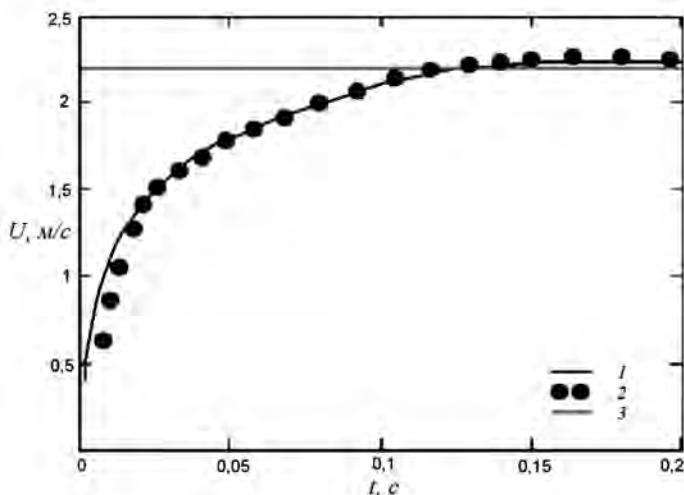


Рис. 26. Зависимость скорости падения шара от времени:

1 — расчет, 2 — расчет [66], 3 — теоретическое значение установившейся скорости падения шарика

На рис. 26 приведено сравнение полученной в результате расчетов зависимости скорости шарика от времени с результатами [66]. На графике также приведено значение теоретической величины установившейся в результате действия сил сопротивления жидкости скорости падения шарика (горизонтальная серая линия). Как видно, наблюдается достаточно хорошее согласование результатов, полученных при помощи лагранжевого метода в [66], и предложенного в данной работе эйлерова метода переноса объемной доли твердого тела в ячейке.

4.6. Взаимодействие цилиндра с жидкостью со свободной поверхностью

Следующий пример — задача о свободном падении твердого круглого цилиндра в воду. Диаметр цилиндра — 11 см, он падает с высоты 50 см над поверхностью воды. Глубина воды в бассейне — 30 см. Торцы цилиндра скользят по направляющим пластинам, поэтому можно считать, что задача двумерная. Эксперимент провели М. Гринхау и В. М. Лин [67; 68]. Данные взяты из [68]. Измерялась глубина погружения цилиндра h в зависимости от времени, а также делались фотографии процесса погру-

жения. Эксперимент проводился для двух величин плотности материала цилиндра — 500 и 1000 кг/м³.

Моделирование этой задачи осуществлялось в двумерной постановке. Для расчета движения жидкости использовался VOF-метод, для расчета движения цилиндра — метод переноса доли твердой фазы. Расчеты были проведены для прямоугольной области размерами 0,6×0,9 м. Размер расчетной области по третьей координате — 1 м. Для расчетов использовались ортогональные одноблочные сетки различной детализации — 150×100×3 и 300×150×3 узлов.

На нижней стенке расчетной области задавались условия прилипания. На верхней и боковых стенках ставились условия свободного выхода. Для вырождения задачи в двумерную на торцевых стенках задавались условия симметрии.

На рис. 27 представлены результаты расчета процесса падения цилиндра в воду при плотности материала цилиндра 500 кг/м³. Для сравнения приведены экспериментальные фотографии.

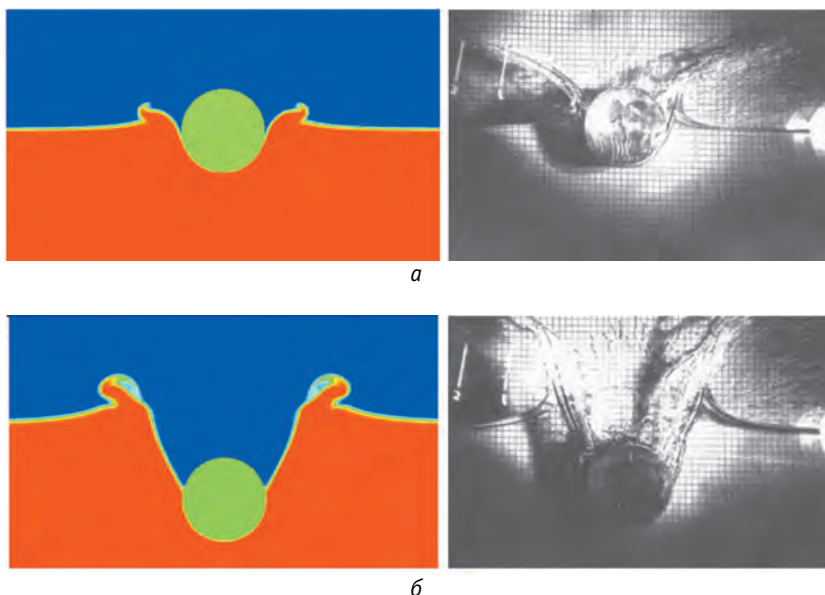


Рис. 27. Динамика падения цилиндра в воду:
а — $t = 0,03$ с, б — $t = 0,12$ с

Время на рисунках отсчитывается от начала входа цилиндра в воду, т. е. от 0,319 с с начала падения. Результаты получены на сетке 150×100×3. Ви-

зуализация свободной поверхности проведена при помощи раскрашенных соответственно значению изолиний функции F . Видно, что качественно расчетные изолинии повторяют очертания свободной поверхности воды на экспериментальных фотографиях. Существенные различия наблюдаются в области выплескивания жидкости, где образуется множество мелких капелек и струй (брызг), для разрешения которых требуется очень детальная расчетная сетка.

На рис. 28 приведено сравнение результатов расчетов погружения цилиндра, полученных на разных сетках, с экспериментом и результатами расчетов Чжу Синьина, взятыми из [69]. На рисунках по оси ординат отложено расстояние, пройденное нижней точкой цилиндра, расстояние отсчитывается от поверхности жидкости. По оси абсцисс отложено время погружения цилиндра от момента его входа в воду.

Результаты расчетов в [69] получены при помощи метода CIP (Constrained Interpolation Profile) [70] на детальной сетке. Как видно из графиков, наблюдается хорошее совпадение как с экспериментом, так и с расчетами Чжу Синьина. С увеличением детализации расчетной сетки совпадение улучшается, особенно это проявляется при плотности цилиндра 1000 кг/м^3 . На сетке 150×100 расчетная глубина погружения цилиндра оказывается меньше экспериментальной.

Затем были проведены расчеты всплытия цилиндра. Цилиндр, погруженный в воду, всплывает под действием постоянной силы, равной весу цилиндра. Размеры цилиндра такие же, как в предыдущей задаче. Цилиндр всплывает с глубины $0,08 \text{ м}$ от поверхности воды. Начальная скорость цилиндра равна нулю. Плотность материала цилиндра равна 1000 кг/м^3 . Эксперимент провели М. Гринхау и В. М. Лин.

На рис. 29 представлено поведение формы свободной поверхности жидкости во время всплытия цилиндра. Количественное сопоставление результатов расчета с данными эксперимента и расчетом Чжу Синьина приведено на рис. 30. Как видно, наблюдается хорошее согласование. На рис. 30 по оси ординат отложена глубина, отсчитываемая от поверхности воды, на которой находится в данный момент времени нижняя точка цилиндра.

В целом по итогам серии тестов с погружением и всплытием цилиндра можно резюмировать, что во всех рассмотренных задачах достигнуто хорошее количественное согласование с экспериментальными данными и расчетами, полученными методом CIP. Существенная особенность рассмотренных задач заключается в том, что в них рассматривается свободное движение твердого тела, взаимодействующего с жидкостью со свободной поверхностью. Таким образом, данную серию тестов можно рассматривать не только как тестирование алгоритма расчета свободной поверхности, но и как тест для предложенного в данной работе алгоритма расчета движения твердого тела в потоке жидкости.

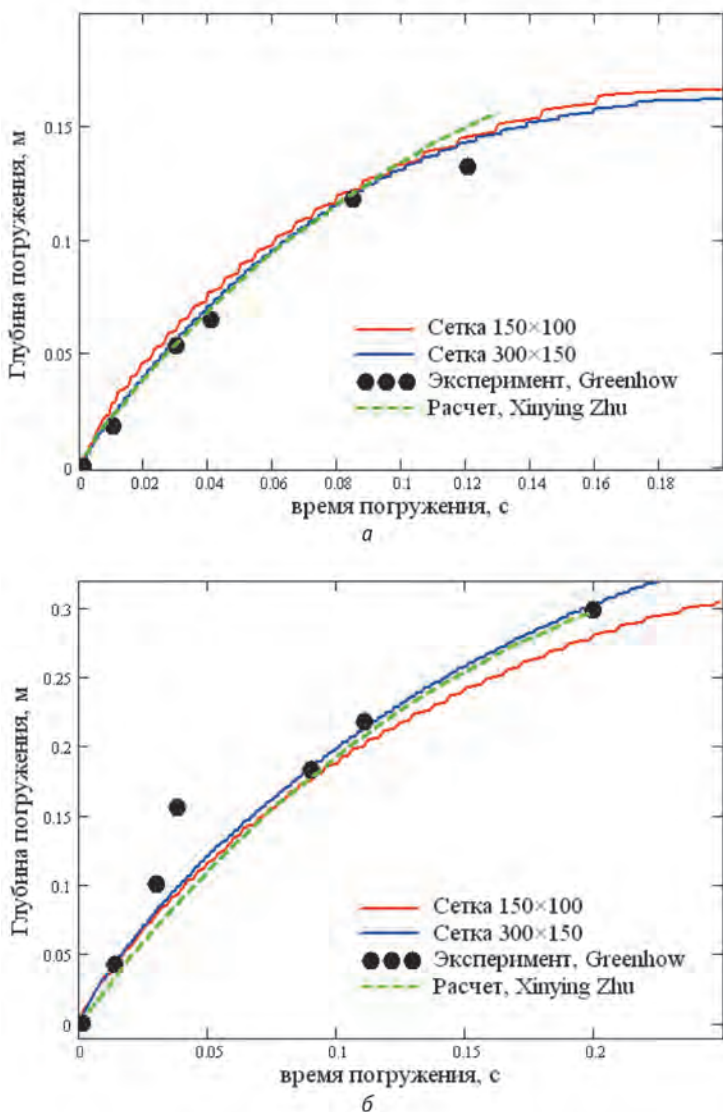


Рис. 28. Сравнение результатов расчетов погружения цилиндра, полученных на разных сетках, с экспериментом и результатами расчетов (по оси Y — координата нижней точки цилиндра):
 a — плотность материала цилиндра 500 кг/м^3 ,
 $б$ — плотность материала цилиндра 1000 кг/м^3

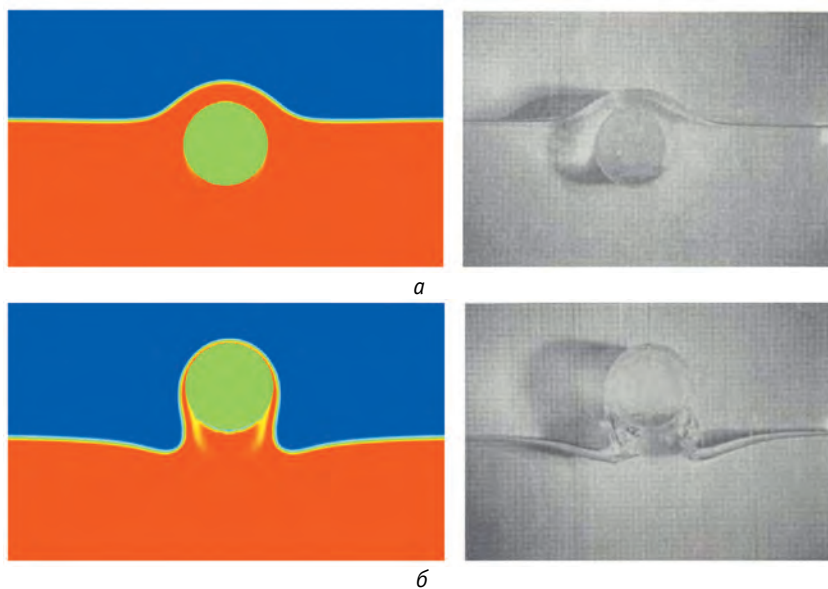


Рис. 29. Динамика вспльтия цилиндра:
 $a - t = 0,165\text{с}$, $б - t = 0,22\text{с}$

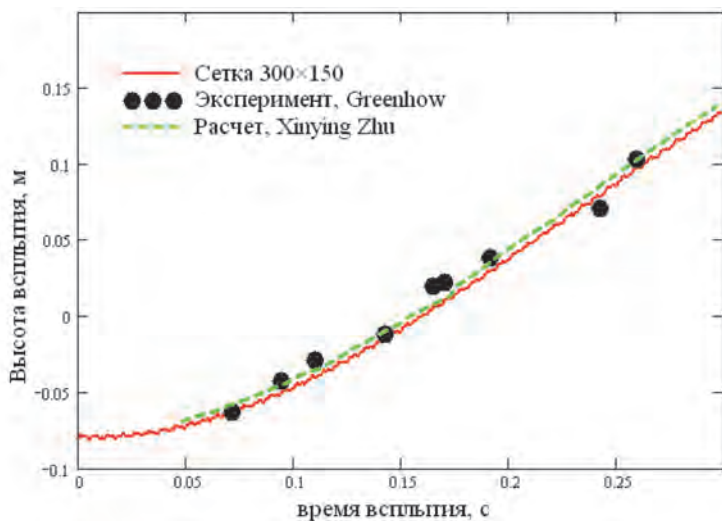


Рис. 30. Сопоставление результатов расчета с данными эксперимента и расчетом [69] (Y — координата нижней точки цилиндра)

5. Заключение

Основные результаты работы:

1. На основе метода жидкости в ячейках разработана численная методика, которая позволяет эффективно рассчитывать пространственные течения вязкой несжимаемой жидкости с подвижными границами.
2. Предложен новый эффективный алгоритм расчета течений несжимаемой жидкости с подвижными твердыми телами. Он позволяет описывать широкий класс течений несжимаемой вязкой жидкости с движущимися твердыми телами на фиксированной ортогональной сетке, не накладывая при этом ограничений на форму тела и траекторию его движения.
3. Предложена методика решения нестационарного пространственного уравнения конвективного переноса на основе TVD-схемы Superbee с явным локально-одномерным расщеплением пространственного оператора. Эта методика сочетает в себе высокую разрешающую способность контактных разрывов, присущую TVD-схеме Superbee, и хорошее качество пространственного решения, которое достигается благодаря локально-одномерному расщеплению конвективного оператора.
4. Реализованный в виде пакета программ численный алгоритм опробован на ряде тестовых задач со свободной поверхностью и подвижными телами. В результате тестирования получено хорошее качественное и количественное согласование с данными эксперимента, аналитическими решениями и расчетами других авторов.

Литература

1. *Франк А. М.* Дискретные модели несжимаемой жидкости. — М.: Физматлит, 2001. — 206 с.
2. *Бураго Н. Г.* Численное решение задач с МСС с подвижными границами раздела: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ИПМех РАН. — М., 2003. — 222 с.
3. *Белоцерковский О. М.* Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973. — С. 304.
4. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1984. — С. 519.
5. *Белоцерковский О. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. — М.: Наука, 1982. — С. 391.
6. *Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И., Баряхнин В. Б., Шокина Н. Ю.* Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. — 393 с.

7. Давыдов Ю. М. Численное исследование тейлоровской неустойчивости в нелинейном приближении // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск: Наука, 1978. — № 3. — С. 67—69.
8. Kothe D. B., Rider W. J. Mosso S. J., Brock J. S. Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions / AIAA. — [S. l.], 1996. — (Paper-96).
9. Kothe D. B., Rider W. J. Comments on modeling interfacial flows with volume-of-fluid methods / Los Alamos National Lab. — [S. l.], 1994. — (Technical report LA-UR-3384).
10. Osher S., Sethian J. A. Front propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations // J. of Computational Physics. — 1988. — Vol. 79. — P. 12.
11. Sethian J. A. Tracking interfaces with level sets // American scientist. — 1998. — Vol. 85. — P. 254.
12. Sethian J. A. Level set methods: evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science. — [S. l.]: Cambridge Univ. Press, 1996.
13. Поммер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1980.
14. Evans M. W., Harlow F. H. The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations: Technical report / Los Alamos National Lab. — [S. l.], 1957.
15. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // The Physics Of Fluids. — 1965. — Vol. 8, № 12. — P. 2182—2189.
16. Harlow F. H. Shannnon J. P. Distortion of splashing liquid drop // Science. — 1967. — P. 547.
17. Welch J. E., Harlow F. H., Shannnon J. P., Daley B. J. The MAC method / Los Alamos Scientific Lab. — [S. l.], 1966. — (Technical report LA-3425).
18. Amsden A. A., Harlow F. H. The SMAC method: numerical technique for calculating incompressible fluid flows / Los Alamos Scientific Lab. — [S. l.], 1970. — (Technical report LA-4370).
19. Amsden A. A., Harlow F. H. Technical report LA-4700 / Los Alamos National Lab. — [S. l.], 1971.
20. Chen S., Johnson D. B., Raad P. E. Velocity boundary conditions for the simulation of free surface fluid flow // J. of Computational Physics. — 1995. — № 116. — P. 262—276
21. Daly B. J. A technique for including surface tension effects in hydrodynamic calculations // J. Comput. Phys. — 1969. — Vol. 4. — P. 97—117.

22. *Lafaurie B., Nardone C., Scardovelli R. et al.* Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER // *J. Comput. Phys.* — 1994. — № 113. — P. 134—147
23. *Nichols B. D., Hirt C. W., Hotchkiss R. S.* SOLA-VOF: A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries / Los Alamos National Lab. — Los Alamos, NM, 1980. — (Technical report LA-8355).
24. *Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C.* A continuum method for modelling surface tension // *J. Comput. Physics.* — 1992. — Vol. 100. — P. 335—354.
25. *Kothe D. B., Mjolsness R. C.* A new model for incompressible flows with free Surfaces // *AIAA J.* — 1992. — Vol. 30, № 11. — P. 2694—2700.
26. *Noh W. F., Woodward P.* SLIC (simple line interface calculations) // *Lecture Notes in Physics.* — 1976. — Vol. 59. — P. 330—340.
27. *Hirt C. W., Nichols B. D.* Volume of fluid (VOF). Method for the dynamics of free boundaries // *J. of Computational Physics.* — 1981. — № 39. — P. 201—226.
28. *Rudman M.* Volume tracking methods for interfacial flow calculations // *Int. J. Numer. Methods Fluids.* — 1997. — Vol. 24. — P. 671.
29. *Rider W. J., Kothe D. B.* Reconstructing volume tracking // *J. Comput. Phys.* — 1998. — Vol. 141. — P. 112. № 57
30. *Youngs D. L., Morton K. W., Baines M. J.* Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion // *Numerical methods for fluid dynamics.* — New York: Academic press, 1982. — P. 273—285.
31. *Unverdi S. O., Tryggvason G.* A front tracking method for viscous, incompressible multi-fluid flow // *J. Comput. Phys.* — 1992. — Vol. 100. — P. 25—37.
32. *Ubbink O., Issa R.* A Method for Capturing Sharp Fluid Interfaces on Arbitrary Meshes // *J. Comput. Phys.* — 1999. — Vol. 153. — P. 26—50.
33. *Harvie D. J. E., Fletcher D. F.* A new volume of fluid advection algorithm: the defined donating region scheme // *Int. J. Num. Methods Fluids.* — 2001. — Vol. 38. — P. 151—172.
34. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Нестационарный метод крупных частиц для решения задач внешней аэродинамики. — М.: ВЦ АН СССР, 1970. — 70 с.
35. *Thompson E.* Use of pseudo-concentrations to follow creeping viscous flows during transient analysis // *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering.* — 1986. — Vol. 6. — P. 749—761.
36. *Батлер Т.* Развитие метода LINC // *Численные методы в механике жидкостей.* — М.: Мир, 1973. — С. 146—155.

37. *Peskin C.* The immersed boundary method // *Acta numerica.* — 2002. — Vol. 11. — P. 1—39.
38. *Афанасьев К. Е., Ильясов А. Е., Макаrchук Р. С., Попов А. Ю.* Численное моделирование течений жидкости со свободными границами методами SPH и MPS // *Вычислит. технологии.* — 2006. — Т. 11, спец. вып. — С. 26—44.
39. *Monaghan J. J.* Smoothed Particle Hydrodynamics // *Reports on progress in physics.* — 2005. — № 68. — P. 1703—1759.
40. *Федоренко Р. П.* Метод численного решения пространственных задач качения с проскальзыванием и сцеплением. — М., 1979. — (Препринт / Ин-т прикладной математики АН СССР; № 158).
41. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational methods for fluid dynamics. — Berlin: Springer Verl., 2002. — 431 p.
42. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — С. 152.
43. *Koshizuka S., Nobe A., Oka Y.* Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method // *Intern. J. for Numerical Methods in Fluids.* — 1998. — P. 751—769.
44. *Chen Y. S., Kim S. W.* Computation of turbulent flows using an extended k - ϵ turbulence closure model / NASA. — [S. l.], 1987. — (CR-179204).
45. *Минаков А. В., Гаврилов А. А., Дектерев А. А.* Численный алгоритм решения пространственных задач гидродинамики с подвижными твердыми телами и свободной поверхностью // *Сибир. журн. индустр. математики.* — 2008. — № 49 (36). — С. 95—105.
46. *Рху С. М., Чоу У. Л.* Численный расчет турбулентного обтекания профиля с отрывом у задней кромки: Пер. с англ. // *Аэрокосм. техника.* — 1984. — Т. 2, № 7. — С. 33—43.
47. *Leonard B. P.* A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic interpolation // *Comp. methods appl. mech.* — 1979. — Vol. 19. — P. 59—98.
48. *Chen Y. S.* Viscous flow computations using a second-order upwind differencing scheme / USRA/NASA. Marshall Space Flight Center Huntsville. Alabama. — [S. l.], 1988.
49. *Kawamura T., Kuwahara K.* Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness / AIAA. — [S. l.], 1984. — (Paper 84-0340).
50. *Rai M. M., Moin P.* Direct simulations of turbulent flow using finite difference schemes // *J. Comput. Phys.* — 1991. — № 96. — P. 15—53.
51. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета раз-

- рывных решений газовой динамики // Ученые зап. / ЦАГИ. — 1972. — Т. 3, № 6. — С. 68—77.
52. *Guus S., Hester B., Kees V.* ISNaS — incompressible flow solver. — [S. 1.], 1993. — P. 97. — (Mathematical manual Report 93-96).
 53. *Leonard B. P.* The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection // *Comp. Methods Applied Mech. Eng.* — 1991. — Vol. 88. — P. 17—74.
 54. *Darwish M. S.* A Comparison of six high resolution schemes formulated using the NVF methodology // 33 rd Science week, Alleppo, Syria. — [S. 1.], 1993.
 55. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 552 с.
 56. *Марчук Г. И.* Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 263 с.
 57. *Белов И. А., Исаев С. А., Коробков В. А.* Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. — Л.: Судостроение, 1989. — 253 с.
 58. *Martin J. C., Moyce W. J.* An experimental study of the collapse of a liquid column on a rigid horizontal plane // *Phil. Trans. of Royal Soc. London.* — 1952. — Vol. A244. — P. 312—324.
 59. *Amiruddin, Sassa S., Sekiguchi H.* Modeling of sediment gravity flow with progressive solidification // *Annuals of Disas. Prev. Res. Kyoto.* — 2005. — Vol. 48.
 60. *Wemmenhove R.* Numerical simulation of two-phase flow in offshore environments: Proefschrift / Rijksuniversiteit Groningen. — [S. 1.], 2008. — P. 141.
 61. *Kleefsman T.* Water impact loading on offshore structures: A numerical study: Proefschrift / Rijksuniversiteit Groningen. — [S. 1.], 2005.
 62. *Hinatsu M., Tsukada Y., Fukasawa R., Tnanaka Y.* Two-phase flows for joint research // *Proceedings of SRI-TUHH mini workshop on numerical simulation of two-phase flows / National Maritime Research Inst.* — [S. 1.], 2001.
 63. *Neilsen K. B.* Numerical prediction of green water loads on ships: PhD. Thesis / Technical Univ. of Denmark. — [S. 1.], 2003. — P. 172.
 64. *Godderidge B., Tan M., Earl C., Turnock S.* Grid resolution for the simulation of sloshing using CFD fluid-structures interaction research group / School of Engineering Sciences. Univ. of Southampton. — [S. 1.], [S. a.]. — P. 6.
 65. *Waclawczyk T., Koronowicz T.* Comparison of cicsam and hric high-resolution schemes for interface capturing // *J. of Theoretical and Applied Mechanics [Warsaw].* — 2008. — Vol. 46. — P. 325—345.
 66. *Chang L. T.* Multi-scale analysis of fluid and fluid-structure interactions using meshfree and finite element methods: PhD Thesis / Northwestern Univ. — [S. 1.], 2003.

67. *Greenhow M., Mayo S.* Water entry and exit of a horizontal circular cylinders // *Phil. Trans. R. Soc.* 1997. — Vol. 355. — P. 551—563.
68. *Greenhow M., Lin W. M.* Nonlinear free-surface effects: experiments and theory: Report / MIT. Department of Ocean Engineering. — Cambridge, USA, 1983. — (Rep. 83-19).
69. *Xinying Zhu.* Application of the CIP Method to Strongly Nonlinear Wave-Body Interaction Problems: Doctoral thesis for the degree of doktor ingeniør. — Trondheim, 2006.
70. *Takewaki H., Nishiguchi A., Yabe T.* The cubic-interpolated pseudoparticle (CIP) method for solving hyperbolic-type equations // *J. Comput. Phys.* — Vol. 61. — P. 261.
71. *Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И.* Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. — М.: Судостроение, 2005. — 389 с.

Тепломассоперенос в отрывных газокапельных турбулентных потоках

В. И. Терехов, М. А. Пахомов

1. Введение

Течение за обратным плоским уступом или после внезапного расширения трубы является одним из часто встречающихся случаев отрывного потока при обтекании острых кромок тел. Процесс сопровождается значительными изменениями скорости и давления в окрестности отрыва. Течение и теплообмен вниз от сечения отсоединения потока зависит от предыстории и геометрии поверхности в районе точки отрыва. Внезапное расширение потока в трубах или каналах обычно используется в качестве стабилизатора пламени в камерах сгорания, для интенсификации тепломассообменных процессов и во многих других технических устройствах. Наличие рециркуляционного течения в отрывной зоне оказывает значительное влияние на интенсивность процессов переноса импульса, теплоты и массы и определяет структуру турбулентного течения. Знание характеристик течения и теплообмена в отрывных течениях важно как с теоретической, так и с практической точек зрения. Исследованию однофазных отрывных потоков посвящено большое количество работ (отметим соответствующие обзоры в [1—11]).

Течение после внезапного расширения трубы имеет некоторые особенности по сравнению с потоком за обратным плоским уступом. На основании упомянутых работ можно сделать следующие выводы.

Хотя течение за обратным уступом является простейшим случаем отрывного потока, структура течения очень сложная (рис. 1). Пограничный слой в точке отсоединения отрывается на острой кромке, формируя сдвиговый слой. Если пограничный слой был ламинарным, то ламинарно-турбулентный переход (ЛТП) совершается вскоре после отрыва, несмотря на то что число Рейнольдса очень мало по сравнению с обычным ЛТП. На некотором расстоянии от сечения отрыва турбулентный сдвиговый слой присоединяется к поверхности или смешивается со смежным течением жидкости.



Рис. 1. Структура отрывного течения за обратным уступом

Оторвавшийся сдвиговый слой похож на обычный плоский сдвиговый слой, особенно в первой половине области отрывного течения. Однако он имеет значительное отличие — течение на низкоскоростной стороне сильно турбулизовано в противоположность низкотурбулентному потоку в типичном сдвиговом слое. Разделительная линия тока только незначительно искривлена, сдвиговый слой довольно тонкий и не испытывает влияния стенки. Часть жидкости из оторвавшегося сдвигового слоя отклоняется вверх по потоку за счет действия неблагоприятного градиента давления. Для отрывной зоны характерно быстрое уменьшение реинольдсовых нормальных и сдвиговых напряжений. Вниз от точки присоединения реинольдсовы напряжения продолжают быстро уменьшаться. Наблюдается развитие нового пограничного слоя из оторвавшегося сдвигового слоя. Измерения показали, что оторвавшийся сдвиговый слой сохраняет большую часть свойств свободного сдвигового течения на расстоянии более $50H$ от положения отрыва, где H — высота уступа. Это наблюдение подтверждает живучесть крупномасштабных вихревых структур, развивающихся в отрывном сдвиговом слое.

Отрывное течение сильно нестационарно. Крупномасштабные вихревые структуры, имеющие размер минимум высоты уступа, движутся через область присоединения потока. Дополнительно визуализация течения показывает, что длина отрывной области пульсирует и точка присоединения сдвигового слоя смещается вниз или вверх по потоку. Количественные измерения подтверждают этот факт и свидетельствуют, что нестационарная точка присоединения может отклониться от осредненного положения присоединения на расстояние до двух высот уступа.

На расстоянии примерно $(20—25)H$ после отрыва течение приобретает закономерности полностью развитого потока в трубе, хотя окончательная стабилизация наступает значительно ниже по потоку. В плоском канале это происходит на гораздо бóльших расстояниях ($x/H \approx 50$) [1]. Наибольшая продольная скорость обратного течения достигает 20% скорости газа перед сечением отрыва. Величины пульсаций и рейнольдсовых напряжений имеют сложный характер распределения как по длине трубы, так и по ее радиусу с характерным максимумом, расположенным в сдвиговом слое. Максимальные значения интенсивности аксиальных пульсаций составляют $\langle u'^2 \rangle \leq 0,2U_1$, где U_1 — скорость потока перед его отрывом.

Радиальные пульсации меньше аксиальных: $\langle v'^2 \rangle \leq 0,15U_1$. При этом на расстоянии $20H$ от сечения отрыва величины аксиальных пульсаций выше радиальных, это дополнительно подтверждает, что течение в этой области еще не стабилизировано и не изотропно. По данным [22] величина пульсаций скорости в трансверсальном направлении $\langle w'^2 \rangle \approx \langle v'^2 \rangle$, тогда как для отрыва за плоским обратным уступом измеренные значения $\langle w'^2 \rangle$ лежат посередине между величинами $\langle u'^2 \rangle$ и $\langle v'^2 \rangle$.

Интенсивность теплообмена в области присоединения оторвавшегося потока существенно выше, чем при безотрывном течении. Величина максимального коэффициента теплообмена пропорциональна $Re^{2/3}$, где Re — число Рейнольдса. Минимум теплоотдачи находится примерно на расстоянии высоты уступа от точки отрыва потока, что объясняется наличием области вторичной рециркуляции течения, о влиянии которой на теплообмен говорится в ряде работ [8; 10; 15; 21]. Величина средней скорости и интенсивность турбулентных пульсаций в этой области значительно меньше, чем в зоне расположения отрывного пузыря.

Все приведенные факты свидетельствуют о сложности моделирования процессов переноса импульса и теплоты в отрывных осесимметричных однофазных течениях. При этом за последние сорок лет такие течения стали объектом многочисленных исследований, например [12—25].

В различных технологических приложениях достаточно часто используются двухфазные течения с отрывом. Помимо указанных выше параметров на процессы переноса большое влияние может оказать дисперсная фаза. Ее воздействие возрастает с ростом диаметра частиц и их концентрации. Детальная информация о структуре турбулентного потока, скоростях, температуре фаз и распределении частиц по сечению трубы имеет большое значение при оптимизации процессов испарения и (или) горения. Имеющиеся экспериментальные и расчетные [26—51] данные по двухфазным

отрывным потокам с твердыми частицами при отсутствии/наличии теплообмена между фазами позволяют всесторонне опробовать разрабатываемые математические модели для более сложного двухфазного отрывного потока с испаряющимися каплями. В исследованиях [26—51] показано, что малоинерционные частицы вовлекаются в циркуляционное движение, тогда как крупные частицы, проходя через область сдвигового течения, не попадают в отрывную зону. Изучению тепломассопереноса в газокапельных отрывных течениях посвящено значительно меньше работ [48—51]. Использование в качестве дисперсной фазы испаряющихся капель жидкости может привести к значительной интенсификации теплообмена. Важным направлением в использовании двухфазных отрывных потоков является стабилизация горения испаряющихся частиц топлива с помощью создания рециркуляционных зон.

Экспериментальному и численному исследованию течения с твердыми частицами за внезапным расширением трубы посвящены работы [32—35; 41], рассматривающие случай течения с относительно большим объемным содержанием дисперсной фазы ($\Phi \leq 5\%$). Перенос дисперсной фазы моделировался в рамках лагранжева подхода с учетом межчастичных столкновений. В экспериментальной части этих исследований были проведены трехмерные измерения с применением фазового доплеровского анемометра (PDA). Показано сокращение длины зоны присоединения в двухфазном потоке по сравнению с однофазным, причем наименьшая длина отрывной зоны приходится на величину концентрации частиц $\Phi \sim 1\%$. Межчастичные столкновения снижают уровень турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) частиц в сдвиговом слое, где величина ТКЭ газовой фазы принимает максимальное значение.

Численное исследование двухфазного потока после внезапного расширения и за обратным уступом с применением эйлерова подхода выполнено в [37—39]. Математическая модель основана на использовании кинетического уравнения функции плотности распределения вероятности координат, скорости и температуры частиц. Показана возможность моделирования таких потоков с применением эйлерова метода. Расчет турбулентных характеристик газа проводился в рамках стандартной k - ε -модели [52], модифицированной на случай присутствия дисперсной фазы. Выполнено сопоставление с расчетными данными для случая внезапного осесимметричного расширения [28] и с результатами измерений течения за обратным плоским уступом [29]. Показано, что с ростом размера частиц происходит изменение профиля скорости дисперсной фазы, который становится более равномерным, снижается степень вовлечения частиц в рециркуляционное движение газа. Наличие межфазного осредненного и пульсационного взаимодействия оказывает сильное влияние на процессы смешения газа и дисперсных частиц.

Расчетные исследования течения воздуха с твердыми частицами за плоским обратным уступом и смеси дизельного топлива и частиц стекла после внезапного расширения трубы с применением улучшенной стохастической модели раздельного течения фаз (УСРТФ) выполнено в [43; 44]. Турбулентность газа описывалась в рамках k - ε -модели [52]. Осредненная скорость частиц и их среднеквадратические пульсации рассчитывались вдоль траектории дисперсной фазы. Основное отличие УСРТФ от широко используемой стохастической модели раздельного течения фаз (РТФ) заключается в использовании значительно меньшего количества расчетных частиц (порядка 10^2 — 10^3), а также в том, что взаимодействие между фазами представляет собой непрерывный процесс. В РТФ используется порядка 10^4 частиц для получения статистически достоверной картины течения дисперсной фазы. Выполнено сопоставление с экспериментальными данными по распределению аксиальных и радиальных скоростей фаз, ТКЭ фаз и концентрации частиц по сечению канала. Получено хорошее согласие между данными измерений [33; 42] и численных расчетов.

Двухфазное турбулентное течение газа и твердых частиц с применением метода моделирования крупных вихрей (LES) для газовой фазы и лагранжева траекторного метода для частиц исследовано в [46]. В модели не учитывается обратное влияние дисперсной фазы на процессы переноса и турбулентность газа. Численное моделирование течения за обратным уступом проведено для условий работы [42]. Исследована дисперсия частиц в зависимости от числа Стокса $Stk = \tau / \tau_f$, где $\tau = \rho_L d^2 / (18\mu W)$ — время динамической релаксации частиц с учетом отклонения от закона обтекания Стокса; $W = (1 + Re_L^{2/3}) / 6$; $Re_L = |\vec{U} - \vec{U}_L| d / \nu$ — число Рейнольдса частицы; τ_f — временной масштаб турбулентности; ρ_L — плотность жидкости; d — диаметр капели; μ — коэффициент динамической вязкости; \vec{U} — осредненная скорость газа; \vec{U}_L — осредненная скорость капели; ν — коэффициент кинематической вязкости. Показано, что накопление частиц в отрывной зоне происходит при малых числах Стокса (небольшие размеры частиц).

При моделировании двухфазных отрывных потоков в основном используется эйлерово-лагранжево описание. Для газовой фазы применяются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье—Стокса [28; 33—39; 41; 43; 44; 47; 48] или методов LES и DNS (Direct Numerical Simulation) [45; 46]. Для описания турбулентных характеристик газа чаще всего привлекается стандартная k - ε -модель турбулентности [52], возможности которой ограничены даже при расчете однофазных отрывных течений [53—55]. Отметим, что, несмотря на большое количество работ по исследованию динамики двухфазных отрывных течений, к настоящему

времени не разработана математическая модель двухфазного отрывного потока с учетом испарения капель.

В [49] измерялись профили скорости и турбулентной кинетической энергии фаз, поток массы дисперсной фазы и интенсивность теплообмена от стенки при граничном условии $T_w = \text{const}$ к газокапельному потоку за обратным уступом. Измерения были выполнены с применением PDA для двух высот уступа — 10 и 20 мм. Диаметр капель d_1 составлял 60 мкм, а их начальная массовая концентрация M_{L1} — 4,1%. Температура стенки варьировалась в диапазоне от 35°C до 130°C. Показано значительное увеличение теплообмена по сравнению с однофазным отрывным течением (более чем в два раза). Особенно это влияние сказывается за точкой присоединения газокапельного потока. Уменьшение температуры стенки приводит к интенсификации теплопереноса.

Измерения скорости дисперсной фазы, ее турбулентности, среднего заутеровского диаметра капель и корреляции между скоростью и размером частиц проводились в работе [50]. Ее авторы исследовали вдув газокапельного потока через сопло диаметром $2R_1 = 64$ мм в цилиндрический канал диаметром $2R_2 = 200$ мм. Скорость потока составляла 18 м/с. Отметим, что исследование отрывного течения не являлось главным объектом изучения в работе [50]. Основное внимание было уделено разработке методики измерения с помощью двухмерного PDA, изучению динамики дисперсной фазы при распыливании газокапельной струи и получению корреляций скорости и размера капель. Измерения параметров газовой фазы в работе не проводились.

Измерения интенсификации теплообмена при добавлении в поток малого количества диспергированной влаги ($M_{L1} < 0,015\%$ и начальный размер $d_1 = 10$ мкм) за обратным уступом выполнено в [51]. Измерения проводились инфракрасной камерой. Особенностью данной работы является то, что двухфазный поток не подавался через канал до расширения, как это было реализовано во всех других работах, а вдувался через небольшую щель, расположенную около верхней кромки уступа (рис. 2). Исследования осуществлялись в вертикальном опускающем режиме течения (высота уступа $H = 10$ мм) и в горизонтальном плоском канале ($H = 40$ мм). Измерения выполнялись для граничного условия $q_w = \text{const}$ в интервале $q_w = 90 — 500$ Вт/м². Число Рейнольдса составляло $Re = U_1 H / \nu = (1,2 — 5) \cdot 10^4$.



Рис. 2. Схема отрывного двухфазного течения в [51]

Анализ проведенных работ показал, что эти исследования выполнены в узком диапазоне изменения основных термогазодинамических параметров, таких как размер капель и их концентрация. Практически нет данных по теплообмену и структуре газочапельного течения после внезапного расширения трубы.

Целью следующего раздела является проведение численного исследования влияния испарения капель на процессы тепломассопереноса в турбулентном потоке после внезапного расширения трубы.

2. Физико-математическая модель отрывного газочапельного потока

В настоящей работе рассмотрена задача о развитии двухфазного газочапельного отрывного турбулентного потока при наличии теплообмена со стенками канала. Схематическое представление течения приведено на рис. 3. Длина расчетной области составляла $30H$. Для описания динамики течения и тепломассопереноса в газовой и дисперсной фазах использовался эйлеров подход, основанный на решении кинетического уравнения функции плотности вероятности распределения координат, скоростей и температур частиц в турбулентном потоке [37; 56]. Объемная концентрация дисперсной фазы мала ($\Phi_1 = M_{L1}\rho / \rho_L < 10^{-4}$), частицы полагались достаточно мелкими ($d_1 < 100$ мкм), поэтому по данным [37] можно пренебречь эффектами их столкновений друг с другом. Здесь M_{L1} — массовая концентрация капель, ρ и ρ_L — плотность газа и капель.

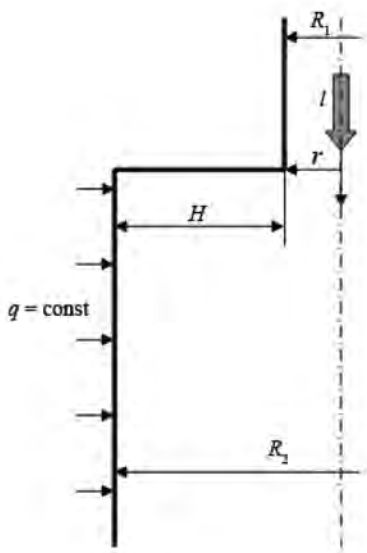


Рис. 3. Схема течения газокапельного потока после внезапного расширения трубы: 1 — газокапельный поток, q_w — подводимый тепловой поток, r — радиальная координата, x — осевая координата

Значение турбулентных чисел Прандтля и Шмидта в работе принималось равным $Pr_T = Sc_T = 0,85$ [37]. Дополнительно было использовано соотношение для расчета турбулентного числа Прандтля из [56]. Отличия результатов расчетов числа Нуссельта для однофазного течения при использовании $Pr_T = 0,85$ от зависимости, полученной в работе [56], оказались незначительными (не более 3%).

Система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса для описания динамики течения и тепломассопереноса стационарного осесимметричного течения имеет вид [48]

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{6J\Phi}{d},$$

$$\rho \frac{\partial (U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial (P + 2k/3)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] -$$

$$-(U_i - U_{Li}) \frac{\Phi}{d} \left[\frac{1}{8} C_D \rho |\vec{U} - \vec{U}_L| + J \right] + \rho_L g_u \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_j},$$

$$\rho \frac{\partial(U_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{6\Phi}{C_p d} [\alpha(T - T_L) + JL] +$$

$$+ \frac{\rho D_T}{C_p} (C_{pV} - C_{pA}) \left(\frac{\partial K_V}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{C_{pL} \rho_L \tau g_{st}}{C_p} \langle u_j t \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial(U_j K_V)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_T}{Sc_T} \right) \frac{\partial K_V}{\partial x_j} + \frac{6J\Phi}{d},$$

$$\rho = P / (\bar{R}T).$$

Здесь U_i — скорость газа; C_D — коэффициент сопротивления испаряющейся капли, записанный с учетом отклонения от стоксова закона обтекания; C_p — теплоемкость; D — коэффициент диффузии; d — диаметр капли; g_u, g_{st} — коэффициенты вовлечения дисперсной фазы в флуктуационное движение газовой фазы, имеющие вид [37]; J — массовый поток пара с поверхности испаряющейся капли; α — коэффициент теплоотдачи испаряющейся капли; L — удельная теплота парообразования; K_V — массовая концентрация пара в бинарной парогазовой смеси; P — давление; k — кинетическая турбулентная энергия; ρ — плотность газа; \bar{R} — удельная газовая постоянная; T — температура; U_i — компоненты осредненной скорости газовой фазы; x_i — координаты; Pr — число Прандтля; Sc — число Шмидта; Φ — объемная концентрация дисперсной фазы; μ — динамическая вязкость газа; τ — время динамической релаксации частицы с учетом отклонения от закона обтекания Стокса. Индексы: A — воздух; T — турбулентный параметр; V — водяной пар.

Уравнения неразрывности, импульса, энергии и диффузии содержат стоковые (источниковые) члены, моделирующие влияние дисперсной фазы на процессы переноса в газе в осредненном движении.

Двухпараметрическая модель турбулентности. Отметим, что возможности линейных LRN-моделей ограничены даже при расчете однофазных отрывных течений [53—55]. Модифицированные на случай присутствия дисперсной фазы уравнения модели k - $\tilde{\epsilon}$ -модели [57] имеют вид

$$\rho \frac{\partial(U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{k}{\epsilon} \frac{\epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho \Pi - \rho \epsilon + S_k,$$

$$\rho \frac{\partial(U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\rho \varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} f_1 \Pi - C_{\varepsilon 2} \varepsilon f_2) + S_\varepsilon, \quad (2)$$

где σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ — постоянные; ε — скорость диссипации турбулентной энергии; Π — порождение турбулентной энергии; S_k и S_ε — источниковые члены, обусловленные присутствием капель.

Выбор модели [57] объясняется тем, что в [47] были выполнены тестовые расчеты по сравнению возможностей нескольких k - ε -моделей турбулентности [52; 57; 58] для расчетов динамики течения, положения точки присоединения и теплообмена отрывного однофазного течения за внезапным расширением трубы. Наиболее близкое согласие с результатами измерений дает модель [57].

Дисперсная фаза. Система осредненных уравнений для описания процессов переноса в дисперсной среде имеет вид [48]

$$\frac{\partial U_{Lj}}{\partial x_j} = -\frac{6J\Phi}{d},$$

$$\rho_L \frac{\partial(\Phi U_{Lj} U_{Li})}{\partial x_j} + \rho_L \frac{\partial(\Phi \langle u_{Li} u_{Lj} \rangle)}{\partial x_j} = \Phi (U_i - U_{Li}) \frac{\rho_L}{\tau} + \Phi \rho_L g - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(D_{Lij} \Phi)}{\partial x_j}, \quad (3)$$

$$\rho_L \frac{\partial(\Phi U_j T_{Li})}{\partial x_j} + \rho_L \frac{\partial(\Phi \langle \theta u_{Lj} \rangle)}{\partial x_j} = \Phi (T_i - T_{Li}) \frac{\rho_L}{\tau_\theta} - \frac{\rho_L}{\tau_\theta} \frac{\partial(D_{Lij}^\theta \Phi)}{\partial x_j}.$$

Здесь $D_{Lij} = \tau (\langle u_{Li} u_{Lj} \rangle + g_u \langle u_i u_j \rangle)$, $D_{Lij}^\theta = \tau_\theta \langle u_{Lj} t_L \rangle + \tau g_u^\theta \langle u_j t \rangle$ — тензор турбулентной диффузии и турбулентного переноса тепла частиц [38].

Соотношения для расчета рейнольдсовых напряжений, среднеквадратичных пульсаций, температуры и турбулентного теплового потока дисперсной фазы. В уравнении (3) были использованы дифференциальные уравнения, разработанные с использованием подхода [38; 56]:

$$\underbrace{U_{Lk} \frac{\partial \langle u_{Li} u_{Lj} \rangle}{\partial x_k}}_I + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\Phi \langle u_{Li} u_{Lj} u_{Lk} \rangle) \right\}}_II + \underbrace{\langle u_{Li} u_{Lk} \rangle \frac{\partial U_{Lj}}{\partial x_k} + \langle u_{Lj} u_{Lk} \rangle \frac{\partial U_{Li}}{\partial x_k}}_III = \underbrace{\frac{2}{\tau} (f_u \langle u_i u_j \rangle - \langle u_{Li} u_{Lj} \rangle)}_IV, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{U_{Lk} \frac{\partial \langle \theta_L^2 \rangle}{\partial x_k}}_I + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Phi \langle u_{Lk} \theta_L^2 \rangle \right) \right\}}_{II} + \underbrace{2 \langle u_{Lk} \theta_L \rangle \frac{\partial T_L}{\partial x_k}}_{III} = \underbrace{\frac{2}{\tau_\Theta} \left(f_\Theta \langle t^2 \rangle - \langle \theta_L^2 \rangle \right)}_{IV}, \\
 & \underbrace{U_{Lk} \frac{\partial \langle u_{Lj} \theta_L \rangle}{\partial x_k}}_I + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Phi \langle u_{Li} u_{Lk} \theta_L \rangle \right) \right\}}_{II} + \underbrace{\langle u_{Li} u_{Lk} \rangle \frac{\partial T_L}{\partial x_k} + \langle u_{Lk} \theta_L \rangle \frac{\partial U_{Li}}{\partial x_k}}_{III} = \\
 & \underbrace{\left(\frac{f_{\Theta u}}{\tau} + \frac{f_{u\Theta}}{\tau_\Theta} \right) \langle u_i t \rangle - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_\Theta} \right) \langle u_{Lj} \theta_L \rangle}_{IV}.
 \end{aligned}$$

В системе уравнений (4) учитывается конвективный перенос пульсаций скорости (I), диффузия (II), генерация пульсаций из градиента осредненного движения дисперсной фазы (III) и межфазное взаимодействие (IV). Для определения диффузионного члена в (4) привлекаются алгебраические уравнения для третьих моментов [38].

Модель для расчета тепломассообмена одиночной капли подробно описана в [59].

Численная реализация и граничные условия. Численное решение получено с использованием метода конечных объемов на разнесенных сетках [60]. Для конвективных слагаемых дифференциальных уравнений применялась процедура QUICK [61]. Для диффузионных потоков были использованы центральные разности. Коррекция поля давления осуществлялась по конечно-объемной согласованной процедуре SIMPLER [62]. Была применена неравномерная расчетная сетка как в аксиальном, так и в радиальном направлениях (сгущение расчетных узлов в районе рециркуляционного участка, сечения отрыва и зоны присоединения). Все расчеты были проведены на сетке, содержащей 350×120 контрольных объемов. Дополнительно были проведены расчеты на сетке, содержащей 400×240 контрольных объемов. Отличие в результатах расчетов числа Нуссельта для двухфазного случая течения и скоростей несущей среды и частиц не превысило 2%.

Во входном сечении заданы равномерные профили параметров фаз. В выходном сечении граничные условия поставлены в виде нулевых производных параметров в аксиальном направлении. На оси трубы задаются условия симметрии для газовой и дисперсной фаз. На стенке ставятся условия непроницаемости и прилипания для газовой фазы. Для скорости и температуры дисперсной фазы и их пульсаций граничные условия на ограничивающей поверхности имеют вид [56].

3. Результаты сопоставительного анализа для однофазного и газодисперсного отрывного потоков

Однофазное течение. На первом этапе было выполнено сопоставление с экспериментальными данными для однофазных турбулентных потоков за внезапным расширением трубы. Результаты сопоставлений приведены на рис. 3—7. Для сопоставительного анализа были использованы экспериментальные данные [15; 20] по распределению осредненных полей аксиальной скорости (см. рис. 4), энергии турбулентности газа (см. рис. 5) и числа Нуссельта (см. рис. 6). Здесь U_0 — скорость потока на оси трубы перед его отрывом, Nu_{fd} — число Нуссельта однофазного развитого потока при прочих идентичных условиях. Расчеты и эксперименты были выполнены при примерно одинаковом числе Рейнольдса, переменной величиной была высота ступеньки. Видно, что с ростом отношения R_1 / R_2 интенсивность теплообмена снижается в районе отрывной области, при этом вдали от сечения отрыва теплообмен увеличивается с ростом R_1 / R_2 . Отметим существование вторичного вихря, расположенного около задней стенки уступа. Косвенно о его наличии говорит локальный минимум в распределении числа Нуссельта на расстоянии $x / H \approx 1$, что согласуется с данными [15; 21].

Дополнительно было проведено сопоставление с данными измерений длины отрывной зоны для случая течения после внезапного расширения трубы [22; 20] и за обратным уступом [42; 63] (табл. 1).

Таблица 1. Сопоставление измеренной и рассчитанной длины рециркуляционной области

Источник	R_2 / R_1	$Re \cdot 10^4$	x_R / H	
			Измерения	Расчет
[22]	1,60	1,56	10,0	10,4
[20]	2,70	8,40	8,3	8,6
[63]	1,25	2,80	6,6	7,0
[42]	1,50	1,80	7,4	7,7

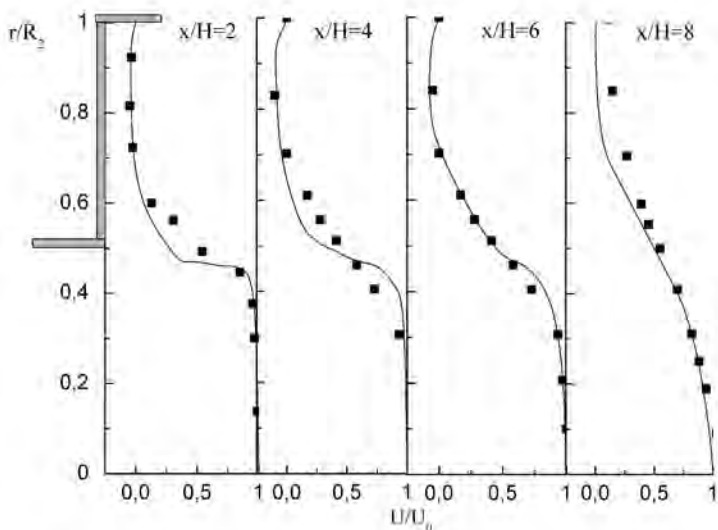


Рис. 4. Профили осредненной скорости воздуха после отрыва потока в трубе: точки — измерения [20], линии — расчеты по данной модели; степень расширения канала $ER = (R_1/R_2)^2 = 3,6$, $H = 22,7$ мм, $Re_H = 8,4 \cdot 10^4$

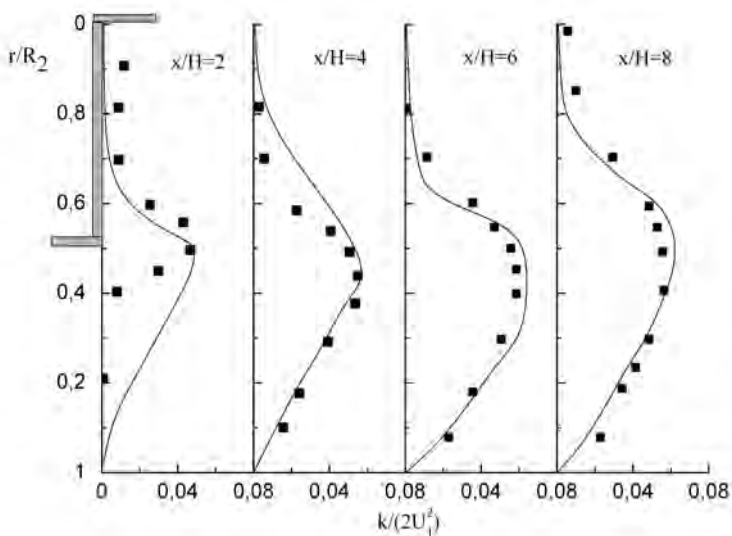


Рис. 5. Профили энергии турбулентности газа по длине трубы. Обозначения соответствуют рис. 4

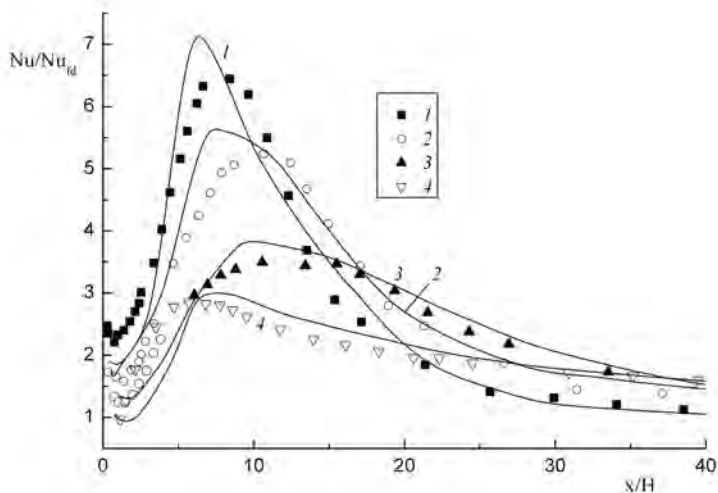


Рис. 6. Влияние высоты уступа на теплообмен при внезапном расширении трубы при примерно постоянном числе Рейнольдса, построенном по высоте уступа и скорости перед отрывом потока: точки — эксперимент [15], линии — расчеты данной работы; 1 — $ER = 0,07, H = 35 \text{ мм}, Re_H = 16700$; 2 — $ER = 0,16, H = 29 \text{ мм}, Re_H = 17700$; 3 — $ER = 0,28, H = 22 \text{ мм}, Re_H = 19400$; 4 — $ER = 0,64, H = 10 \text{ мм}, Re_H = 2 \cdot 10^4$

Двухфазное течение с твердыми частицами. Распределения минимальных значений отрицательной $U_{P, \min}^-$ (возвратного течения) и максимальных положительных $U_{P, \max}^+$ (находящихся в сдвиговом слое) величин значений аксиальной скорости частиц по длине канала представлены на рис. 7. Точки — данные измерений [29], линии — расчеты по данной модели. Эксперименты [29] были выполнены для следующих условий: горизонтальный поток при отсутствии теплообмена ($T_1 \approx 293 \text{ К}$); развитое течение перед отрывом потока; обратный уступ $H = 25 \text{ мм}$; степень расширения плоского канала $ER = h_1/h_2 = 2$, где h_1 и h_2 — высота канала до и после отрыва потока; осредненная скорость несущего потока $U_1 = 18 \text{ м/с}$; $Re_H = U_1 H / \nu = 3 \cdot 10^4$, и $U_1 = 38 \text{ м/с}$; $Re_H = 6,4 \cdot 10^4$; массовая концентрация частиц $M_L \approx 2\%$; их плотность $\rho_L = 1500 \text{ кг/м}^3$, начальный размер $d_1 = 15$ и 30 мкм . Динамика частиц четко прослеживается на данных рис. 7.

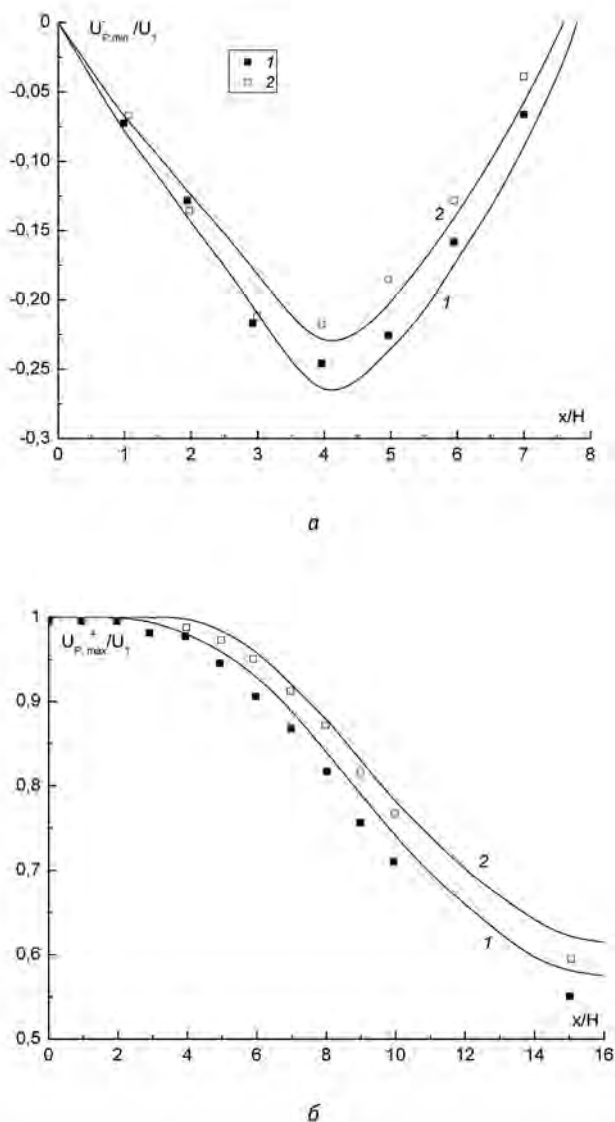


Рис. 7. Распределение наименьших значений отрицательной (а) и максимальных значений положительной (б) скорости частиц по длине трубы: точки — измерения [29], кривые — расчеты настоящей работы; 1 — $d = 15 \mu\text{м}$; 2 — $d = 30 \mu\text{м}$; а — $\text{Re} = 6,4 \cdot 10^4$; б — $\text{Re} = 3 \cdot 10^4$

Минимальное отрицательное значение скорости возвратного потока приходится на координату $x/H \approx 4$ для обоих размеров дисперсной фазы (рис. 7а). Видно, что до расстояния $x/H \approx 3$ влияние размера частиц практически никак не сказывается на величине $U_{p, \max}^+$ (рис. 7б). Частицы большего размера и соответственно большей инерционности имеют меньшую величину скорости $U_{p, \min}^-$. В случае максимальной положительной скорости частиц все происходит наоборот: более тяжелые частицы имеют большую величину скорости движения.

На рис. 8 и 9 представлены результаты сопоставительного анализа распределения аксиальных и радиальных осредненных скоростей фаз, на рис. 10 — турбулентной кинетической энергии жидкости, на рис. 11 — среднеквадратичных пульсаций скоростей частиц стекла и жидкости по сечению трубы вниз от точки внезапного расширения потока.

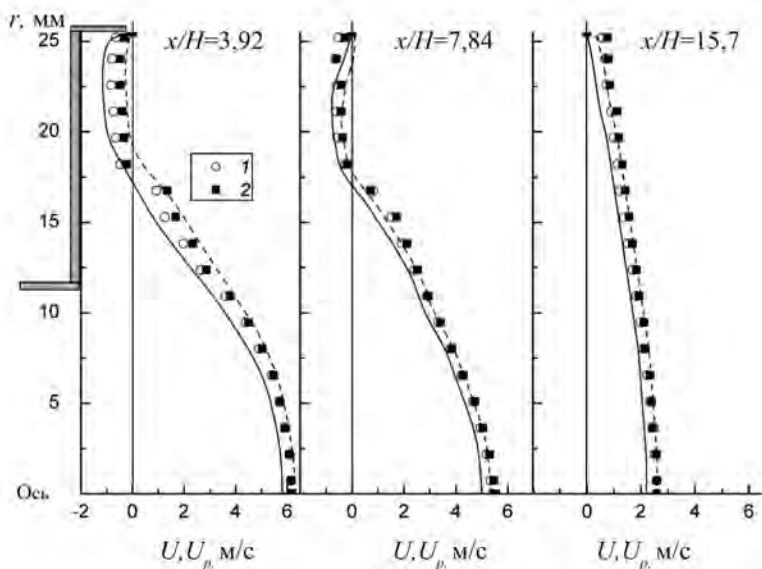


Рис. 8. Аксиальные профили скорости жидкости (непрерывные линии) и дисперсной фазы (пунктир) по длине трубы: точки — эксперимент [33; 41], линии — расчет настоящей работы; 1 — жидкость, 2 — частицы стекла

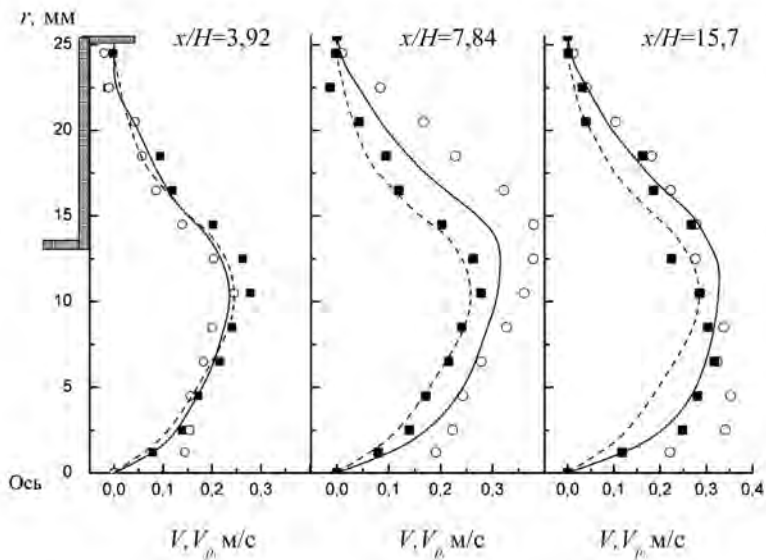


Рис. 9. Радиальные распределения скоростей фаз после внезапного расширения потока. Обозначения соответствуют рис. 8

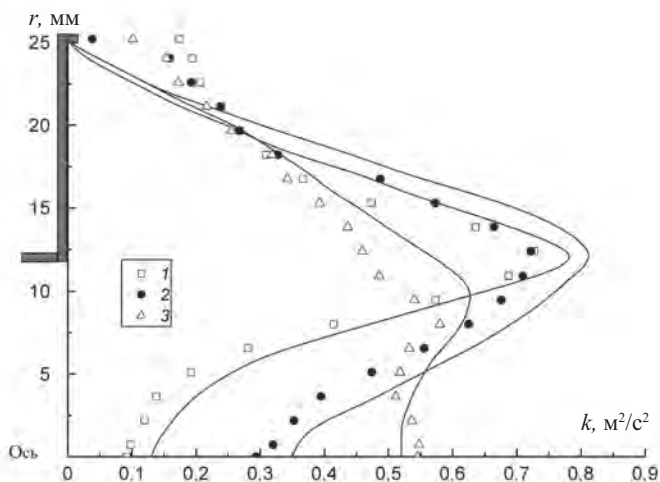


Рис. 10. Профили турбулентной кинетической энергии жидкой фазы в двухфазном потоке: точки — измерения [33; 41], линии — расчет данной работы;
 1 — $x/H = 3,92$; 2 — $x/H = 7,84$; 3 — $x/H = 15,7$

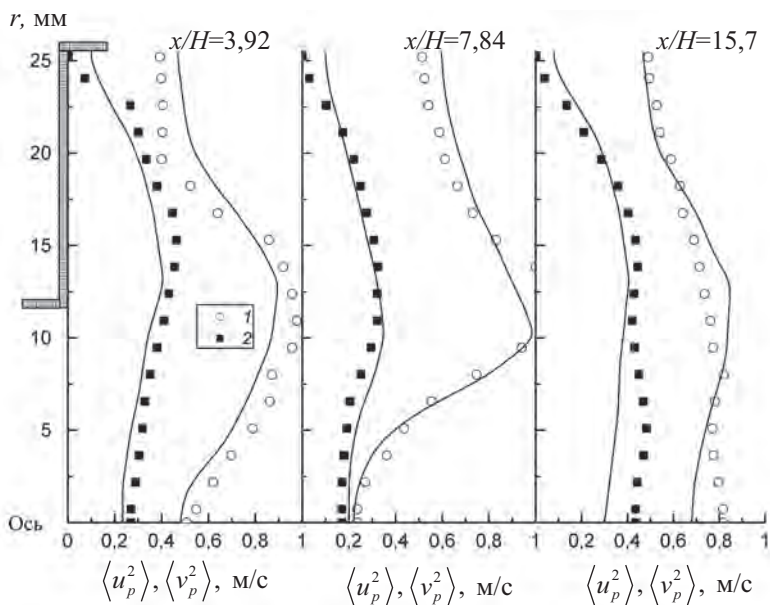


Рис. 11. Сопоставление измеренных и рассчитанных распределений аксиальных и радиальных среднеквадратичных пульсаций дисперсной фазы по сечению трубы за внезапным расширением: 1 — $\langle u_p^2 \rangle$, 2 — $\langle v_p^2 \rangle$

Эксперименты [33; 41] проведены с применением трехмерного PDA. Сопоставительный анализ проведен для следующих исходных условий: нисходящее развитое течение, изотермические условия, внезапное расширение трубы со ступенькой $H = 12,75$ мм, степень расширения канала $ER = (R_1/R_2)^2 = 4$, диаметр трубы после расширения $2R_2 = 51$ мм, длина расчетной области — 1 м, среднемассовая скорость несущего потока перед отрывом $U_1 \approx 1,07$ м/с (дизельное топливо), плотность жидкой фазы $\rho = 830$ кг/м³, $Re_H = 5,6 \cdot 10^4$, массовый расход жидкости — 1,68 кг/с, массовая концентрация частиц стекла $M_L = 9\%$, их плотность $\rho = 2500$ кг/м³ и средний размер $d = 450$ мкм.

Расчеты [33; 41] начинались с расстояния $x = 9$ мм ($x/H = 0,71$) от сечения внезапного расширения трубы, так как в этом сечении были проведены измерения турбулентных характеристик течения дисперсной фазы, которые использовались в качестве входных при расчетах аэродинамических характеристик. Представлены результаты расчетов для трех сечений: 50 мм ($x/H = 3,92$), 100 мм ($x/H = 7,84$) и 200 мм ($x/H = 15,7$) от места

отрыва потока. Первые два сечения находятся внутри рециркуляционной зоны, третье — в зоне релаксации потока.

Анализ данных рис. 8—11 приводит к следующим выводам. Используемая в работе k - ε -модель турбулентности [57] в целом дает завышенные (примерно на 10—15%) значения уровня турбулентной энергии жидкости в двухфазном потоке (см. рис. 10), что согласуется с ранее полученными численными результатами как в однофазном [20; 22], так и в двухфазном [33; 39] потоках. Положение точки максимума кинетической энергии, расположенной в сдвиговом слое, описывается достаточно корректно. В пристенной зоне разница между данными измерений и расчетов возрастает. Причинами этого могут быть как погрешность в измерениях вблизи стенки, так и локальное увеличение уровня турбулентности жидкости за счет столкновений частиц, которые могут накапливаться в пристенной зоне в области рециркуляции потока.

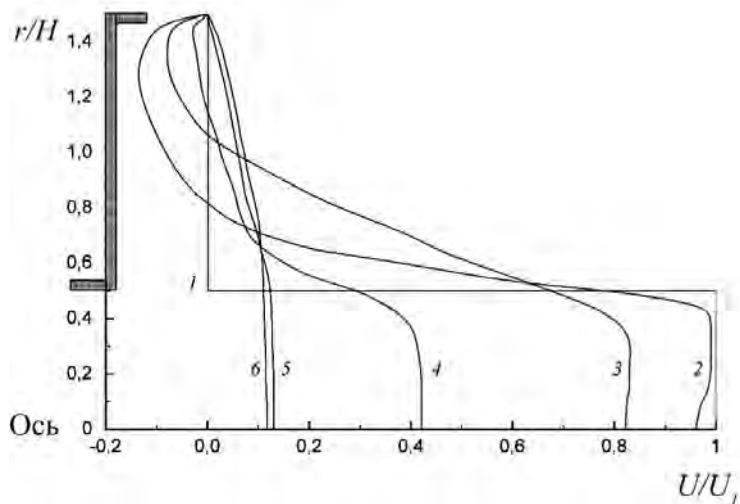
Расчеты распределений аксиальных и радиальных пульсаций скорости частиц стекла в данной работе неплохо согласуются с результатами измерений [33; 39]. Различие между данными экспериментов и нашими расчетами не превышает 15—20% как в сдвиговой зоне, так и в области рециркуляции двухфазного течения. Отметим, что частицы вовлекаются в вихревое движение турбулентной жидкости и присутствуют практически по всему сечению цилиндрического канала.

4. Результаты численных расчетов турбулентного газокапельного отрывного течения после внезапного расширения трубы при наличии фазовых переходов на поверхности дисперсной фазы

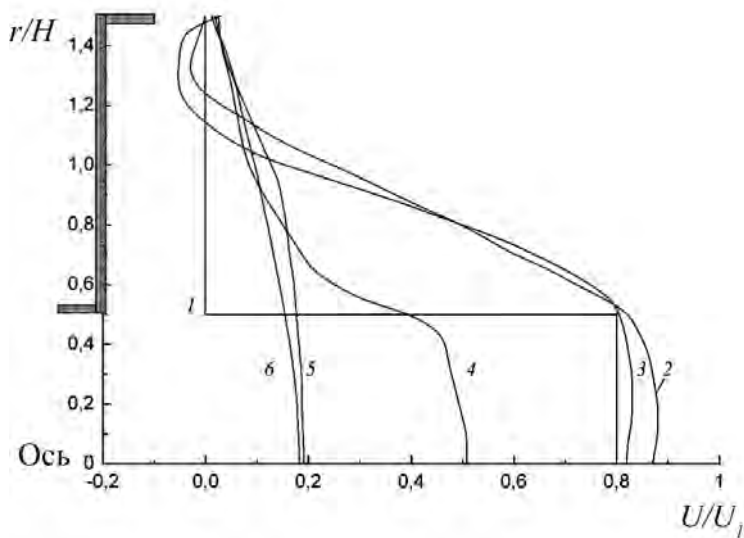
Все расчеты были проведены для монодисперсной газокапельной смеси. Диаметр трубы до расширения $2R_1$ равнялся 20 мм, после расширения — $2R_2 = 60$ мм, степень расширения канала $ER = (R_2/R_1)^2 = 9$, высота ступеньки $H = 20$ мм. Скорость потока газа перед отрывом $U_1 = 10—40$ м/с, число Рейнольдса для газовой фазы $Re_H = HU_1/\nu = (1,3—6)10^4$, начальная скорость дисперсной фазы $U_{L1} = 0,8U_1$. Начальный размер капель d_1 изменялся в диапазоне 1—100 мкм, а их массовая концентрация $M_{L1} = 0—0,1$. Длина расчетного участка после расширения трубы — $30H$. Плотность теплового потока, подводимого к ее поверхности, $q_w = 0,5—2$ кВт/м². Двухфазная газокапельная система подавалась в приосевую зону,

и в результате резкого расширения канала возникла зона рециркуляционного течения.

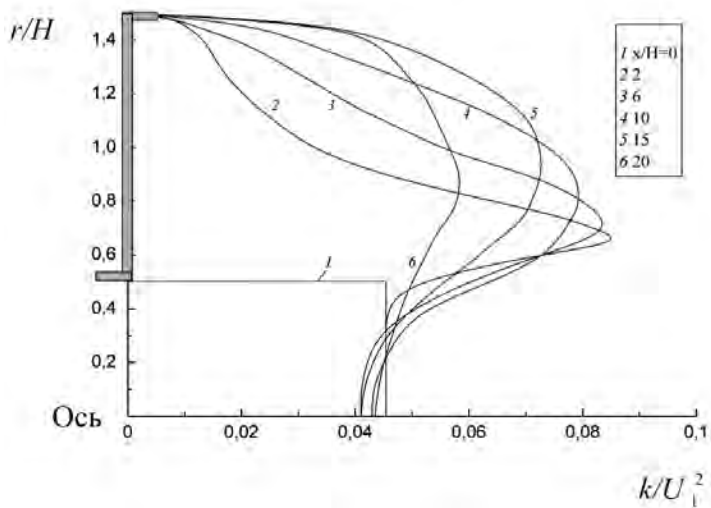
Структура течения. Профили аксиальной скорости газовой и дисперсной фаз представлены на рис. 12а и 12б соответственно.



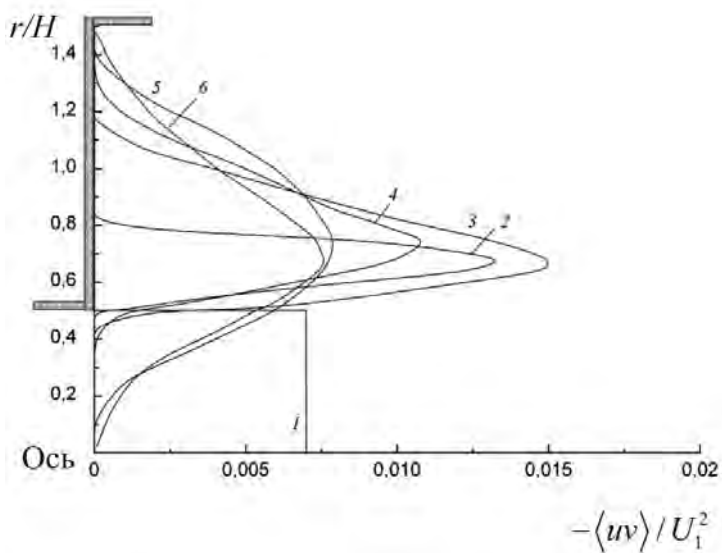
а



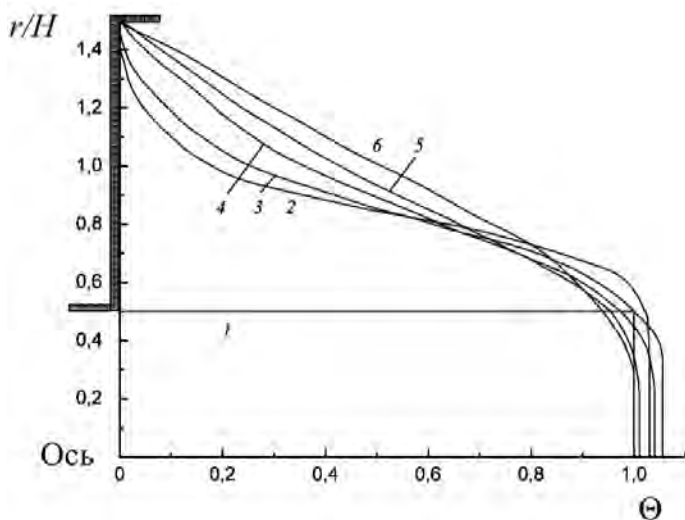
б



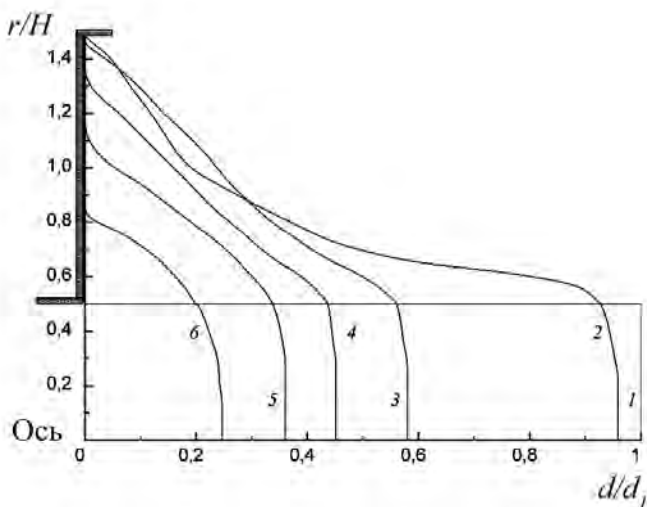
8



2



а



б

Рис. 12. Профили скорости газа (а), капля (б) и кинетической энергии турбулентности газа (в), реинольдсовых напряжений (г), его температуры (д) и размера каплей (е) по длине трубы после ее внезапного расширения:
 $M_{L1} = 0,05$, $d_1 = 50$ мкм, $Stk_m = 0,7$, $U_{L1} = 0,8U_1$; 1 — $x/H = 0$, 2 — $x/H = 2$,
 3 — $x/H = 6$, 4 — $x/H = 10$, 5 — $x/H = 15$, 6 — $x/H = 20$

Во входном сечении перед отрывом потока 1 задавалось равномерное распределение скоростей фаз. Линии 2—4 соответствуют зоне рециркуляции, а линии 5 и 6 — области развития двухфазного течения после присоединения течения. Отметим, что вниз от сечения отрыва наблюдается резкое изменение структуры течения. Для профилей скорости газа (см. рис. 12а) возникали области отрицательных скоростей, соответствующие зоне рециркуляции потока. Скорость дисперсной фазы также имеет отрицательное значение, что говорит о вовлечении капель в рециркуляционное движение (см. рис. 12б). Число Стокса Stk дисперсной фазы в осредненном движении является основным критерием, по которому судят о вовлечении дисперсной фазы в циркуляционное движение газа. При $Stk \ll 1$ частицы хорошо вовлекаются в отрывное движение газовой фазы, а при $Stk \gg 1$ дисперсная фаза не участвует в рециркуляционном движении. Число Стокса определяется как $Stk = \tau / \tau_f$, где τ_f — временной масштаб турбулентности для плоского отрывного течения [40].

$$\tau_f = 5H / U_1. \quad (5)$$

Соотношение (5) получено в работе [40] для плоского потока за обратным уступом, и для осесимметричных течений его применимость требует отдельного исследования. Тем не менее в данной работе эта зависимость будет использоваться в качестве реперной точки.

Величина отрицательной скорости капель меньше соответствующей величины для газа, что можно объяснить инерцией частиц. После точки присоединения (см. рис. 12б, линии 5 и 6) течение начинает восстанавливаться и приобретает характеристики гидродинамически стабилизированного потока в круглой трубе. Стабилизация однофазного течения за внезапным расширением в трубе наступает на расстояниях $x/H > 40$ [20], для плоских отрывных течений это расстояние по данным [1] составляет $x/H \approx 50$.

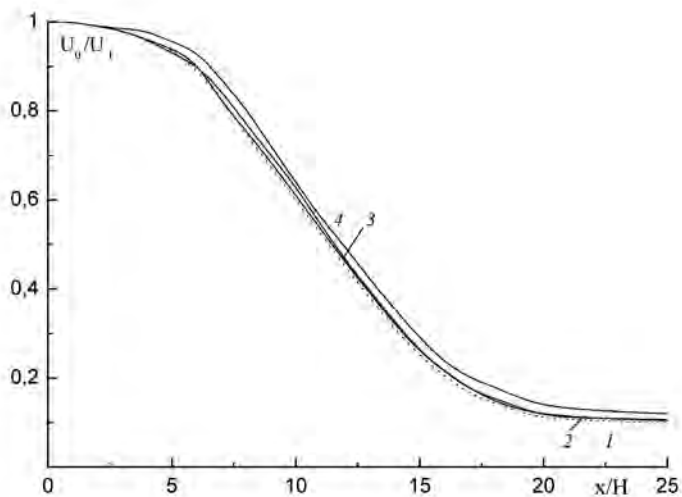
Максимальное значение величины энергии турбулентности газа наблюдается в сдвиговом слое (см. рис. 12в). По мере продвижения вниз по потоку величина максимума энергии турбулентности уменьшается, и ее профиль становится более плоским.

Распределения рейнولدсовых напряжений в газе изображены на рис. 12г. Максимальная величина рейнولدсовых напряжений расположена в сдвиговом слое и немного превосходит величину $\langle uv \rangle / U_1^2 = 0,015$. В целом профили рейнولدсовых напряжений качественно соответствуют таковым для случая однофазного течения.

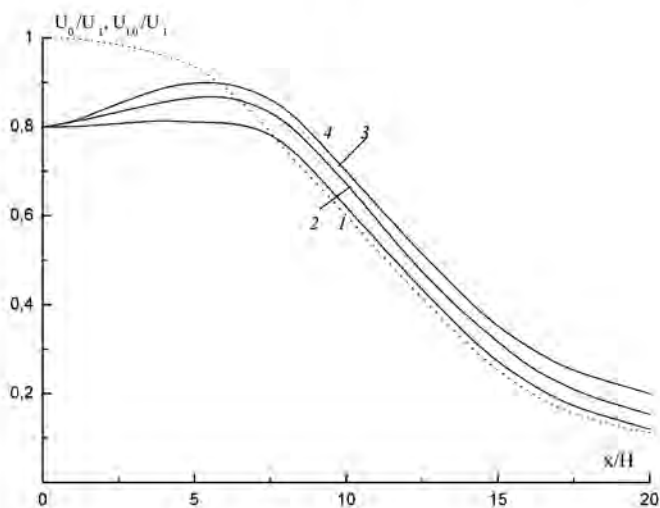
Профили безразмерной температуры газа $\Theta = (T - T_w) / (T_1 - T_w)$ после внезапного расширения трубы показаны на рис. 12д. Здесь T_1 и T_w — соответственно начальная температура газа перед сечением отрыва и температура стенки. На входе задается равномерное распределение температуры (линия 1). При продвижении вниз по потоку профили Θ претерпевают значительное изменение за счет отрыва потока, так же как и распределения других параметров (линии 2—6). Вскоре после внезапного расширения трубы (линии 2, 3) в приосевой зоне $\Theta < 1$, что объясняется локальным захлаживанием воздуха в этой области при адиабатическом испарении капель воды. Подобные расчетные и экспериментальные результаты были получены в работе [64] по исследованию эффективности газокапельных пристенных завес. Интенсивный процесс турбулентного смешения в зоне рециркуляционного течения приводит к тому, что большая часть температурного напора $T_w - T_0$ приходится на слой газа толщиной примерно 5—7% радиуса трубы после расширения. Отсюда следует, что величина теплоотдачи на поверхности трубы будет в основном определяться интенсивностью турбулентного смешения в этом тонком пристенном слое. На рис. 12е представлены результаты расчетов относительного размера капель. Отметим, что капли для случая $Stk < 1$ присутствуют по всему сечению трубы. Диаметр капель уменьшается как по длине трубы, так и по ее сечению за счет испарительных процессов, при этом в приосевой зоне трубы присутствуют значительно более крупные частицы, чем в пристенном слое и в области рециркуляции потока.

Уменьшение осредненной продольной скорости газа и капель на оси трубы показано на рис. 13. Толщина сдвигового слоя, начинающего развиваться за положением отрыва двухфазного потока, увеличивается до точки присоединения потока на расстоянии $x / (2R) \approx 10$. Добавление испаряющихся частиц в диапазоне, исследованном в работе, не оказывает заметного влияния на изменение скорости газовой фазы (см. рис. 13а). Скорость газа в однофазном потоке (линия 1) незначительно меньше соответствующих величин для газокапельного потока. Для случая изменения концентрации капель наблюдается качественно подобная картина. Профили скорости дисперсной фазы по сравнению с распределениями скорости газовой фазы ведут себя несколько иначе. Эти данные представлены на рис. 13б. Начальная скорость частиц составляет 80% скорости газа. Первоначально капли ускоряются за счет действия инерционных сил. При этом более крупные и тяжелые частицы имеют большую скорость.

Радиальные профили массовой концентрации и потока массы дисперсной фазы по длине трубы приведены на рис. 14 и 15, где $F = M_{L\rho_L}U_L$ и $F_1 = M_{L1\rho_{L1}}U_{L1}$ — поток массы капель в текущем и начальном сечениях соответственно.



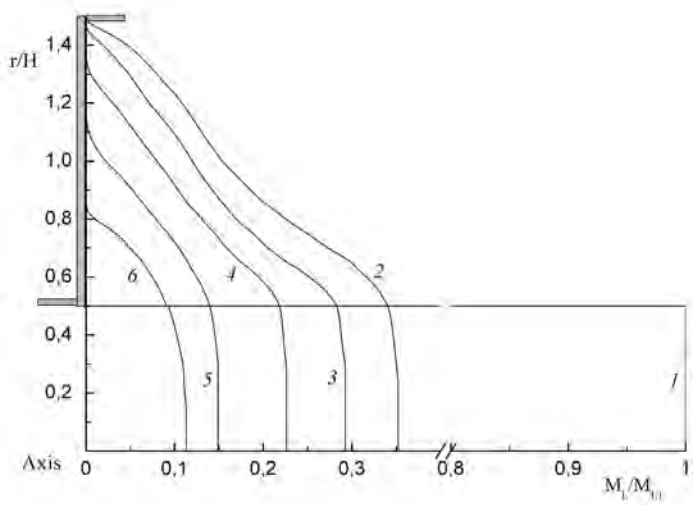
а



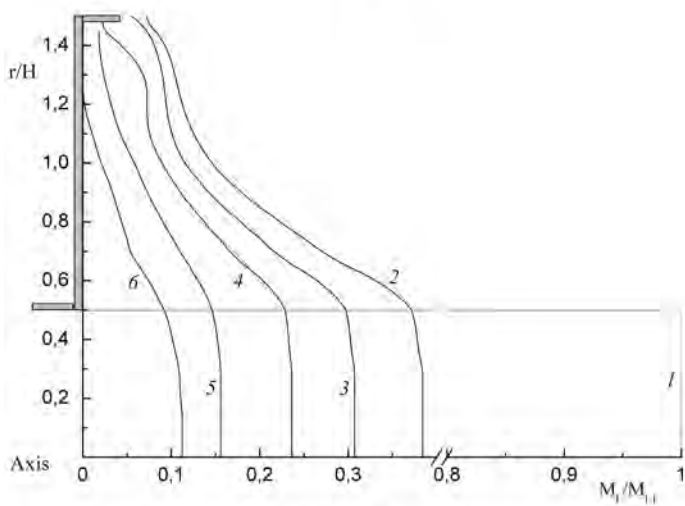
б

Рис. 13. Распределения скорости газа (а) и капель (б) при вариации их начального диаметра по длине трубы:

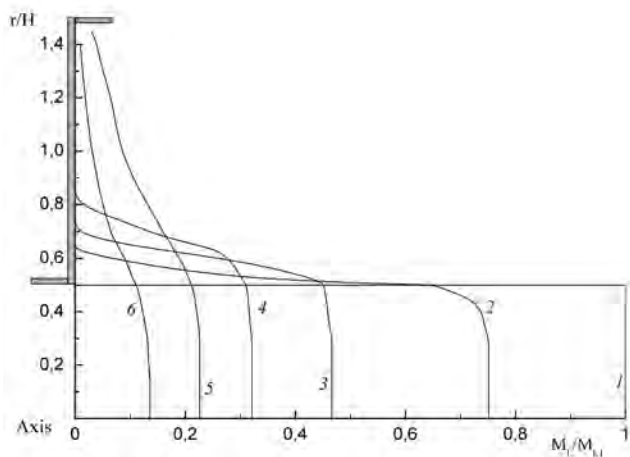
$U_{L1} = 0,8U_1$, $M_{L1} = 0,05$; 1 — $d_1 = 0$; 2 — $d_1 = 10$ мкм, $Stk = 0,03$; 3 — $d_1 = 50$ мкм, $Stk = 0,7$; 4 — $d_1 = 100$ мкм, $Stk = 2,7$



a

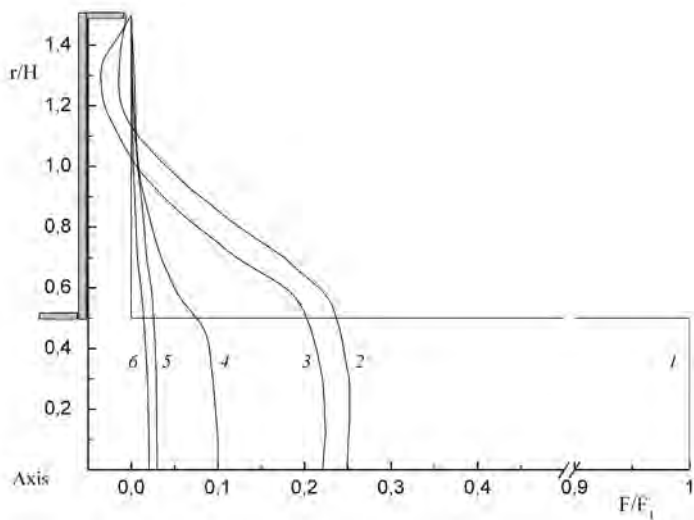


б

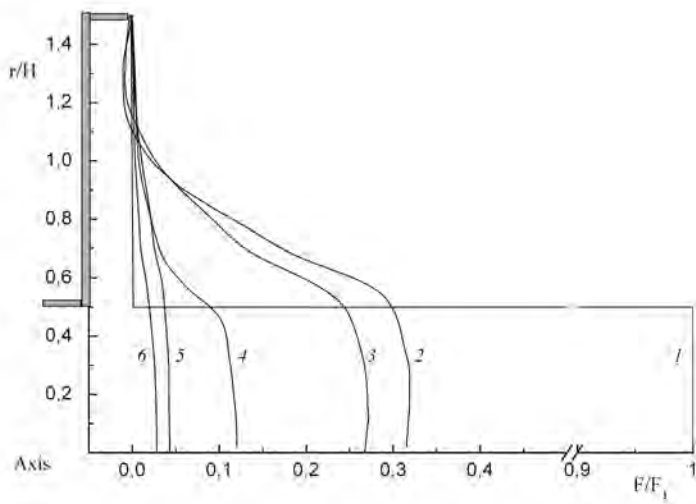


в

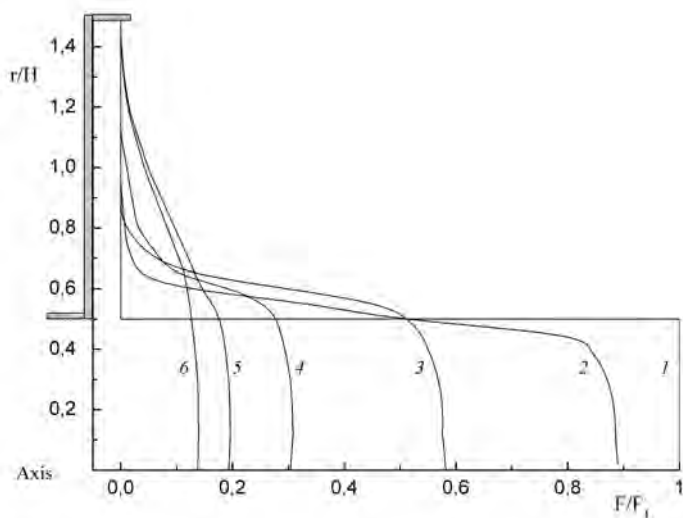
Рис. 14. Профили массовой концентрации дисперсной фазы по сечению трубы: а — 10 мкм, $Stk = 0,03$; б — 50 мкм, $Stk = 0,7$; в — 100 мкм, $Stk = 2,5$



а



а



б

Рис. 15. Распределения потока массы капель по сечению трубы:
а — 10 мкм, $Stk = 0,03$; б — 50 мкм, $Stk = 0,7$; в — 100 мкм, $Stk = 2,5$

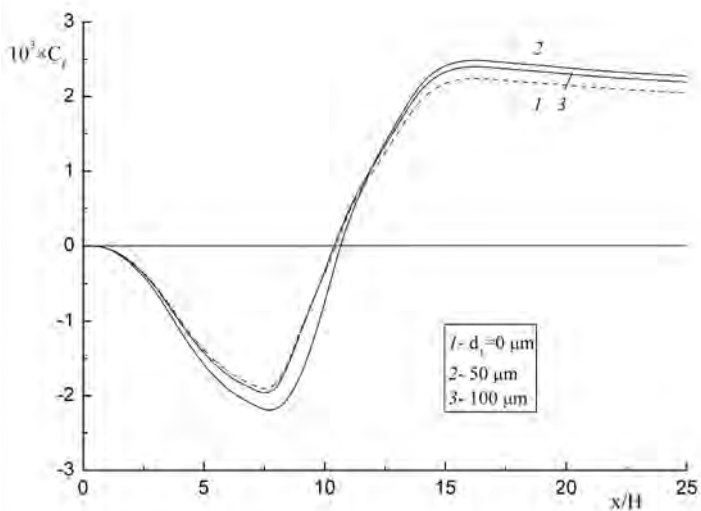
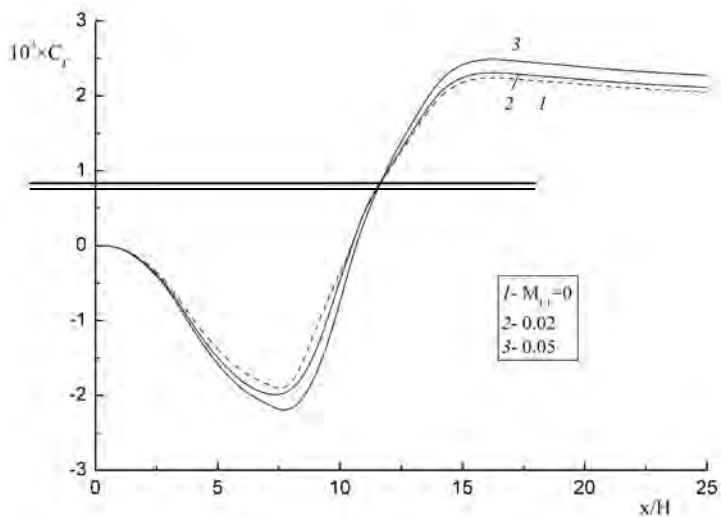


Рис. 16. Изменение коэффициента сопротивления по длине трубы:
 а: $d_1 = 50$ мкм, 1 — $M_{L1} = 0$, 2 — $M_{L1} = 0,02$, 3 — $M_{L1} = 0,05$, 4 — $M_{L1} = 0,1$;
 б: $M_{L1} = 0,05$, 1 — $d_1 = 0$ мкм; 2 — $d_1 = 10$ мкм, $Stk = 0,03$; 3 — $d_1 = 50$ мкм,
 $Stk = 0,7$; 4 — $d_1 = 100$ мкм, $Stk = 2,7$

Небольшие малоинерционные капли при $d_1 = 10$ мкм, $Stk = 0,03$ (см. рис. 14а и 15а, линии 2—б) и $d_1 = 50$ мкм, $Stk = 0,7$ (см. рис. 14б и 15б, линии 2—б) хорошо вовлекаются в отрывное течение и присутствуют по всему поперечному сечению трубы. При этом мелкодисперсные капли, вовлеченные в область циркуляции, имеют отрицательную скорость и, следовательно, отрицательную величину массовой скорости (см. рис. 15а). Пристенная часть трубы ($r/H > 1,25$) оказывается практически свободной от частиц за счет интенсивного испарения. Тяжелые частицы ($d_1 = 100$ мкм, $Stk = 2,5$) не попадают в зону рециркуляционного течения и присутствуют только в сдвиговом слое (см. рис. 14в и 15в). Профили массовой концентрации в целом подобны распределению потока массы капель, но при этом поток массы дисперсной фазы для мелких частиц (см. рис. 15а и 15б) имеет отрицательную величину, обусловленную отрицательной скоростью капель, вовлеченных в отрывное движение газа.

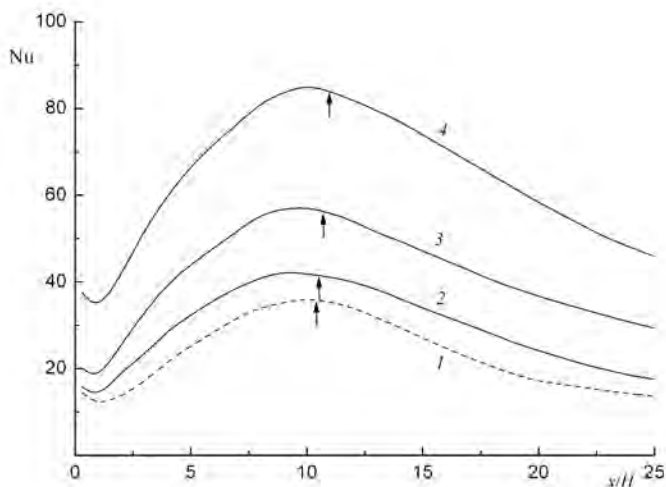
Изменение поверхностного трения $C_f = 2\tau_w / U_1^2$ за точкой отрыва показано на рис. 16 в зависимости от величины массовой концентрации капель (см. рис. 16а) и их начального размера (см. рис. 16б). Видно, что добавление дисперсной фазы не оказывает значительного влияния на величину C_f как в области отрыва потока, так и после точки присоединения. Отметим лишь незначительный рост коэффициента сопротивления в двухфазном потоке. Так же как и для однофазного потока [1], $C_f = 0$ в области точки присоединения потока.

Теплообмен в отрывном потоке. На рис. 17 приведены распределения числа Нуссельта по длине трубы. Число Нуссельта определяется по соотношению

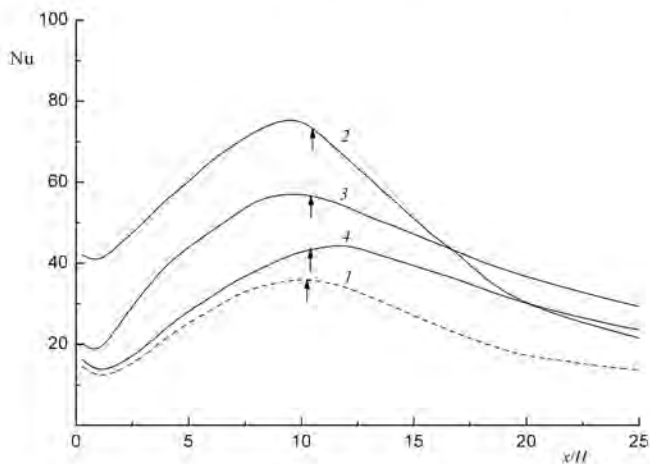
$$Nu = \frac{q_w H}{\lambda(T_w - T_m)},$$

где $T_m = \frac{2}{U_1 R_1^2} \int_0^{R_2} T U r dr$ — среднемассовая температура газа. Стрелки на

рис. 17 соответствуют положению точки присоединения потока. Добавление капель в поток приводит к значительной интенсификации теплообмена (более чем в два раза) по сравнению с однофазным потоком воздуха (1) при прочих равных условиях. Наблюдается увеличение теплообмена как в рециркуляционной зоне, так и в области развития потока по сравнению с однофазным потоком. Это подтверждает данные рис. 14 и 15 о том, что капли вовлекаются в отрывное течение. Одновременно увеличение массовой концентрации капель (см. рис. 17а) и их начального диаметра (см. рис. 17б) оказывает различное воздействие на теплообмен в отрывном потоке.



а



б

Рис. 17. Теплообмен в газокapельном отрывном потоке при вариации массовой концентрации капель (а) и их начального размера (б). Условия проведения расчетов и обозначения соответствуют данным рис. 15

Возрастание массовой концентрации дисперсной фазы приводит к росту теплообмена за счет увеличения скрытой теплоты фазового перехода при испарении большего количества капель. Мелкие капели ($d_1 = 10$ мкм и

Stk = 0,03) испаряются более интенсивно (см. рис. 17б, линия 2) за счет большей площади межфазной поверхности, но на меньшей длине трубы. По мере испарения капель и продвижения вниз по потоку интенсивность теплообмена стремится к соответствующей величине для однофазного стабилизированного течения. Увеличение размера частиц ухудшает вовлечение капель в рециркуляционное движение за счет возрастания числа Стокса. Для капель диаметром 100 мкм (рис. 17б, линия 4) при Stk = 2,7 дисперсная фаза плохо вовлекается в отрывное движение. За счет этого в области отрыва потока теплообмен примерно соответствует его величине для однофазного течения, а за точкой присоединения интенсивность теплообмена возрастает из-за наличия испаряющихся капель. Отметим, что число Нуссельта при испарении крупных капель ($d_1 = 100$ мкм) меньше соответствующего Nu для более мелких капель ($d_1 = 50$ мкм) на всем протяжении расчетной области.

В зоне присоединения коэффициент теплообмена имеет максимальное значение. Координата максимума теплоотдачи примерно соответствует положению точки присоединения потока. В зоне релаксации течения при $x/H > 20$ отметим асимптотическое уменьшение теплообмена, аналогичное однофазному потоку, за счет восстановления пограничных слоев.

Важным параметром при анализе отрывных течений является длина зоны рециркуляционного течения. Результаты расчетов длины зоны отрывного течения двухфазной среды приведены в табл. 2 и 3. Присоединение однофазного потока происходит на расстоянии $x_R = 10,6H$, где x_R — длина зоны циркуляции. Для двухфазного потока длина зоны отрывного течения несколько возрастает по сравнению с однофазным течением при увеличении начальных концентрации и размера капель. Этот вывод не совпадает с результатами работы [41], но качественно согласуется с данными [30; 49]. В [27; 30; 41] показано, что длина отрывной зоны потока с большой концентрацией дисперсной фазы ($\Phi \geq 0,01$) меньше, чем для однофазного потока, но с ростом концентрации частиц длина рециркуляционной зоны возрастает.

Таблица 2. Длина зоны отрывного течения газокапельного потока после внезапного расширения трубы ($d_1 = 50$ мкм)

M_{L1}	0,00	0,01	0,02	0,05	0,07	0,10
x_R/H	10,6	10,6	10,8	10,9	11,0	11,1

Таблица 3. Длина зоны отрывного течения газокапельного потока после внезапного расширения трубы ($M_{L1} = 0,05$)

d_1 , мкм	0	10	30	50	70	100
X_R/H	10,60	10,75	10,80	10,90	10,92	10,95

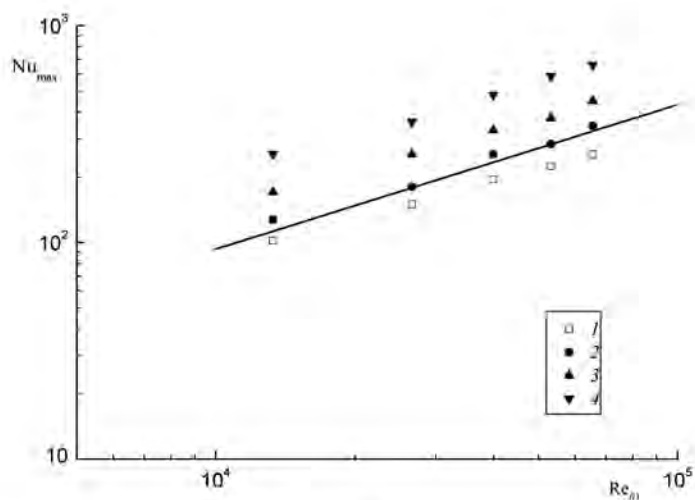
Распределение максимального числа Нуссельта в зависимости от числа Рейнольдса, построенного по высоте уступа и начальной скорости газовой фазы, представлено на рис. 17. Для сопоставления в режиме однофазного течения была использована эмпирическая корреляция [21], хорошо описывающая результаты для течения при осесимметричном расширении в трубе и граничных условиях $T_W = \text{const}$ и $q_W = \text{const}$:

$$\text{Nu}_{\max} = 0,2 \text{Re}_{R1}^{2/3}, \quad (6)$$

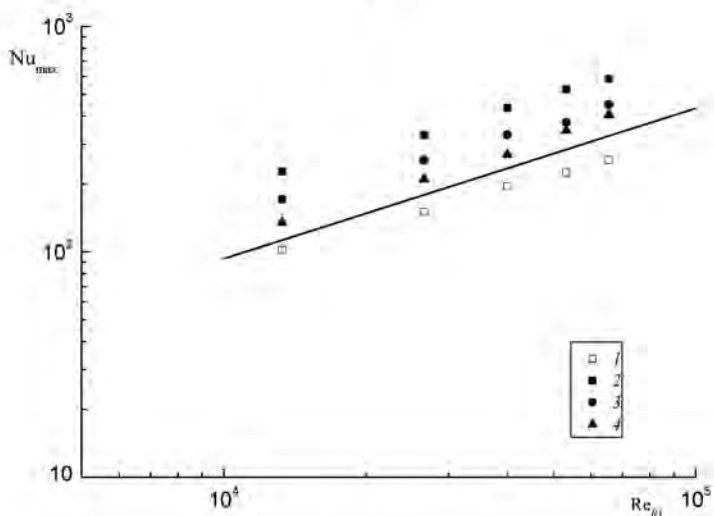
где $\text{Nu}_{\max} = \alpha_{\max} 2R / \lambda$ — максимальное число Нуссельта, построенное по диаметру трубы после расширения потока; $\text{Re}_{R1} = 2R_1 U_1 / \nu$ — число Рейнольдса; α_{\max} — максимальное значение коэффициента теплоотдачи; λ — коэффициент теплопроводности.

При однофазном режиме течения после внезапного расширения результаты расчетов по данной модели (рис. 18, линия 1) удовлетворительно коррелируют с зависимостью (6). С увеличением числа Рейнольдса максимальное число Нуссельта возрастает, что характерно как для однофазного режима течения, так и для газочапельной среды. Для газочапельного режима течения значения коэффициента теплообмена лежат выше, чем соответствующие значения при однофазном течении (см. рис. 18, 2—4) за счет испарения дисперсной фазы. При этом увеличение количества капель (см. рис. 18а) и их начального диаметра (см. рис. 18б) также оказывает различный эффект на интенсивность теплообмена. Рост массовой концентрации капель приводит к увеличению интенсивности теплообмена. Возрастание же размера частиц уменьшает теплоотдачу за счет значительного снижения величины межфазной поверхности контакта, что заметно в области малых чисел Рейнольдса.

На рис. 19 приведены данные по влиянию величины теплового потока на теплообмен в отрывном газочапельном потоке. Пунктиром на рисунке показаны данные по теплообмену в однофазном потоке при $q_W = 1 \text{ кВт/м}^2$. Как показано во многих работах, например [8; 10; 12; 13], изменение величины теплового потока на стенке практически не сказывается на коэффициенте теплообмена. В двухфазном газочапельном потоке с ростом плотности теплового потока на стенке интенсивность теплопереноса падает. При минимальном значении теплового потока число Нуссельта возрастает по сравнению с однофазным потоком более чем в два раза. При этом увеличение теплообмена наблюдается на всей длине расчетного участка. Далее вниз по потоку по мере испарения дисперсной фазы профиль числа Нуссельта будет совпадать с таковым для однофазного воздушного течения.



а



б

Рис. 18. Распределения максимального числа Нуссельта в зависимости от числа Рейнольдса потока: а — влияние концентрации капель, б — влияние начального размера частиц. Линия — расчет по зависимости (6) для однофазного потока [21]. Условия проведения расчетов и обозначения соответствуют данным рис. 16

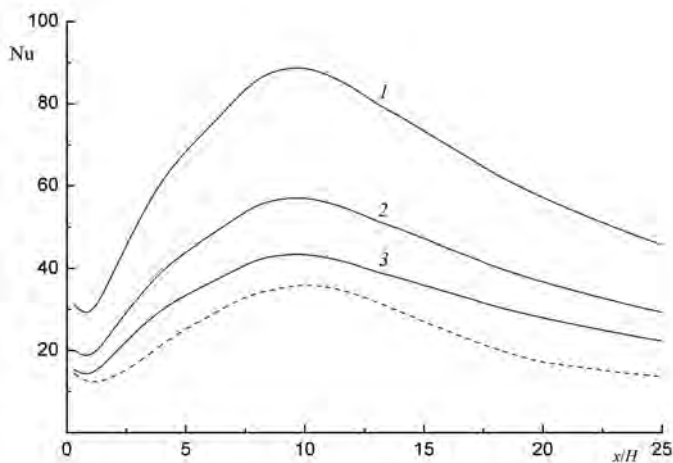


Рис. 19. Влияние плотности теплового потока на стенке на теплообмен:
1 — $q_w = 0,5 \text{ кВт/м}^2$, 2 — $q_w = 1 \text{ кВт/м}^2$, 3 — $q_w = 2 \text{ кВт/м}^2$

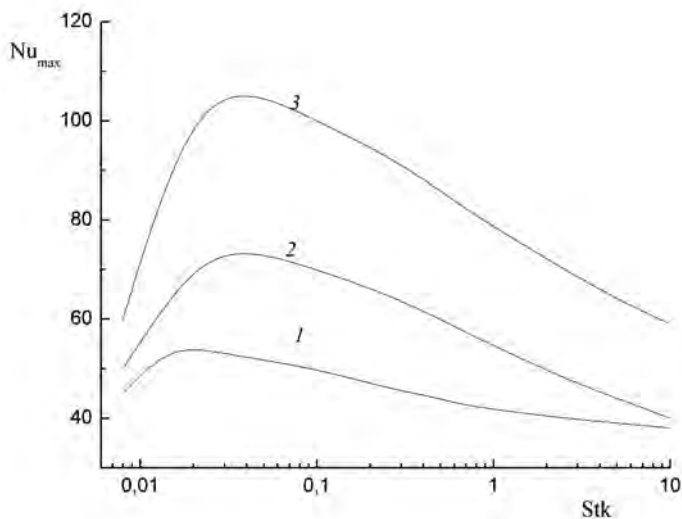


Рис. 20. Влияние числа Стокса в осредненном движении на максимальное число Нуссельта:
1 — $M_{L1} = 0,02$, 2 — $M_{L1} = 0,05$, 3 — $M_{L1} = 0,1$

Влияние числа Стокса в осредненном движении (параметра инерционности) дисперсной фазы на величину максимальной теплоотдачи показано на рис. 20. Число Стокса определялось по соотношению (5). Отметим наличие ярко выраженного максимума в распределении Nu_{\max} во всем исследованном в работе диапазоне изменений массовой концентрации капель. Он расположен в области малых размеров частиц ($Stk = 0,02—0,05$) и обусловлен влиянием различных по природе факторов — более интенсивного испарения капель малого диаметра, уменьшения скорости их инерционного осаждения и ослабления вовлечения крупных частиц в отрывное течение. Возрастание массовой концентрации дисперсной фазы вызывает значительный рост теплоотдачи между двухфазным потоком и стенкой по сравнению с однофазным течением ($Stk = 0$). Отметим, что наибольшее увеличение теплообмена приходится на область малых размеров частиц, которые попадают в зону рециркуляции и при фиксированной величине концентрации капель их число наибольшее.

На рис. 21 приведены результаты расчетов по влиянию числа Рейнольдса течения (его скорости) на теплообмен в отрывном газок капельном потоке. Рост скорости течения приводит к значительному увеличению теплообмена за счет увеличения расхода двухфазного охладителя, что качественно согласуется с измерениями [51].

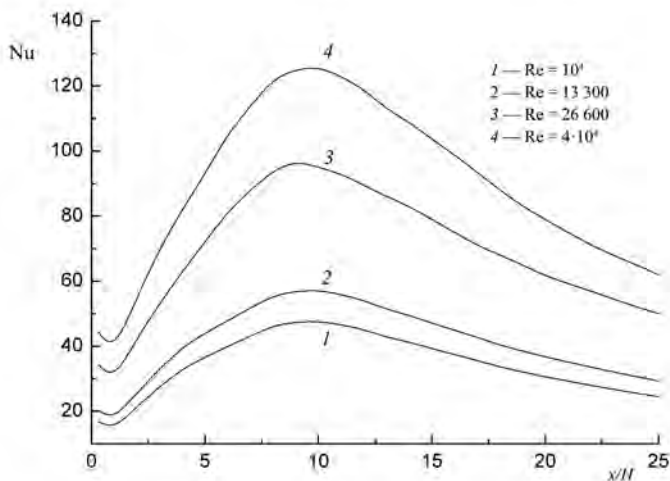


Рис. 21. Изменение интенсивности теплообмена при вариации числа Рейнольдса потока:

1 — $Re = 10\,000$, 2 — $Re = 13\,300$, 3 — $Re = 26\,600$, 4 — $Re = 40\,000$

5. Сопоставление с экспериментальными данными для отрывного газокпельного потока за обратным уступом

В данном разделе представлены данные сопоставительного анализа только для отрывного туманообразного потока за плоским обратным уступом. В литературе отсутствуют данные по тепломассопереносу для газокпельных течений после внезапного расширения трубы. Несмотря на то что все расчеты выполнены только для течения после внезапного расширения трубы, представленные ниже результаты сопоставлений полезны, так как отрывной поток за обратным уступом качественно подобен течению после внезапного расширения трубы.

Сопоставления результатов расчетов и экспериментов [49] по распределению продольной скорости газа и капель по длине трубы приведены на рис. 22. Условия измерений: число Рейнольдса $Re_H = (0,53—1,1)10^4$, высота уступа $H = 10$ и 20 мм, массовая концентрация капель воды $M_{L1} = 0,04$, начальный размер $d_1 = 60$ мкм. Из рис. 22 видно, что распределение скорости газовой фазы имеет вид, качественно подобный случаю однофазного потока [1]. Отметим, что непосредственно за уступом ($x/H = 1,25$) образуется зона, практически свободная от дисперсной фазы, т. е. капли не проникают внутрь рециркуляционного течения. По мере продвижения вниз по потоку ($x/H = 4$) капли присутствуют почти по всему сечению канала. Скорость капель немного выше скорости газа за счет их инерционности.

На рис. 23 представлены данные по распределению числа Стентона, определенного по локальному коэффициенту теплоотдачи и скорости потока перед сечением отрыва, по длине канала уступа высотой $H = 10$ мм (а) и 20 мм (б). Расчеты также выполнены для условий экспериментов [49]. Здесь $St_{0,max}$ — максимальное число Стентона для однофазного режима обтекания плоского уступа при прочих равных условиях.

Анализ данных, приведенных на рис. 23, показывает, что теплообмен при газокпельном течении повышается более чем в 1,5 раза в зоне восстановления потока по сравнению с однофазным течением. Увеличение температуры стенки приводит к снижению интенсивности теплоотдачи, что качественно согласуется с данными измерений и численных расчетов для пристенной газокпельной струи в трубах [64]. В основном интенсификация теплообмена наблюдается за точкой присоединения потока, что подтверждает данные рис. 22 о малом количестве капель, попадающих в зону рециркуляции. Отметим, что для $H = 10$ мм величина $St/St_{0,max}$ выше в области восстановления течения, чем в случае ступеньки высотой 20 мм. В отрывной области теплообмен в случае уступа высотой $H = 20$ мм

($Stk = 1,1$) выше, чем в случае уступа $H = 10$ мм ($Stk = 2,2$), потому что при меньшем числе Стокса капли лучше вовлекаются в рециркуляционное течение. На рис. 23а максимум теплоотдачи находится далеко за точкой присоединения: $(x - x_R) / x_R \approx 2 - 4$. Это можно объяснить тем, что частицы плохо вовлекаются в отрывное течение при больших числах Стокса. При этом на рис. 23б видно, что максимум теплообмена примерно совпадает с точкой присоединения. Добавление мелкодисперсных капель в небольшом количестве обычно подавляет турбулентность газовой фазы, поэтому интенсификация теплообмена при использовании газок капельных течений обусловлена в основном влиянием скрытой теплоты фазового перехода при испарении капель в пристенной зоне.

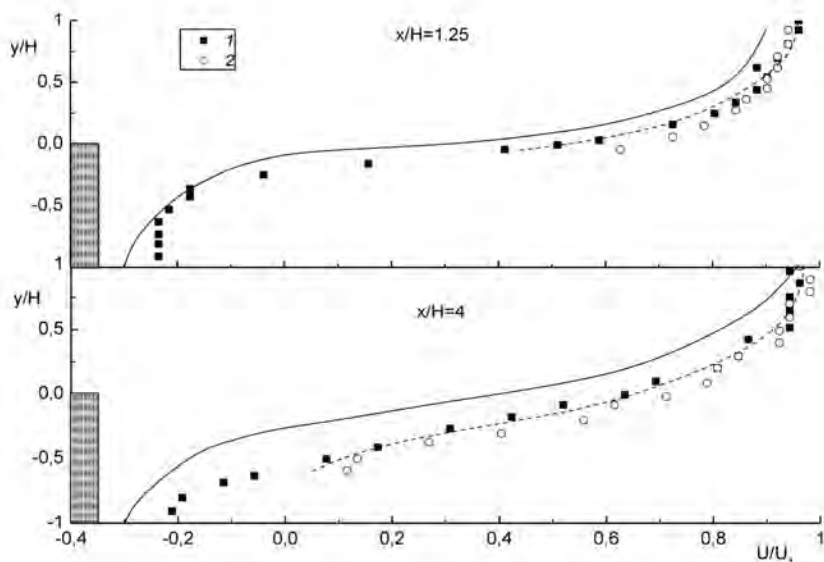
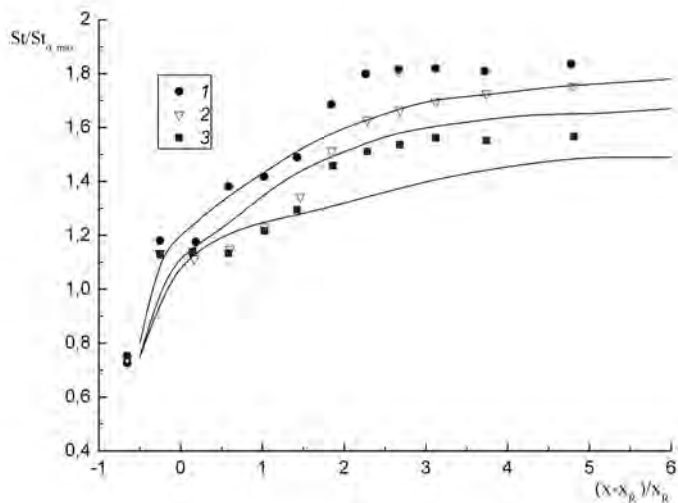
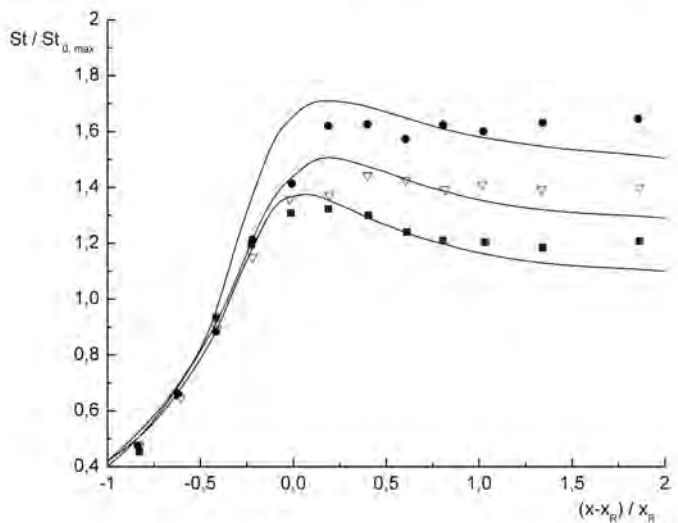


Рис. 22. Распределение скоростей фаз по длине трубы:
 $H = 20$ мм; точки — эксперимент [49]: 1 — газовая фаза, 2 — капли;
кривые — расчеты данной работы: сплошная — газ, пунктир — капли

Сопоставление расчетов с данными экспериментов по теплообмену в туманообразном отрывном потоке с малым содержанием капель [51] показано на рис. 24.

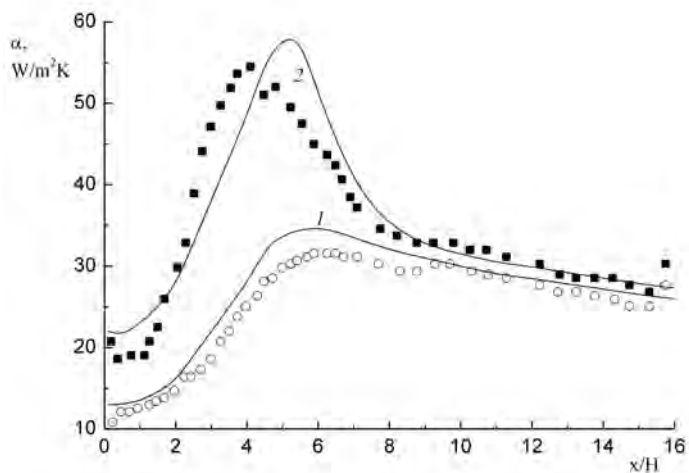


а

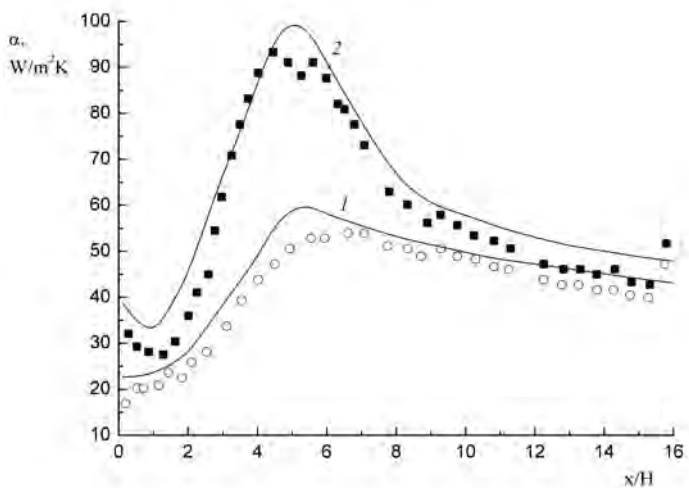


б

Рис. 23. Теплообмен в газокапельном потоке за обратным уступом:
 а — $H = 10$ мм, $Stk = 2,2$; б — $H = 20$ мм, $Stk = 1,1$; точки — измерения [49];
 линии — расчет настоящего исследования; 1 — $T_W = 338$ К, 2 — $T_W = 323$ К,
 3 — $T_W = 308$ К



а



б

Рис. 24. Интенсивность теплообмена в туманообразном турбулентном потоке за обратным уступом при $Re_H = 12\ 500$ (а) и $25\ 000$ (б): точки — эксперимент [51], линии — расчет данной работы; $H = 40$ мм, $ER = 1,67$, $U_1 = 5$ м/с, $q_w = 176$ Вт/м²; 1 — однофазный поток, 2 — $M_{L1} = 0,015\%$

Спрей выдувался из небольшого отверстия, расположенного в верхней части уступа. Максимум в распределении локального коэффициента теплообмена в однофазном потоке приходится на координату $x/H \approx 6$, что примерно соответствует точке присоединения потока. Для туманообразного потока характерно резкое увеличение интенсивности теплообмена как в зоне рециркуляции, так и за ее пределами, что свидетельствует о том, что мелкие капли попадают в область отрыва и интенсифицируют теплоперенос за счет скрытой теплоты фазового перехода. При добавлении туманообразного потока в измерениях наблюдается смещение вверх по течению положения максимума $x/H \approx 4,5$, что не отмечается в наших расчетах. Это характерно как для измерений [51], так и для наших расчетов. Увеличение числа Рейнольдса потока (его скорости) вызывает значительный рост теплообмена (см. рис. 22).

6. Заключение

1. Показана применимость эйлера подхода для описания динамики и тепломассопереноса в газокapельных течениях за обратным уступом и после внезапного расширения трубы при наличии испарения дисперсной фазы.
2. Исследовано влияние изменения основных параметров двухфазного потока: концентрации капель, их начального размера, скорости газокapельного течения и плотности теплового потока на стенке трубы.
3. Добавление испаряющихся капель в турбулентный поток приводит к незначительному сдвигу точки присоединения вниз по течению. Мелкие капль ($d_1 \leq 50$ мкм) хорошо вовлекаются в рециркуляционное течение и присутствуют по всему сечению трубы. Крупные частицы ($d_1 \approx 100$ мкм) проходят через сдвиговый слой и практически не попадают в отрывную область.
4. Наблюдается значительное увеличение интенсивности теплообмена при добавлении испаряющихся капель в отрывное течение (более чем в 1,5 раза по сравнению с однофазным потоком). Теплообмен при добавлении капель резко возрастает за счет использования скрытой теплоты фазовых переходов при испарении капель в пристенной зоне трубы.
5. Для мелкодисперсного потока увеличение теплообмена происходит на всем участке за отрывом двухфазного потока, а для крупных частиц — в основном за точкой присоединения.

Литература

1. *Chang P. K.* Separation of flow. — Oxford: Pergamon Press, 1970.
2. *Bradshaw P., Wong F. Y. F.* The reattachment and relaxation of a turbulent shear layer // *J. Fluid Mech.* — 1972. — Vol. 52. — P. 113—135.
3. *Чжен П.* Управление отрывом потока. — М.: Мир, 1979. — 552 с.
4. *Итон, Джонстон.* Обзор исследований дозвуковых присоединяющихся течений // РТИК. — 1981. — Т. 19, № 10. — С. 7—19.
5. *Ruderich R., Fernholz H.* An experimental investigation of a turbulent shear flow with separation, reverse flow and reattachment // *J. Fluid Mech.* — 1986. — Vol. 163. — P. 283—322.
6. *Castro I. P., Hague A.* The structure of a turbulent shear layer bounding a separation region // *J. Fluid Mech.* — 1987. — Vol. 179. — P. 439—468.
7. *Simpson R. L.* Separation from two-dimensional sharp-edged bluff bodies and reattachment // *Ann. Rev. Fluid Mech.* — 1989. — Vol. 21. — P. 220—233.
8. *Алемасов В. Е., Глебов Г. А., Козлов А. П.* Термоанемометрические методы исследования отрывных течений. — Казань: Изд-во Казан. фил. АН СССР, 1989. — 178 с.
9. *Simpson R. L.* Aspects of turbulent boundary-layer separation // *Progress Aerospace Sci.* — 1996. — Vol. 32. — P. 457—521.
10. *Поляков А. Ф., Комаров П. Л.* Исследование характеристик турбулентности и теплообмена за обратным уступом в щелевом канале. — М., 1996. — 70 с. — (Препринт / ОИВТ РАН; № 2-396).
11. *Ota T.* A Survey of heat transfer in separated and reattached flows // *Appl. Mech. Rev.* — 2000. — Vol. 53. — P. 219—235.
12. *Krall K. M., Sparrow E. M.* Turbulent heat transfer in the separated reattached and redevelopment regions of a circular tube // *Trans. ASME J. Heat Transfer.* — 1961. — Vol. 83. — P. 131—140.
13. *Zemanick P. P., Dougall R. S.* Local heat transfer downstream of an abrupt expansion circular channel expansion // *Trans. ASME J. Heat Transfer.* — 1970. — Vol. 92. — P. 53—60.
14. *Chieng C.C., Lounder B.E.* On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion // *Int. J. Numerical Heat Transfer.* — Part A. — 1980. — Vol. 3. — P. 189—207.
15. *Бон Дж., Хоффман М., Такахаси Р., Лондер Б.* Местный теплообмен за резким расширением круглого канала при постоянной плотности теплового потока на стенке // *Теплопередача.* — 1984. — Т. 106, № 4. — С. 91—100.
16. *Аmano P. C.* Турбулентное течение при резком расширении трубы // *Аэрокосмич. техника.* — 1984. — Т. 2, № 6. — С. 41—47.

17. *Amano R. S.* A study of turbulent mass transport downstream of an abrupt pipe expansion // *Int. J. Numerical Heat Transfer*. — Part A. — 1985. — Vol. 8. — P. 361—371.
18. *Гурей А., Уоткинс К., Аунг В.* Расчет теплообмена в турбулентном потоке при обтекании обратного уступа и в трубе с внезапным расширением // *Теплопередача*. — 1985. — Т. 107, № 1. — С. 65—72.
19. *Driver D. M., Seegmiller H. L.* Features of a reattaching turbulent shear layer in a divergent channel // *AIAA J.* — 1985. — Vol. 25. — P. 163—171.
20. *Даррет Р., Стивенсон В., Томпсон Х.* Измерение с помощью ЛДИС радиальной и продольной составляющих скорости в осесимметричном турбулентном потоке воздуха за внезапным расширением сечения трубы // *Соврем. машиностроение*. Сер. А. — 1989. — № 7. — С. 1—7.
21. *Бон Дж., Хоффман М., Лондер Б.* и др. Измерения теплоотдачи, температуры и скорости после внезапного расширения в круглой трубе при постоянной температуре стенки // *Соврем. машиностроение*. Сер. А. — 1990. — № 4. — С. 30—37.
22. *Штигльмайер М., Тронеа К., Вайзер Н., Нумие В.* Экспериментальное исследование течения через осесимметричные расширения // *Соврем. машиностроение*. Сер. А. — 1990. — № 6. — С. 60—68.
23. *Gould R. D., Stevenson W. H., Thompson H. D.* Investigation of turbulent transport in an axisymmetric sudden expansion // *AIAA J.* — 1990. — Vol. 28. — P. 276—283.
24. *Nesic S., Postlethwait J., Bergstrom D. J.* Calculation of wall-mass transfer rates in separated aqueous flow using a low Reynolds number $k-\epsilon$ model // *Int. J. Heat Mass Transfer*. — 1992. — Vol. 35. — P. 1977—1985.
25. *Apsley D. D., Leshziner M. A.* Advanced turbulence modelling of separated flow in a diffuser // *Flow, Turbulence and Combustion*. — 1999. — Vol. 63. — P. 81—112.
26. *Mason W. E., Saunders K. V.* Recirculating flow in vertical columns of gas-solid suspension // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 1975. — Vol. 8. — P. 1674—1685.
27. *Maeda M., Kiyota H., Hishida K.* Heat transfer to gas-solids two-phase flow in separated, reattached and redevelopment regions // *Proc. 7th Int. Heat Transfer Conf.* 1982. Munich, Germany. V. Paper TF9. — [S. l.], 1982. — P. 249—254.
28. *Hahn Y. B., Sohn H. Y.* The trajectories and distribution of particles in a turbulent axisymmetric gas jet injected into a flash furnace shaft // *Met. Trans. B.* — 1988. — Vol. 19B. — P. 871—884.

29. Ruck B., Makiola B. Particle dispersion in a single-sided backward-facing step flow // *Int. J. Multiphase Flow*. — 1988. — Vol. 14. — P. 787—800.
30. Hishida K., Maeda M. Turbulence characteristics of particle-laden flow behind a rearward facing step // *Proc. 1st SME-JSME Fluids Eng. Conf. Gas-Solid Flows*. ASME, FED. 1991. V. 121. — [S. 1.], 1991. — P. 207—212.
31. Hardalupas Y., Taylor A. M. K. P., Whitelaw J. H. Particle dispersion in a vertical round sudden-expansion flow // *Phil. Trans. Royal Soc. London*. — Part A. — 1992. — Vol. 341. — P. 411—442.
32. Founti M., Klipfel A. Measurements and predictions in vertical, two-phase sudden-expansion flows // *Proc. 2nd Int. Symp. Eng. Turbulence Modeling and Experiments ETMM-2*. 1993. Florence, Italy. — [S. 1.], 1993. — P. 979—990.
33. Achimastos T., Dimopoulos D., Klipfel A., Founti M. Measurements and predictions in a vertical sudden expansion two-phase flow: The effects of particle concentration // *Proc. 7th Int. Workshop on Two-Phase Flow Predictions*. Erlangen, Germany. 1994. — [S. 1.], 1994. — P. 46—52.
34. Founti M., Achimastos T., Dimopoulos D. Effect of increasing particle loading in an axisymmetric vertical liquid-solid sudden expansion flow // *Experimental and Computational Aspects of Validation of Multiphase Flow CFD Codes*. ASME FED. — 1994. — Vol. 180. — P. 83—92.
35. Founti M., Achimastos T., Dimopoulos D., Klipfel A. Experimental and computational investigations of particle-particle interactions in a vertical, sudden expansion flow // *Proc. 2nd Int. Conf. on Multiphase Flow ICMF-95*. 1995. Kyoto, Japan. V. 3. Paper PT4. — [S. 1.], 1995. — P. 9—18.
36. Sijercic M., Zivkovic G., Oka S. The comparison of stochastic and diffusion models of dispersed phase in two-phase turbulent flow // *Proc. 1st Int. Symp. Two-Phase Flow Modelling and Experimentation*. 1995. Pisa, Italy. — [S. 1.], 1995. — P. 375—382.
37. Волков Э. П., Зайчик Л. И., Периуков В. А. Моделирование горения твердого топлива. — М.: Наука, 1994. — 320 с.
38. Зайчик Л. И., Козелев М. В., Периуков В. А. Расчет турбулентных газодисперсных течений в каналах с зонами рециркуляции // *Изв. Рос. акад. наук. Механика жидкости и газа*. — 1994. — № 4. — С. 65—75.
39. Zaichik L. I., Pershukov V. A., Kozelev M. V., Vinberg A. A. Modeling of dynamics, heat transfer, and combustion in two-phase turbulent flow — 1: Isothermal flow // *Int. J. Exp. Thermal Fluid Sci.* — 1997. — Vol. 15. — P. 291—310.
40. Fessler J. R., Eaton J. K. Particle response in a planar sudden expansion flow // *Int. J. Exp. Thermal Fluid Sci.* — 1997. — Vol. 15. — P. 413—423.

41. *Founti M., Klipfel A.* Experimental and computational investigations of nearly dense two-phase sudden expansion flows // *Int. J. Exp. Thermal Fluid Sci.* — 1998. — Vol. 17. — P. 27—36.
42. *Fessler J. R., Eaton J. K.* Turbulence modification by particles in a backward-facing step flow // *J. Fluid Mech.* — 1999. — Vol. 314. — P. 97—117.
43. *Chan C. K., Zhang H. Q., Lau K. S.* Numerical simulation of gas-particle flows behind a backward-facing step using an improved stochastic separated flow model // *J. Comput. Mech.* — 2001. — Vol. 27. — P. 412—417.
44. *Zhang H. Q., Chan C. K., Lau K. S.* Numerical simulation of sudden-expansion particle-laden flows using an improved stochastic separated flow model // *Int. J. Numerical Heat Transfer. — Part A.* — 2001. — Vol. 40. — P. 89—102.
45. *Kubik A., Kleiser L.* Numerical investigation of particulate flow over a backward-facing step // *Proc. Appl. Math. Mech.* — 2003. — Vol. 2. — P. 380—381.
46. *Yua K. F., Lau K. S., Chan C. K.* Numerical simulation of gas-particle flow in a single-side backward-facing step flow // *J. Comp. Appl. Math.* — 2004. — Vol. 163. — P. 319—331.
47. *Терехов В. И., Пахомов М. А.* Моделирование турбулентного газодисперсного потока после внезапного расширения в трубе // *Теплофизика и аэромеханика.* — 2008. — Т. 15, № 4. — С. 629—642.
48. *Терехов В. И., Пахомов М. А.* Моделирование турбулентного двухфазного потока после внезапного расширения трубы при наличии испарения капель // *ТВТ.* — 2009. — Т. 47, № 3. — С. 423—430.
49. *Hishida K., Nagayasu T., Maeda M.* Augmentation of convective heat transfer by an effective utilization of droplet inertia // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1995. — Vol. 38. — P. 1773—1785.
50. *Sommerfeld M., Qiu H.-H.* Experimental studies of spray evaporation in turbulent flows // *Int. J. Heat Fluid Flow.* — 1998. — Vol. 19. — P. 10—22.
51. *Miyafuji Y., Senaha I., Oyakawa K., Hiwada M.* Enhancement of heat transfer at downstream of a backward-facing step by mist flow // *Proc. 2nd Int. Conf. on Jets, Wakes and Separated Flows ICJWSF-2008, 2008, Berlin, Germany.* — [S. l.], 2008. — 7 p. — CD-disc.
52. *Jones W. P., Louder B. E.* The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1973. — Vol. 15. — P. 1119—1130.
53. *Thangam S., Speziale C. S.* Turbulent flow past a backward-facing step: a critical evaluation of two-equation models // *AIAA J.* — 1992. — Vol. 30. — P. 1314—1320.

54. Зайков Л. А., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением: Течение в канале с обратным уступом // ТВТ. — 1996. — Т. 34, № 5. — С. 724—736.
55. Heyerichs K., Pollard A. Heat transfer in separated and impinging turbulent flows // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1996. — Vol. 39. — P. 2385—2400.
56. Деревич И. В. Гидродинамика и тепломассоперенос частиц при турбулентном течении газозвеси в трубе и осесимметричной струе // ТВТ. — 2002. — Т. 40, № 1. — С. 86—99.
57. Hwang C. B., Lin C. A. Improved low-Reynolds-number $k-\tilde{\epsilon}$ model based on direct simulation data // AIAA J. — 1998. — Vol. 36. — P. 38.
58. Myong H. K., Kasagi N. A. New approach to the improvement of $k-\epsilon$ turbulence model for wall-bounded shear flows // Int. J. JSME. — Ser. 2. — 1990. — Vol. 33. — P. 63—72.
59. Терехов В. И., Пахомов М. А., Чичиндаев А. В. Влияние жидких капель на распределение параметров в двухкомпонентном ламинарном потоке // ПМТФ. — 2000. — Т. 41, № 6. — С. 68—77.
60. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
61. Leonard B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1979. — Vol. 19. — P. 59—79.
62. Van Doormaal J. P., Raithby G. D. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Int. J. Numerical Heat Transfer. — Part A. — 1984. — Vol. 7. — P. 147—164.
63. Фогель, Итон. Комбинированные измерения теплоотдачи и гидродинамических характеристик за обратным уступом // Теплопередача. — 1985. — Т. 107, № 4. — С. 152—159.
64. Terekhov V. I., Pakhomov M. A., Sharov K. A., Shishkin N. E. The thermal efficiency of near-wall gas-droplets screens. II. Experimental study and comparison with numerical results // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2005. — Vol. 48. — P. 1760—1770.

Прямое численное моделирование пузырьковых и капельных течений с явным выделением границы раздела фаз

В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, В. А. Первичко

1. Введение

Несмотря на длительную историю исследования двухфазных и газожидкостных течений, удовлетворительного вычислительного подхода для определения движения разных фаз и поведения двухфазных смесей до сих пор нет. Одной из причин такого положения является отсутствие ясной и детальной картины взаимодействия пузырьков как с несущей средой, так и между собой. Эти задачи достаточно сложны для прямого теоретического исследования, поскольку возникает много неопределенных параметров, более того, ситуация существенно усложняется для нестационарных условий взаимодействия.

В связи с этим актуальным является развитие вычислительных методов и алгоритмов для решения задач тепло- и массопереноса в несжимаемых средах с учетом сил поверхностного натяжения, а также разработка вычислительных модулей для трехмерного CFD-кода (от Computational Fluid Dynamics) [1], отвечающего современному уровню развития вычислительных средств и численных методов.

Одним из наиболее часто встречающихся видов двухфазных CFD-течений является пузырьковое течение. Этот режим реализуется при развитом кипении жидкости на различно ориентированных поверхностях, двухфазном течении в вертикальных и горизонтальных каналах. Разрабатываемые и используемые в настоящее время методы прямого численного моделирования двухфазных течений нуждаются во всестороннем тестировании на доступных из литературы экспериментальных и аналитических данных, в частности на тестах, описывающих установившееся движение одиночного газового пузырька и группы пузырьков в большом объеме несжимаемой жидкости. Также актуальными являются эксперименты по описанию всплывания пузырька в каналах различной формы (цилиндрических, щелевых) и эффектов взаимовлияния пузырьков при их слиянии (коалесценции) и дроблении.

Поэтому разработка системы тестов (матрицы валидации) для верификации создаваемого программного обеспечения прямого моделирования

пузырьковых течений и обобщение результатов в виде карты режимов течений всплывающего пузырька и группы пузырьков представляется актуальной.

В работе представлены особенности развитой в ИБРАЭ РАН методологии моделирования пузырьковых течений, которая легла в основу разрабатываемого CFD-модуля, и приведены результаты ее валидации на базе экспериментов, проводимых в новосибирском Институте теплофизики им. С. С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН (ИТ СО РАН). Особое внимание при тестировании уделено течениям при малых числах Рейнольдса, а именно экспериментальным данным по всплытию одного и группы пузырьков в плоском канале и экспериментальным данным по взаимодействию капель жидкости с малой разностью плотностей с учетом слияния (коалесценции) и разрыва капель. Кроме того, тестирование разрабатываемого программного обеспечения было выполнено на таких известных тестах, как капиллярная волна, неустойчивость Рэлея—Тейлора, задача об обрушении плотины и т. д. [2].

Прежде чем переходить к изложению разработанной вычислительной методики, кратко остановимся на подходах, используемых в настоящее время в мире для моделирования двухфазных и газожидкостных течений, и определим наше место в этой проблеме.

2. Обзор некоторых используемых подходов

В настоящее время явления, имеющие место на поверхности раздела фаз (интерфейсе), моделируются либо в рамках взаимно-проникающего непрерывного подхода, известного также как двухжидкостной метод [3], либо в рамках подхода, при котором топология и динамика поверхности раздела моделируются непосредственно методами прямого отслеживания поверхности раздела (Interface Tracking Methods — ITM).

При осредненном двухжидкостном подходе каждый локальный объем смеси занят одновременно обеими фазами, и отдельные уравнения сохранения необходимы для каждой фазы. Проблема заключается в определении замыкающих соотношений для интерфейсного обмена массой, импульсом и энергией в соответствующей интерфейсной области. При предсказании поведения 3D-поверхности раздела с помощью дополнительного уравнения переноса (см., например, [4]) механизмы, управляющие режимами течений, и связанные с ними времена релаксации могут быть учтены механистическим способом.

ITM применяются в случае, когда идентификация поверхностей раздела должна быть точной, например, при разрыве больших пузырьков, для каплек или жидких струй. В данном классе методов используется однофазный

набор уравнений сохранения, известных как одножидкостная формулировка, где различия в материальных свойствах и поверхностном натяжении учитываются путем решения адвективного уравнения для функции индикатора фаз. Этот подход предлагает более тонкую и точную стратегию идентификации поверхностей раздела, чем двухжидкостная формулировка. Таким образом, в отличие от осредненной модели ITM-подходы избегают обращения к эмпиризму при предсказании физики границы раздела фаз. По сравнению с взаимно проникающей непрерывной формулировкой ITM-подход можно рассматривать как прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation — DNS) движения границ, где никакие замыкающие предположения для развития интерфейсной области не являются необходимыми. В случае турбулентных течений напряжения моделируются либо в рамках подхода RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes), либо турбулентные структуры до масштаба Колмогорова моделируются непосредственно методом прямого численного моделирования турбулентности.

Наиболее часто используемыми ITM-подходами для предсказания некоторых классов многофазных течений являются:

- метод объема жидкости (Volume of Fluid — VOF) (см., например, [5]);
- метод приспособления границы (Boundary Fitting — BF) [12];
- метод прослеживания границы (Front Tracking — FT) или immersed boundary метод [6];
- метод набора уровней (Level Set — LS) (см., например, [7]);
- метод фазовых полей (Phase Field — PF) (см., например, [8]).

2.1. Методы Volume of Fluid и Level Set

Подход VOF основывается на определении поля жидкой объемной фракции или объемного соотношения, занятого одной из фаз в пределах объема V . Это свойство жидкости традиционно обозначается (в дискретном виде) как F_{ij} и определяется согласно выражению

$$F_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \chi(x, t) dV,$$

где V — объем ячейки; χ — функция индикатора фаз на момент времени t в точке x , определяемая как $\chi_k(x, t) = 1$ для $x \in$ фазе k и $\chi_k(x, t) = 0$ в иных случаях.

В контексте VOF известное топологическое уравнение, описывающее движение поверхности χ_k , перемещающейся со скоростью u ,

$$\frac{D\chi_k}{Dt} = \frac{\partial\chi_k}{\partial t} + u \operatorname{grad} \chi_k = 0 \quad (2.1)$$

представляет эволюцию жидкой объемной фракции, отделяя области потока, содержащие чистую жидкость (где $F_{ij} = 1$), от чисто газовых областей потока (где $F_{ij} = 0$). Интерфейсные ячейки таковы, что $0 < F_{ij} < 1$. VOF-метод не сводится исключительно к решению уравнения (2.1), он требует точных алгоритмов для переноса функции объемной фракции так, чтобы сохранить консервативность массы. Так как это не может быть достигнуто посредством обычных конечно-разностных схем из-за численной диффузии, сначала переносится композиционное поле, а затем местоположение поверхности раздела восстанавливается, чтобы избежать численного размазывания поверхности раздела.

Коротко говоря, обновленная информация о поверхности раздела (после адвективного шага уравнения (2.1)) отвергается в пользу дискретной объемной фракции F_{ij} . Местоположение геометрии поверхности раздела фаз восстанавливается из локальных данных объемной фракции с использованием соответствующего алгоритма. Поскольку только этот тип алгоритма применяется для перенесения объемной фракции, масса систематически сохраняется, даже если поверхность раздела остается острой. Восстановленная поверхность раздела фаз затем используется, чтобы определить, например, взвешенные свойства материала ячейки согласно уравнению $\eta(\chi, t) = \eta_G + (\eta_L - \eta_G)\chi_L$ (под η понимаются все свойства рассматриваемой двухфазной системы, такие как плотность, теплоемкость, теплопроводность; индекс G указывает на газообразную фазу, индекс L — на жидкую).

Неудобством является наличие острых межфазных переходов в поле объемной фракции из-за того, что кривизна κ может сильно колебаться даже для совершенно круглых поверхностей. Этого можно было бы избежать, если бы вместо реконструкции линейными сегментами использовались изогнутые реконструкции поверхности раздела. Более ранние схемы реконструкции, обычно называемые Simple Line Interface Construction (SLIC), использовали только вертикальные или горизонтальные линии в каждой ячейке, чтобы восстановить поверхности раздела [9]. Недавние реконструкции типа кусочно-линейного построения поверхности раздела (Piecewise Linear Interface Construction — PLIC) использовали прямые и наклонные линии в каждой ячейке [10; 11]. Это дает ряд преимуществ: свойства могут быть размещены более точно, что способствует более реалистическому выполнению моделей поверхностного натяжения и межфаз-

ного переноса. Тем временем совсем недавно появившиеся новые алгоритмы реконструкции используют сплайны и квадратичные функции.

Подход LS [7] состоит в решении уравнения (2.1) традиционным методом при введении хитроумного способа для ограничения поверхности раздела на сетке. Формулировка основана на конструировании гладкой определенной всюду в вычислительной области Ω функции $\varphi(x, t)$, связанной с кратчайшим расстоянием до фронта. Отрицательные значения соответствуют одной из жидкостей, положительные — другой. Точное местоположение поверхности раздела $\Gamma(t)$ соответствует нулевому уровню φ . Выраженная в терминах композиционного поля χ функция LS такова, что $\chi_k = H(\varphi)$, где $H(\varphi)$ — функция Хевисайда, определяемая следующим образом:

$$H(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi > 0, \\ 0, & \text{если } \varphi < 0. \end{cases}$$

Подразумевается, что функция φ_{ij} связана непосредственно с полем жидкой объемной фракции F_{ij} через соотношение

$$F_{ij} = \frac{1}{V} \int_V H[\varphi_{ij}] dV.$$

Аналогично VOF-подходу управление движением поверхности в LS-подходе осуществляется с помощью топологического уравнения (2.1). Преимущество использования такой формы прослеживания поверхности раздела, прежде всего, состоит в том, что этот способ обходится без граничной реконструкции, используемой в VOF, которая является в вычислительном отношении очень дорогой и сложной (если не невозможной) для осуществления в недекартовых конфигурациях. LS-подход может быть легко распространен на 3D-случай и неструктурированные сетки. Оба метода могут обращаться со слиянием (коалесценцией) и фрагментацией и позволяют идентифицировать точное местоположение поверхности раздела. Неудобства заключаются в размазывании интерфейса и неконсервативности массы. В отличие от LS при использовании искусственной функции набора уровней диффузно-граничные модели сохраняют массу, но только когда композиционная область определена как концентрация.

2.2. Методы Boundary Fitting и Front Tracking

В методе BF [12] уравнения Навье—Стокса со свойствами материалов, определяющими присутствие жидкостей в системе, сначала решаются отдельно в каждой подобласти. Впоследствии они соединяются явно через

неразрывность скорости и условия скачка напряжений на поверхности раздела. В отсутствие тепло- и массопереноса эти условия скачка могут быть выражены следующим образом:

$$\left((\tau_L - \tau_G) \cdot n \right) \cdot n + \rho_L - \rho_G + \sigma \kappa \operatorname{grad} n + (\rho_L - \rho_G) g f = 0,$$

$$\left((\tau_L - \tau_G) \cdot n \right) \cdot t = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$u_G = u_L,$$

где t_1 и t_2 — два касательных единичных вектора на поверхности раздела; ρ_L, ρ_G — плотность жидкости и газа соответственно; u_L, u_G — скорость жидкости и газа соответственно; n — нормаль к поверхности раздела; g — ускорение силы тяжести; σ — коэффициент поверхностного натяжения, τ_L, τ_G — вязкий тензор напряжений для жидкости и газа соответственно; f — вертикальное отклонение поверхности раздела.

Местоположение границы должно быть идентифицировано мгновенно, чтобы непосредственно задать условия скачка на поверхности раздела. Это может быть выполнено преобразованием уравнения (2.1) в уравнение адвекции вертикального отклонения поверхности раздела, обозначенного $f(x, t)$ от ее нулевого уровня. В специфическом контексте, где управляющие уравнения включая (2.1) решены с использованием псевдоспектральной методики, метод предлагает более строгую стратегию, чем VOF или LS. Однако, так как уравнение для интерфейсного отклонения не может быть продлено на сильные топологические изменения, метод остается ограниченным простыми двухфазными конфигурациями потока, где топология поверхности раздела легко определима, подобно стратифицированным течениям.

Метод BF (см., например, [12]) не имеет широкого практического применения, его лучше использовать как DNS для идеализированных течений. Важно, что в BF-методах положение поверхности раздела фаз определяется путем прослеживания функции индикатора фаз, которая имеет особый физический смысл в каждом подходе.

Основная идея оригинального метода FT [6] проста. Используются две сетки: одна — стандартная стационарная конечно-разностная, другая — дискретизированная сетка поверхности раздела, служащая для явного слежения за поверхностью. Сетка представлена нестационарными лагранжевыми вычислительными точками, связанными с формой двумерной поверхности (одномерной линии для 2D-случая). Как только лагранжевы точки определены, следует сосредоточиться на методе структурирования и

организации этих точек. В оригинальном исполнении [6] основной структурной единицей является треугольный элемент поверхности раздела, состоящий из трех точек поверхности раздела. Эти элементы логически связаны друг с другом так, чтобы каждый элемент «помнил» таблицу его ближайших соседних элементов. Цель поддержания связности соседних элементов двойная: для вычисления геометрии поверхности раздела (интерфейсных нормалей и кривизны) и для учета элементов в процессе (процедуре) изменения топологии. Этот учет связей соседних элементов относительно просто осуществить в 2D-случае, где смежные сегменты линии могут быть логически связаны с использованием связанных списков. Поскольку поверхность раздела перемещается и искажается в ходе вычисления, ее элементы необходимо иногда добавлять или удалять, чтобы поддерживать регулярность и стабильность. В случае слияния/разрыва элементы повторно связывают, чтобы произвести изменения в топологии. В принципе все эти действия могут быть выполнены и в 3D-случае со знанием связей соседей треугольного элемента. Трехмерное прослеживание поверхности раздела фактически было успешно осуществлено и использовано при моделировании течений нескольких жидкостей [18; 43].

Несмотря на преимущества FT, его реализация в трехмерном случае чрезвычайно сложна, особенно для сложных интерфейсных течений при слиянии или разрыве. На каждом шаге по времени информацию об интерфейсе нужно согласовывать между перемещающейся лагранжевой поверхностью раздела и стационарной эйлеровой сеткой. Поскольку лагранжевы точки поверхности раздела x_p не обязательно совпадают с эйлеровыми точками сетки x_{ij} , передача информации осуществляется методом поглощенной границы [44]. В этом методе бесконечно тонкая поверхность раздела приближена гладкой функцией распределения, которая используется, чтобы распределить источники на поверхности раздела по нескольким узлам сетки около поверхности раздела. В подобной манере эта функция используется, чтобы интерполировать переменные поля от постоянной сетки к поверхности раздела. Таким образом, фронту дают конечную толщину порядка размера ячейки сетки, чтобы обеспечить стабильность и гладкость. Нет никакой численной диффузии, поскольку толщина остается постоянной в течение всего времени.

В [45] FT-метод [6] применен для моделирования полного 3D-пленочного кипения. Суть нового метода FT заключается в изящном, простом и робастном способе строительства набора поверхностных элементов, которые связаны физически, но не логически. Элементы построены на контуре уровня существующей характеристической функции поверхности раздела (такой как объемная фракция, расстояние, функции фазового поля или, как в нашем случае, функция Хевисайда). С применением этой техники реконструкции контура уровня действия по стиранию элемента, добавле-

нию и переустановке связей выполнены одновременно в одном шаге и без потребности в элементе связности. Кроме того, как только элементы построены, нормали к поверхности раздела и элементы области автоматически определены и поверхностные силы натяжения точно вычислены непосредственно на элементах поверхности раздела. Наш подход состоит в том, чтобы вычислить как можно больше характеристик из физики поверхности раздела (насколько возможно непосредственно на крутой поверхности раздела), прежде чем эта информация будет распределена на фиксированной сетке.

2.3. Межфазный тепло- и массоперенос

Массообмен между газообразными и жидкими фазами происходит при различных условиях. Поглощение слегка растворимых газов через интерфейсный подслой существенно отличается от сильного интерфейсного всасывания массы из-за конденсации или испарения. Такие явления присутствуют в некотором классе ядерных технических приложений подобно смесям паровых и неконденсируемых газов в контейменте.

Численное моделирование интерфейсного фазового превращения сопряжено с рядом трудностей, непосредственно связанных с физикой проблемы. Например, для чисел Прандтля и Шмидта, характерных для ядерных технических приложений, толщина регионов, для которых существенны концентрационный и температурный градиенты, составляет доли миллиметра. Так как скорость переноса массы вследствие конденсации зависит от градиентов концентрации массы и температуры через поверхность раздела, ее определение требует точного разрешения на поверхности раздела. Это, очевидно, невозможно в практических ситуациях. Будущее исследование должно, таким образом, положиться на экспериментальные корреляции для этих механизмов переноса или на DNS-данные, по крайней мере для потоков массы из диапазона «от низкого к среднему». Эффекты фазовых превращений «жидкость — пар» были решены в пределах одножидкостной формулировки различными исследователями: Бо [13] и Сон [14] использовали LS метод, Джурич и Триггвасон [6] применяли свой FT подход, Жаме [15] применял так называемую теорию второго градиента или уравнение Кана—Хилларда.

В принципе включение теплообмена в пределах одножидкостной формулировки требует использования условий скачка массы и энергии [16] на поверхности раздела, определяемых как

$$\dot{m} = \rho_L (u_L - V_f) \cdot n = \rho_G (u_G - V_f) \cdot n, \quad (2.2)$$

$$\dot{m}H_{LG} + \dot{q} = 0, \quad \dot{q} = (q_G - q_L) \cdot n, \quad (2.3)$$

где \dot{m} — межфазный поток массы; ρ_L, ρ_G — плотность жидкости и газа соответственно; u_L, u_G — скорость жидкости и газа соответственно; n — нормаль к поверхности раздела; H_{LG} — скрытая теплота испарения; \dot{q} — скорость выпуска теплоты на поверхности раздела; V_f — скорость фронта.

В этом случае уравнения сохранения массы приобретут вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi_L \rho_L) + \text{grad}(\chi_L \rho_L u) = \rho_L (u - V_f) \cdot \text{grad} \chi_L, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \chi_L) \rho_G) + \text{grad}((1 - \chi_L) \rho_G u) = -\rho_G (u - V_f) \cdot \text{grad} \chi_L. \quad (2.5)$$

Суммируя эти отношения и предполагая несжимаемость каждой фазы, получим

$$(\rho_L - \rho_G) \frac{D\chi_L}{Dt} + \rho \text{grad} \cdot u = (\rho_L - \rho_G) (u - V_f) \cdot \text{grad} \chi_L. \quad (2.6)$$

Это уравнение может быть снова расщеплено на уравнение сохранения массы $\text{grad} u = 0$ и дополнительную часть, представленную топологическим уравнением

$$\frac{\partial \chi_L}{\partial t} + u \cdot \text{grad} \chi_L = (u - V_f) \cdot \text{grad} \chi_L, \quad (2.7)$$

в котором межфазный перенос массы отражен в функции источника. В типичном применении VOF, где χ представлена VOF-функцией F_{ij} , уравнение (2.7) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \text{grad} F = \frac{1}{\rho} \int \dot{m} \delta(x - x_f) ds, \quad (2.8)$$

где δ — функция Дирака. Здесь применены выражение для скачка массы, уравнение (2.2) и $\text{grad} \chi$, задаваемый уравнением $\text{grad} \chi = \int \delta(x - x_f) n ds$. Затем использование выражения для высвобождения тепла $\dot{m} = \dot{q} / H_{LG}$ приводит уравнение (2.8) к виду

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \text{grad} F = \frac{1}{\rho H_{LG}} \int (q_G - q_L) \cdot n \delta(x - x_f) ds, \quad (2.9)$$

где скачок в энергии $q_G - q_L$ может быть определен путем решения температурных градиентов на обеих сторонах поверхности раздела, например $q_G = -\lambda_G \text{ grad } T|_G$.

В LS-методе, где χ выражено в терминах расстояния до поверхности раздела ϕ_{ij} , можно показать, что уравнение (2.7) можно выбрать в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \text{grad } \phi = \frac{\dot{m}}{\rho} |\text{grad } \phi|, \quad (2.10)$$

где использовано уравнение (2.2) вместе с выражением для единичного вектора нормали $n = \text{grad } \phi / |\text{grad } \phi|$. Выведение затем массового потока \dot{m} из (2.3) дает уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \text{grad } \phi = \frac{1}{\rho H_{LG}} (q_G - q_L) \text{grad } \phi, \quad (2.11)$$

которое при помощи модифицированной функции Хевисайда упрощается до

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \text{grad } \phi = \frac{\delta(\phi)}{\rho H_{LG}} (q_G - q_L) \cdot \text{grad } \bar{H}(\phi). \quad (2.12)$$

В результате тестирования метода было обнаружено, что он работает разумно для потоков с низкой массой, например, для схлопывания пузыря в переохлажденной жидкости [13], и для кипения капель на горизонтальной поверхности [14]. Это преимущество состоит в том, что температурные градиенты, появляющиеся в уравнении (2.12), явно выражены в терминах расстояния до поверхности раздела ϕ . Однако неспособность LS сохранять массу может существенно влиять на результат.

В рамках FT-метода рассматривавшие 2D-течения Джурич и Триггвасон [6] предложили решать топологическое уравнение для движения фронта в самой простой форме, задаваемой (2.1), и преобразовать слагаемое в правой части (2.7) в источник массы, следующей из испарения или уплотнения. Эта альтернатива также использовалась в [17] для предсказания кипения горизонтальной пленки в соединении с одним из VOF-вариантов и в [14] в соединении с LS-подходом. 3D-вычисления с использованием FT-метода для моделирования пленочного кипения были представлены в [18]. Кроме того, двумерные задачи горения с помощью FT-метода исследовались в [19], а с помощью LS-подхода — в [20; 21].

В [22] была предложена двухфазная модель, позволяющая определять термодинамические и кинетические переменные каждого компонента смеси. При этом в любом месте расчетной сетки одним и тем же числен-

ным методом решались одинаковые уравнения как для случая двух несмешивающихся компонентов, разделенных поверхностью раздела, так и для случая физического смешивания различных веществ. Однако в работе была использована довольно сложная вычислительная методика, позволяющая решать газодинамические задачи, в которых присутствуют резкие разрывы профилей термодинамических величин и контактные разрывы.

2.4. CONV-метод

Многие современные методы моделирования многофазных и многокомпонентных газодинамических течений основываются на численном решении уравнений Эйлера или Навье—Стокса, которые обычно дополняются одним или несколькими уравнениями, выражающими законы сохранения специфических для данной задачи физических величин (концентрации газовых пузырьков), необходимых для определения интерфейсных значений параметров многофазной системы. Применение таких численных методов приводит к возникновению искусственной диффузии через контактные разрывы и к искусственному смешиванию веществ на границе раздела.

В такой искусственной смеси значения всех термодинамических параметров вычисляются с ошибкой. При сильно различающихся параметрах веществ такой подход приводит к отрицательным значениям давления уже на втором шаге по времени.

Разрабатываемые в последние годы в ИБРАЭ РАН математические модели и вычислительные алгоритмы для решения задач тепло- и массопереноса в слабосжимаемых и несжимаемых средах были успешно использованы при моделировании взаимодействия двух несмешивающихся жидкостей, многомерного течения смеси неконденсируемых газов под оболочкой, распространения ударных волн в двухжидкостной среде, представленной воздухом и гелием. В настоящее время ведется обобщение этих методов для самосогласованного моделирования двухфазных течений «жидкость — газ» следующим образом:

- внутри пузыря — моделирование течений методами и алгоритмами для решения CFD-проблем в сжимаемых жидкостях, в частности при малых числах Маха [23];
- вне пузыря — моделирование течений методами и алгоритмами для решения CFD-проблем в несжимаемых средах [24];
- в пределах поверхности раздела для прослеживания межфазной границы — использование модифицированного метода набора уровней и развитой трехмерной монотонной схемы адвекции TVD-типа [25] с малой схемной диффузией (с использованием подсеточного моделирования).

Предлагаемые вычислительные методы для моделирования двухфазных течений соответствуют мировому уровню. А применительно к задачам тепло- и массообмена для пузырьковых течений и задачам распространения ударных волн в двухкомпонентной смеси с учетом топологии микроструктуры разрабатываемые методы и подходы являются новыми [2; 26; 27], способствуют более глубокому пониманию многообразия сложных процессов фазовых превращений в атомных реакторах, теплообменниках и т. д.

В частности, для решения уравнения давления разработан модифицированный метод Ричардсона (modified preconditioned Richardson method) с предобусловливателем в виде быстрого преобразования Фурье (fast Fourier transformation — FFT). Такой подход обеспечивает многократное ускорение по сравнению со стандартными методами, используемыми при решении проблем вычислительной динамики несжимаемой жидкости, например, при использовании предобусловленного метода сопряженных градиентов (preconditioned conjugate gradient method).

Развитая трехмерная монотонная схема адвекции TVD-типа с малой схемной диффузией и использованием подсеточного моделирования является одной из лучших в своем классе для моделирования уравнения переноса [25]. Она обеспечивает второй порядок по пространству. Алгоритм устойчив при достаточно большом шаге интегрирования по времени.

В настоящее время наибольший эффект при использовании разрабатываемых моделей и вычислительных методов для задач гидродинамики и теплопереноса несжимаемой и слабосжимаемой многокомпонентной среды может быть достигнут на современных настольных персональных мини-суперЭВМ. Использование таких компьютеров позволяет с учетом частичного распараллеливания проводить расчеты трехмерных задач тепло- и массообмена на расчетных сетках порядка 10^7 узлов в течение разумного времени (от нескольких часов до нескольких суток).

Успешно прошедшая тестирование на численных и экспериментальных данных разрабатываемая вычислительная методика моделирования капельных и пузырьковых течений может быть использована для проведения численных экспериментов и получения корреляционных соотношений для инженерных расчетов, в частности при решении таких задач, как расход теплоносителя в трубе, скважность выхода пузырьков, интенсивность теплообмена на границе.

3. CFD вычислительная методика

Данный раздел посвящен новым методам и алгоритмам для решения задач 3D тепло- и гидродинамики в несжимаемых жидкостях. Среди них алгоритмы для решения задач динамики несжимаемой жидкости, монотонные многомерные схемы TVD-типа для решения уравнения адвекции, эффективные алгоритмы решения эллиптического уравнения для поправки давления.

Для моделирования поведения газа внутри пузыря предлагается модель сжимаемых сред при малых числах Маха [23].

Для моделирования поведения жидкости вне пузыря используются нестационарные уравнения Навье—Стокса в естественных переменных для несжимаемой жидкости вместе с уравнением энергии [24].

Для наблюдения за поверхностью раздела двухфазной системы использованы:

- модифицированный метод набора уровней для прямого численного моделирования двухфазной системы типа «жидкость — газ» [1];
- монотонная многомерная схема адвекции с малой схемной диффузией с использованием подсеточного моделирования;
- эффективные вычислительные алгоритмы для решения уравнения давления в гидродинамике несжимаемой жидкости с переменной плотностью.

Развитые алгоритмы, методы и программное обеспечение были проверены на широком наборе тестов [2; 28].

3.1. Описание поведения жидкости вне пузырька (уравнения Навье—Стокса)

Для моделирования поведения жидкости вне пузырьков использованы нестационарные уравнения Навье—Стокса в естественных переменных [24] для несжимаемой жидкости вместе с уравнением энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho\vec{v}}{dt} &= -\text{grad } P + \text{div } \mu \text{ grad } \vec{v} + \rho g + \text{CSF}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}h) = \text{div}(k \text{ grad } T), \quad h = \int_0^T c(\xi) d\xi, \quad (3.2)$$

где ρ — плотность; \vec{v} — вектор скорости; t — время; P — давление; μ — динамическая вязкость; g — ускорение силы тяжести; CSF (continuous surface force) — непрерывная поверхностная сила (см. подраздел 3.5); h

— энтальпия; k — коэффициент теплопроводности; T — температура; c — удельная теплоемкость; ξ — универсальный параметр.

Перечислим основные особенности развитого численного алгоритма [1; 28], включенные в представленный подход:

- дискретные аппроксимации строятся с использованием конечно-разностных методов и разнесенных сеток;
- операторные схемы строятся по принципу расщепления по физическим процессам;
- для построения схемы интегрирования по времени для уравнения энергии операторы последнего расщепляются на две части, связанные соответственно с энтальпией и температурой.

Результатом расщепления является следующая двухшаговая процедура:

$$\frac{h^{n+1/2} - h^n}{\tau} + \tilde{C}(v^n)h^{n+1/2} = 0, \quad \frac{h^{n+1} - h^{n+1/2}}{\tau} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad})T^{n+1} = 0,$$

где h — энтальпия; τ — безразмерное время; $\tilde{C}(v^n)$ — оператор конвективного переноса.

В уравнении движения операторы также расщепляются на две части. Анализируемая аддитивная схема расщепления имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} + \left(C(v^n) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \right) v^{n+1/2} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P^n &= f^n, \\ \frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} + \left(C(v^n) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \right) v^{n+1/2} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P^{n+1} &= f^n, \\ \operatorname{div} v^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Численная реализация схем расщепления для уравнений Навье — Стокса выполнена как предиктор-корректор-процедура с коррекцией для поправки давления:

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} + \left(C(v) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \right) v^{n+1/2} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P^n - \operatorname{CSF}^n = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_h \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_h \delta p \right) &= \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h v^{n+1/2}, \\ v^{n+1} &= v^{n+1/2} - \frac{\tau}{\rho} \operatorname{grad}_h \delta p,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где δp — приращение давления.

Существуют два варианта метода фиктивных областей — с продолжением по младшим и старшим производным, которые используются для предсказания динамики жидкости с учетом фазовых превращений. Здесь применяется первый вариант, который в физическом смысле можно трактовать как включение в уравнение движения модели пористой среды:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \tau} + C(v_\varepsilon)v_\varepsilon - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v_\varepsilon) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + c_\varepsilon v_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0.$$

Различные формулы c_ε можно использовать для слагаемого сопротивления потока в приведенных выше уравнениях (например, ступенчатая функция для резкого переключения, линейный Дарси и т. д.).

Полностью неявная схема (обратные разности) используется для нестационарного уравнения энергии.

Для решения задачи конвекции развита регуляризованная нелинейная монотонная операторная схема расщепления [25]. Специальная аппроксимация конвективных слагаемых $C(v)$ использована для получения дискретного конвективного оператора, который является кососимметричным и не дает вклада в кинетическую энергию (т. е. является энергетически нейтральным).

Данная схема обеспечивает второй порядок по пространству и первый по времени. Алгоритм устойчив при достаточно большом шаге интегрирования по времени.

Результаты тестирования подхода на широком наборе как двумерных, так и трехмерных тестов можно найти в [2; 28; 29].

3.2. Модель поведения газа внутри пузырьков

Для моделирования поведения газа внутри пузырьков предложена модель поведения сжимаемых сред при малых числах Маха [23]. При записи системы уравнений использовано следующее масштабирование при переходе к безразмерным величинам: $t' = (V_0 / L_0)t$ — безразмерное время; $x'_i = x_i / L_0$ — безразмерная координата; $v'_i = v_i / V_0$, $i = 1, 2, 3$ — безразмерные компоненты скорости;

$p'_d = \frac{P(t, x) - P_0 \bar{p}'(t) - \rho_0 g(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})}{\rho_0 V_0}$ — безразмерная динамическая часть давления; $\bar{p}'(t) = \frac{1}{V_{\Omega}} \int \frac{P(t, x) - \rho_0 g(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})}{P_0} dv$ — безразмерная термодинамическая часть давления; $\rho' = \rho / \rho_0$ — безразмерная плотность; $T' = (T - T_0) / \Delta T$ — безразмерная температура; $\mu' = \mu(T) / \mu_0$ — безразмерный коэффициент динамической вязкости; $\lambda' = \lambda(T) / \lambda_0$ — безразмерный коэффициент теплопроводности; $C'_p = C_p(T) / C_{p0}$ — безразмерный коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении. L_0, V_0, P_0, T_0 — характерные значения соответствующих величин. В качестве характерных значений плотности и коэффициентов, определяющих свойства среды, берутся их значения при давлении P_0 и температуре T_0 :

$$\rho_0 = \rho(P_0, T_0), \quad \mu_0 = \mu(T_0), \quad \lambda_0 = \lambda(T_0), \quad C_{p0} = C_p(T_0).$$

Если учесть введенные выше безразмерные величины и опустить для краткости знак штриха ('), система уравнений Навье—Стокса в безразмерной формулировке примет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \bar{\mathbf{v}}) + \text{grad}_i p_d = \\ & = \frac{2}{\text{Re}} \left(\text{div}_i(\mu \dot{\mathbf{S}}) - \frac{1}{3} \text{grad}_i(\mu \text{div} \bar{\mathbf{v}}) \right) + F_i, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}} T) = \frac{1}{\text{RePr}} \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \\ & + \frac{\gamma - 1}{r_T} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + M^2 \frac{\partial p_d}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{(\gamma - 1) M^2}{r_T} \left((\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad} p_d) + \frac{J_{\text{dis}}}{\text{Re}} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\rho = \frac{\bar{p}(t) + \gamma M^2 p_d(t, x) + Hs(e \cdot x)}{T \cdot r_T + 1},$$

$$\int_{\Omega} p_d(t, x) dV = 0,$$

где ρ — плотность; p, \bar{p}, p_d — давление и его компоненты; T — температура; γ — отношение теплоемкостей; Ω — область течения; V — объем; e — единичный вектор направления силы тяжести; $J_{\text{dis}} = 2\mu \left(\dot{S}^2 - \frac{1}{3} (\text{div } v)^2 \right)$; $S = \frac{1}{2} (\text{grad } v + (\text{grad } v)^T)$; $r_T = \Delta T / T_0$ — параметр температурной вариации; F — член, содержащий объемно распределенные силы: $F = (\rho - 1)e / Fr$.

Использованные в системе уравнений (3.5)—(3.7) безразмерные числа Маха, Рейнольдса, Прандтля и Фруда определяются согласно выражениям

$$M = \frac{V_0}{\sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}}, \quad Re = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu_0}, \quad Pr = \frac{C_{p0} \mu_0}{\lambda_0}, \quad Fr = \frac{V_0^2}{L_0 g},$$

где g — значение ускорения свободного падения.

Вместо давления $p(t, x)$ в системе уравнений (3.5)—(3.7) используются две неизвестных функции: $\bar{p}(t)$ и $p_d(t, x)$. Функция $\bar{p}(t)$ не зависит от пространственной переменной x и представляет собой термодинамическое давление. В уравнении движения функция $p_d(t, x)$ обозначает динамическую часть давления.

При конструировании конечно-разностной схемы расщепления для уравнений (3.5)—(3.7) мы основываемся на уже развитых методах для моделирования несжимаемых потоков. Так, мы используем метод расщепления с коррекцией давления. В этом случае конечно-разностная схема при замене уравнения неразрывности уравнением для поправки давления имеет вид

$$\left(\frac{1}{\tau} + L_h(\bar{v}^n) \right) (\rho \bar{v})^* = \frac{(\rho \bar{v})^n}{\tau} - \text{grad}_h(p_d^n) + S^n; \quad (3.8)$$

$$l = 0; \quad \rho^l = \rho^n; \quad (\delta p_d)^* = 0; \quad (\delta \bar{p})^* = 0; \quad T^l = T^n,$$

$$\left(\frac{\rho^n}{\tau} + G_h(\rho\bar{v}^n)\right)T^{l+1} = \frac{(\rho T)^n}{\tau} + \frac{\gamma-1}{r_T\gamma} \left(\frac{(\delta\bar{p})^*}{\tau} + \frac{\gamma M^2(\delta p_d)^*}{\tau}\right) + \frac{(\gamma-1)M^2}{r_T} \left(\bar{v}^n \text{grad}_h(p_d^n)\right) + \frac{J_{dis}^n}{\text{Re}}, \quad (3.9)$$

$$(\delta\bar{p})^* = -\left(\sum_{\omega} \frac{1}{T^n r_T + 1} h_1 h_2 h_3\right)^{-1} \left[\tau \sum_{\omega} \left((\rho\bar{v})^*, n\right) h_{\omega} + \sum_{\omega} \frac{\bar{p}^n + \gamma M^2 p_d^n + \text{Hs}(e \cdot x)}{\tau^2} \times \left(\frac{1}{T^{l+1} r_T + 1} - \frac{1}{T^n r_T + 1}\right) h_1 h_2 h_3\right], \quad (3.10)$$

$$\left(\text{div}_h \text{grad}_h - \frac{\gamma M^2}{\tau^2 (T^n r_T + 1)}\right) (\delta p_d)^* = \frac{\text{div}_h(\rho\bar{v})^*}{\tau} + \frac{(\delta\bar{p})^*}{\tau^2 (T^n r_T + 1)} + \frac{\bar{p}^n + \gamma M^2 p_d^n + \text{Hs}(e \cdot x)}{\tau^2} \times \left(\frac{1}{(T^{l+1} r_T + 1)} - \frac{1}{(T^n r_T + 1)}\right), \quad l = l+1, \quad (3.11)$$

$$T^{n+1} = T^l, \quad \rho^{n+1} = \frac{p^n + (\delta\bar{p})^* + \gamma M^2 (\delta p_d)^* + \text{Hs}(e \cdot x)}{T^{n+1} r_T + 1},$$

$$v^{n+1} = \left((\rho\bar{v})^* - \tau \text{grad}_h(\delta p_d)^*\right) / \rho^{n+1}, \quad \delta\bar{p} = (\delta\bar{p})^* + \gamma M^2 V_{\omega}^{-1} \sum_{\omega} (\delta p_d)^* h_1 h_2 h_3,$$

$$\delta p_d = (\delta p_d)^* - V_{\omega}^{-1} \sum_{\omega} (\delta p_d)^* h_1 h_2 h_3, \quad p_d^{n+1} = p_d^n + \delta p_d, \quad \bar{p}^{n+1} = \bar{p}^n + \delta\bar{p}.$$

Индекс «*» означает промежуточные значения, индекс n — значения на n -м временном слое, а $n+1$ — на $(n+1)$ -м временном слое. Hs — функция Хевисайда; e — единичный вектор направления силы тяжести.

В уравнении (3.8) оператор $L_h(\bar{v}^n)\rho\bar{v}$ аппроксимирует конвективные слагаемые и часть вязких членов, а именно

$$L(\bar{v})\rho v_i = \text{div}(\rho v_i \bar{v}) - \text{div}\left(\frac{\mu}{\text{Re}} \text{grad } v_i\right).$$

Член S^n аппроксимирует на старом временном слое правую часть уравнения импульса (3.6), из которого вычитается член $\text{div}(\mu/\text{Re grad } \bar{v})$. Оператор $G_n(\rho \bar{v}^n)T$ приближает конвективные члены и слагаемые удельной теплопроводности в уравнении энергии (3.7).

3.2.1. Результаты тестирования развитого алгоритма

Предложенный алгоритм был валидирован на стандартной проблеме свободного конвективного течения в квадратной полости с разнотемпературными стенками [30]. Следует заметить, что в наших предсказаниях потока воздуха в квадратной полости использовались полные уравнения Навье—Стокса вместе с законами Сазерленда для коэффициента теплопроводности и вязкости. В области умеренных давлений (до десятков атмосфер) температурную зависимость динамической вязкости проще всего вычислять по формуле Сазерленда

$$\mu_0(T) = \mu_0(0^\circ\text{C}) \frac{273,2 + S_s}{T + S_s} \left(\frac{T}{273,2} \right)^{3/2},$$

где S_s — постоянная Сазерленда, значения которой для газов можно найти в справочной литературе.

Предварительное численное предсказание посредством развитой методики показано на рис. 3.1. Температура на левой и правой границах полости — соответственно 300 и 900 К.

Хорошее совпадение было получено с установившимися эталонными решениями [30].

Следующая проблема связана со смешанной конвекцией в канале с локальным нагревом на верхней границе. Рассматривается двумерный поток воздуха в поле силы тяжести в плоском канале длиной L и высотой H с горячим пятном на верхней границе (рис. 3.2).

С левой стороны в канал втекает однородный поток газа с температурой T_0 и горизонтальной скоростью V_0 . На нижней и верхней границах для скорости заданы условия прилипания. Температура установлена равной T_0 всюду за исключением участка $l_0 \leq x \leq l_0 + l_{ht}$ на верхней границе, где температура установлена равной T_{ht} . На правой границе происходит свободный отток газа из канала.

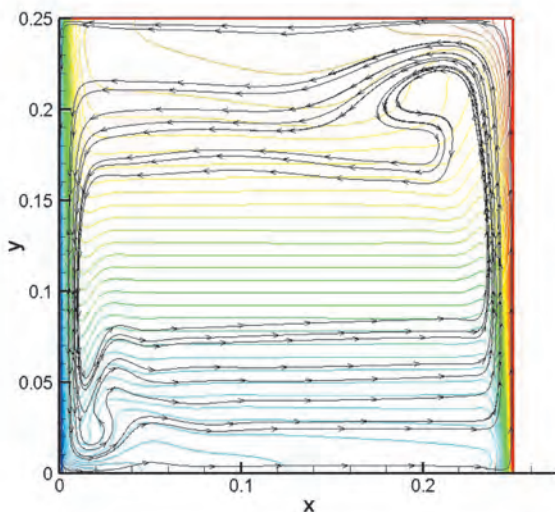


Рис. 3.1. Поле температур и линии тока для задачи свободно конвективного течения в квадратной полости

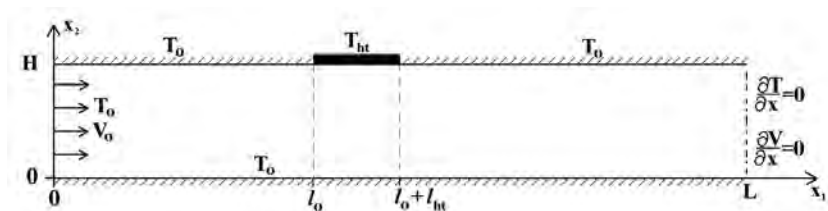


Рис. 3.2. Поток в канале с горячим пятном на верхней границе. Область потока и граничные условия

Рассматриваются стационарные потоки, которые находятся методом установления. В вычислениях использована сетка 101×81 .

Вычисления выполнены при следующих значениях параметров, определяющих проблему: $H = 0,005—0,075$ м, $L = 0,3$ м, $l_0 = L/2$, $l_{ht} = 0,04$ м, $P_0 = 101\,330$ Па (1 атм), $V_0 = 0,05$ м/с, $T_0 = 300$ К, $T_{ht} = 1473$ К, $r_T = 3,91$, $\gamma = 1,4$, $Pr = 0,708$, $C_p = 1006$ Дж/(кг·К⁻¹), $\mu_0 = 1,983 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с⁻¹), $S = 110$ К.

Безразмерные числа Рейнольдса Re , Грасгофа $Gr = \beta g L^3 \Delta T / \nu^2$, где β — температурный коэффициент объемного расширения; $\nu = \mu / \rho$ — кинематическая вязкость, и Маха M изменяются в пределах:

$$Re = 14,8—222, Gr = 1,68 \cdot 10^7, M = 1,44 \cdot 10^{-4}.$$

Пространственная высота канала L_0 выбрана равной H .

Исследованы зависимости количественных и качественных характеристик потоков от высоты канала.

На рис. 3.3—3.5 представлены результаты вычислений (линии тока векторного поля импульса) для каналов высотой 0,005, 0,015 и 0,075 м.

На высоте канала H свыше 5 мм наблюдается возвратное течение к передней границе горячего пятна. Несмотря на то что число Маха близко к значению 10^{-4} , этот поток сильно сжимаем. Безразмерная плотность в области потока изменяется от 1 до 0,2 относительно горячего пятна.

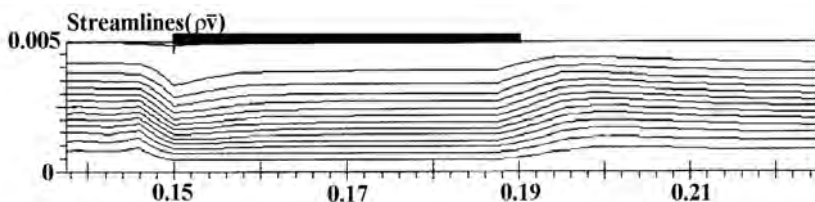


Рис. 3.3. Поток в канале с горячим пятном на верхней границе (линии тока). Высота канала $H = 0,005$ м, $Re = 14,8$, $Gr = 1,68 \cdot 10^4$, $M = 1,44 \cdot 10^{-4}$, $Pr = 0,708$, $r_T = 3,91$, $\gamma = 1,4$

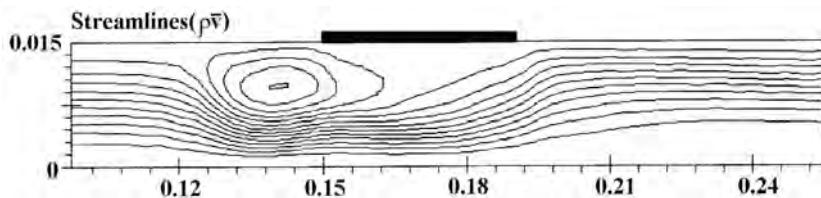


Рис. 3.4. Поток в канале с горячим пятном на верхней границе (линии тока). Высота канала $H = 0,015$ м, $Re = 44,5$, $Gr = 4,54 \cdot 10^5$, $M = 1,44 \cdot 10^{-4}$, $Pr = 0,708$, $r_T = 3,91$, $\gamma = 1,4$

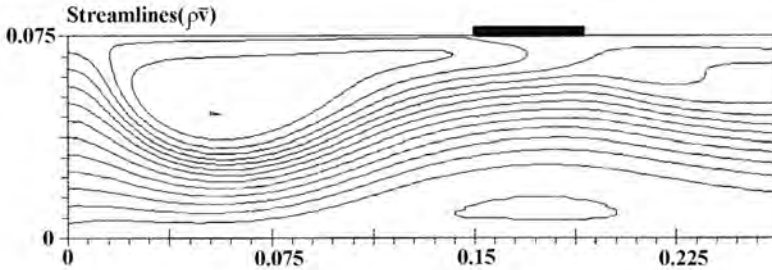


Рис. 3.5. Поток в канале с горячим пятном на верхней границе (линии тока).
 Высота канала $H = 0,075$ м, $Re = 222$, $Gr = 5,68 \cdot 10^7$, $M = 1,44 \cdot 10^{-4}$,
 $r_T = 3,91$, $\gamma = 1,4$

Вычисления показали, что возникновение возвратного течения вызвано присутствием выталкивающей силы, а не расширением газа за счет нагревания. При отсутствии силы тяжести возвратное течение в вычислениях отсутствует. Полученные результаты хорошо согласуются с расчетными и экспериментальными данными для подобной проблемы [31].

3.3. Монотонные схемы для решения уравнения адвекции

В настоящее время особое внимание в литературе уделяется разностным схемам TVD. Безусловная монотонность достигается за счет нелинейного ограничения потоков в исходной схеме с направленными разностями второго порядка. Мы строим монотонные однородные нелинейные разностные схемы для уравнения переноса на основе регуляризации (возмущения) схемы второго порядка аппроксимации. В качестве производящих выбираются схемы со стандартными аппроксимациями первой производной второго порядка центральными разностями [32].

Рассмотрим схему с направленными разностями

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \bar{a}^n y_{\bar{x}}^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

с нелинейным коэффициентом

$$\bar{a}^n = a^n \left(1 + \frac{h}{2} \frac{y_{\bar{x}\bar{x}}^n}{y_{\bar{x}}^n} \right). \quad (3.13)$$

Нелинейная разностная схема (3.12) будет монотонной, если

$$\tilde{a}^n \geq 0, \quad (3.14)$$

$$\max_i \tilde{a}_i^n \frac{\tau}{h} \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.15)$$

Из (3.12)—(3.15) следует, что нарушение монотонности наблюдается в окрестности экстремумов разностного решения.

За счет малого возмущения коэффициентов (с сохранением основных свойств исходной схемы — второго порядка аппроксимации) получим схему (3.15), для которой будут выполнены достаточные условия монотонности и устойчивости (3.14) и (3.15). Для этого в (3.13) перепишем коэффициент в более удобном виде:

$$\tilde{a}^n = a^n \chi^n, \quad (3.16)$$

где

$$\chi^n = \left(1 + \frac{h}{2} \frac{y_{xx}^n y_x^n}{|y_x^n|^2} \right), \quad (3.17)$$

и будем возмущать коэффициент χ^n , полагая

$$\chi^n = \left(1 + \frac{hz}{2} \frac{y_{xx}^n y_x^n}{|y_x^n|^2 + \gamma h^2 |y_{xx}^n|^2} \right)$$

с параметром γ . Дополнительные (регуляризирующие) слагаемые в χ^n из (3.17) имеют третий порядок по h . Тем самым регуляризованная схема (3.12), (3.16), (3.17) аппроксимирует одномерное уравнение адвекции в недивергентной форме со вторым порядком по пространству.

Сформулируем условия монотонности схемы (3.12), (3.16), (3.17). Коэффициент \tilde{a}^n (условие (3.14)) будет неотрицательным, когда $\gamma = 0,25$. Шаги сетки должны удовлетворять условию (3.15), которое с учетом (3.6) и (3.17) эквивалентно неравенству

$$\max_i a_i^n \frac{\tau}{h} \left(1 + \frac{1}{4\gamma} \right) \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

Тем самым для регуляризованной схемы (3.12), (3.16), (3.17) при минимально допустимом значении параметра $\gamma = 0,25$ максимально допустимый шаг по времени согласно неравенствам (3.15) и (3.18) уменьшается в два раза по сравнению с явной схемой с направленными разностями.

Кроме приведенной схемы также разрабатывается бездиссипативная условно монотонная разностная схема для решения уравнения адвекции:

$$\begin{aligned} (y_i^{n+1} - y_i^n) + R(y_i^n - y_{i-1}^n) + QR(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + \\ + qR(y_{i+2}^n - 2y_i^n + y_{i-2}^n) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

В данной схеме параметры q и Q , которые зависят только от числа Куранта, выбираются так, чтобы диссипативная поверхность равнялась 1 в диапазоне чисел Куранта $R \in (0, 0,5)$.

На рис. 3.6 и 3.7 показаны дисперсионные и диссипативные поверхности, характеризующие свойства схемы (3.19) в диапазоне чисел Куранта от 0 до 1. Тестирование предложенной регуляризованной разностной схемы было проведено с помощью тестовой задачи [33]. Рассматривалась эволюция начального профиля в виде цилиндра единичной высоты с радиусом 0,1 и центром $(1/2, 1/4)$. На рис. 3.8 представлены результаты расчетов на моменты времени $t = 1/4, 1/2, 3/4, 1$ при использовании регуляризованной разностной схемы. Численное решение получено на равномерной прямоугольной сетке с $h_x = 1,0025$, $\alpha = 1, 2$.

Для сравнения на рис. 3.9 приведено разностное решение, полученное при использовании монотонной разностной схемы первого порядка аппроксимации направленными разностями. Аналогичные данные при эволюции начального профиля в виде параллелепипеда и конуса представлены на рис. 3.10 и 3.11. Расчеты на более длинные временные промежутки (2, 3 и более оборотов) показали, что качество разностного решения сохраняется. В частности, практически не проявляется неконсервативность разностной схемы.

Разработанная методика легла в основу вычислительного CFD-модуля для моделирования пузырьковых течений на основе трехмерных уравнений Навье—Стокса. Ниже рассмотрены особенности валидации разработанного программного обеспечения.

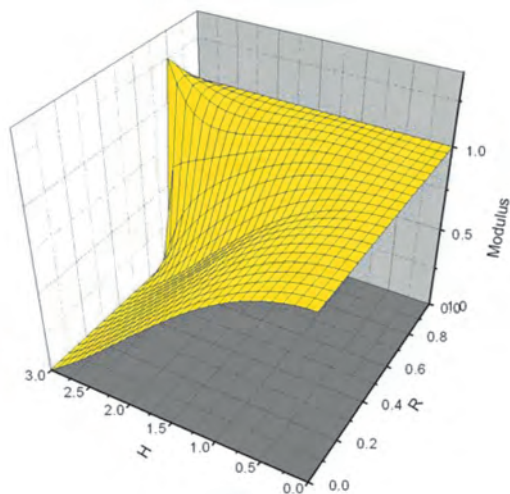


Рис. 3.6. Дисперсионная поверхность, $R \in (0, 1)$

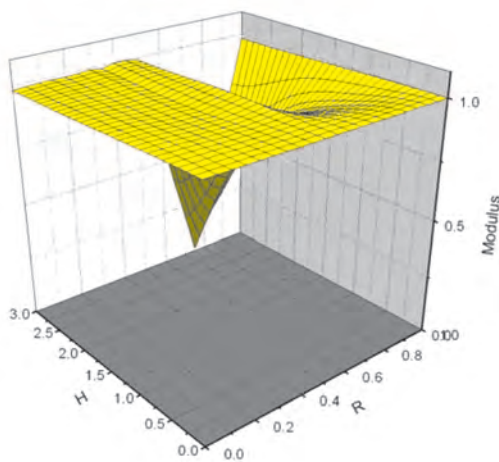


Рис. 3.7. Диссипативная поверхность, $R \in (0, 1)$

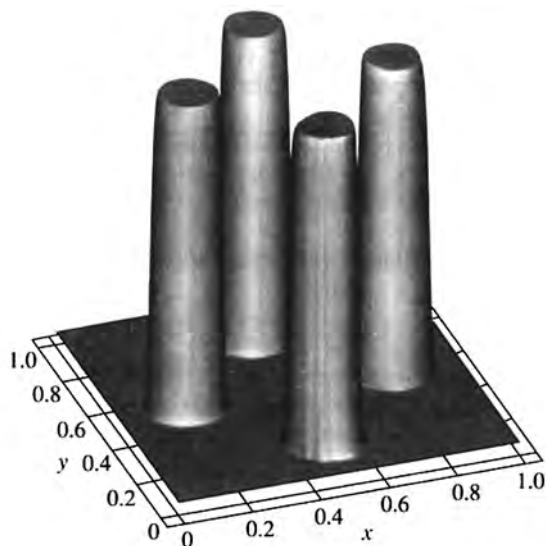


Рис. 3.8. Вращение цилиндра с помощью регуляризованной разностной схемы

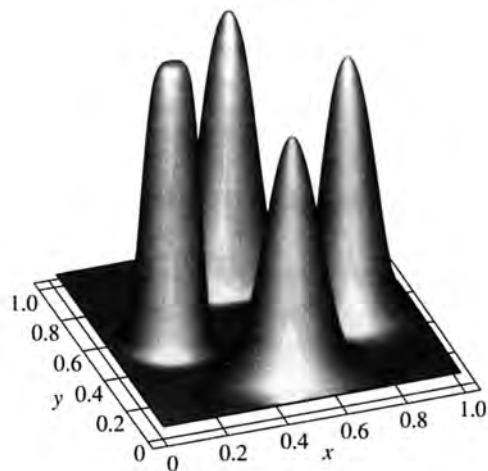


Рис. 3.9. Вращение цилиндра с помощью монотонной разностной схемы первого порядка аппроксимации с направленными разностями

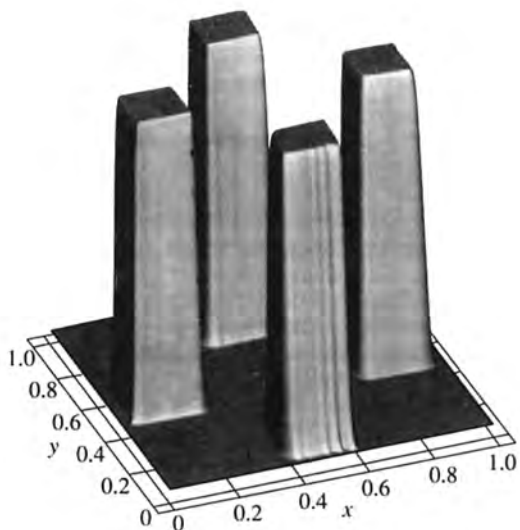


Рис. 3.10. Вращение параллелепипеда с помощью регуляризованной разностной схемы

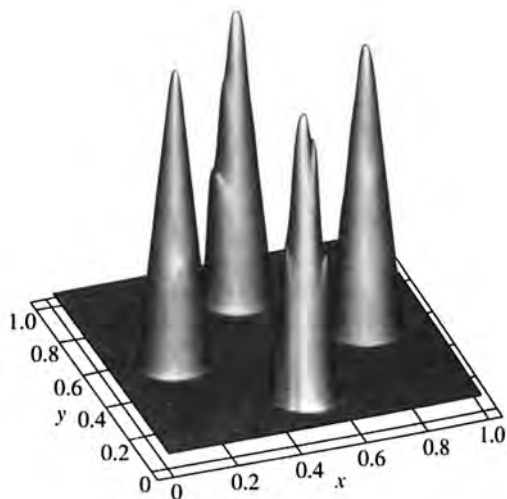


Рис. 3.11. Вращение параллелепипеда с помощью монотонной разностной схемы первого порядка аппроксимации с направленными разностями

3.4. Быстрый алгоритм для решения уравнения давления

При разработке многомерных гидродинамических моделей, составляющих основу многомерных теплогидродинамических кодов, возникают проблемы не только точности численного моделирования, но и выбора оптимального численного метода.

Согласно [32] критерий выбора оптимального метода — эффективность и вычислительная устойчивость. Применительно к задачам гидродинамики жидкости с переменной плотностью критерием является количество времени центрального процессора (CPU) в процентах, затрачиваемое на один шаг по времени для решения уравнения давления.

Для решения эллиптических уравнений с переменными коэффициентами, например уравнения Пуассона для поправки давления δp вида

$$\operatorname{div}_h \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_h \delta p \right) = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h \mathbf{v} \quad \text{или в операторном виде } Ay = f,$$

обычно применяют метод сопряженного градиента, который занимает до 90% CPU. Поэтому важно найти алгоритмы, требующие меньше времени центрального процессора на один расчетный шаг.

Для решения 3D-разностных эллиптических задач применяются и прямые, и итерационные методы [32]. Прямые методы в многомерном случае можно использовать для весьма специального класса задач, а именно для оператора Лапласа в параллелепипеде. Однако наличие прямых методов обращения оператора Лапласа в параллелепипеде в случае краевых условий Неймана позволяет использовать такие операторы в качестве оператора B для неявных итерационных схем решения вырожденных уравнений [32].

Смысл рассмотрения итерационных методов с вырожденным оператором B заключается в следующем. Если оператор B таков, что нахождение решения уравнения $By_{k+1} = By_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f)$ осуществляется значительно проще, чем исходного операторного уравнения $Ay = f$, а отношение $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ не слишком мало, то такой способ поиска приближенного решения уравнения $Ay = f$ может оказаться целесообразным [32].

Применение метода, теоретические основы которого изложены в [32], к решению эллиптических уравнений с переменными коэффициентами позволяет сократить количество времени центрального процессора на один вычислительный шаг до 10% CPU. Подобная производительность достигается:

- за счет особого способа расщепления переменных коэффициентов исходного эллиптического уравнения на две части: неявную, где среднее значение коэффициента $1/\rho$ в операторе — $\operatorname{div}((1/\rho) \operatorname{grad} \delta p)$, и явную;

- за счет переноса явной части в правую часть уравнения для поправки давления и последующего решения уравнения Пуассона с модифицированной правой частью итерационным методом с чебышевским набором параметров с предобуславливателем и применением быстрого преобразования Фурье.

Преимущества метода показаны на примере решения задачи Неймана для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами: $0 < c_1 \leq c(x) \leq c_2$ в кубе со стороной $l_\alpha = \pi$ на равномерной сетке:

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = -\phi(x), \quad x \in G,$$

$$-c \frac{\partial u}{\partial n} = g(x), \quad x \in \gamma,$$

где $0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Точное решение для указанной задачи имеет вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3$$

и удовлетворяет условию $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на границе куба.

Коэффициент $c(x_1) = ax_1 + b$ задавался таким образом, чтобы отношение его значений на концах отрезка $x_1 = \pi$ и $x_1 = 0$ соответствовало различным значениям $c_2/c_1 = (a\pi + b)/b$.

Правая часть уравнения имела вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3(ax_1 + b) - a \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3.$$

В качестве критерия сходимости итерационного процесса была выбрана евклидова норма невязки в пространстве сеточных функций H .

Ниже приведены результаты сравнения метода сопряженных градиентов с методом простой итерации, двухслойным методом Чебышева и трехслойным полуитерационным методом Чебышева по количеству итераций (рис. 3.12). Количество итераций сравнивается при достижении неравенства $\|Ay - f\| < \varepsilon$ для различных значений ε и размерностей сетки по первому направлению N .

Из рис. 3.12 следует, что метод сопряженных градиентов предпочтительнее для $N = 9$ при $c_1/c_2 > 10$, для $N = 17$ при $c_1/c_2 > 40$. Соответственно при увеличении количества точек значение отношения c_2/c_1 , при ко-

тором предпочтительнее использовать метод сопряженных градиентов, будет расти. При $N = 33$ $c_2 / c_1 > 200$, при $N = 65$ $c_2 / c_1 > 10^3$.

Было проанализировано изменение числа итераций в зависимости от отношения c_2/c_1 и размерности сетки. В методе сопряженных градиентов количество итераций слабо зависит от величины отношения c_2/c_1 и в большей степени — от размерности сетки, тогда как методы Чебышева в меньшей степени зависят от параметра N и в большей степени — от величины отношения c_2/c_1 .

Таким образом, альтернативой методу сопряженных градиентов может служить итерационный метод Ричардсона с набором параметров Чебышева, использующий в качестве предобусловливателя FFT-солвер для оператора Лапласа с постоянным множителем. Применение этого подхода для решения эллиптических уравнений с переменными коэффициентами позволяет достичь многократного ускорения по сравнению с обычно используемым методом сопряженных градиентов [32].

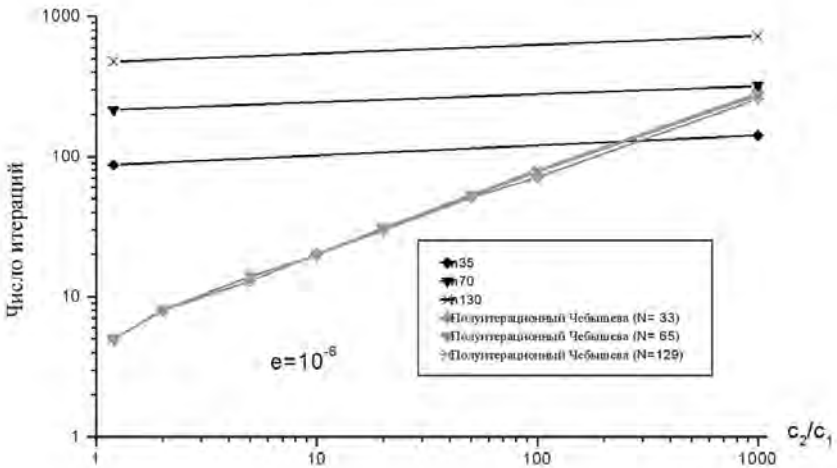


Рис. 3.12. Количество итераций для метода сопряженных градиентов при различных значениях N в сравнении с полуитерационным методом с набором параметров Чебышева с предобусловливателем для $\varepsilon = 10^{-6}$. Метод сопряженных градиентов: $n = 35, n = 70, n = 130$. Полуитерационный метод с набором параметров Чебышева: $n = 33, n = 65, n = 129$

3.5. Кривизна и поверхностное натяжение

Термин для описания сил поверхностного натяжения, появляющийся в уравнениях движения, может быть аппроксимирован в виде [34]

$$f \approx -|\text{grad } \chi|^2 K \cdot n,$$

где n — единичный вектор нормали к поверхности раздела; K — положительная константа; κ — локальная кривизна, определяемая следующим образом:

$$\kappa = -\text{grad } n = -\text{grad} \cdot \left(\frac{\text{grad } \chi}{|\text{grad } \chi|} \right).$$

Интегрирование уравнения по интерфейсной области (ds) дает модель непрерывной поверхностной силы (CSF) [35]

$$\int \sigma \delta(x - x_f) n ds,$$

где σ — поверхностное натяжение, которое предполагается постоянным поперек полной толщины интерфейсного подслоя; $\delta(x - x_f)$ — дельта-функция Дирака с x_f , являющейся мгновенным местоположением поверхности раздела. Дельта-функция появляется в этом выражении, потому что оно было получено из соотношения

$$\text{grad } \chi = \int \delta(x - x_f) n ds.$$

Поверхностное натяжение σ отражает избыток капиллярной энергии, сконцентрированной на поверхности раздела на единицу интерфейсной площади, вызванную изменением χ через интерфейсный подслой.

Рассматриваемая вычислительная методика моделирования пузырьковых и капельных течений, включающая в себя эффективные вычислительные CFD-алгоритмы для 3D-расчетов двухфазных течений с явным выделением межфазной границы и учетом сил поверхностного натяжения, легла в основу CFD-вычислительного модуля для моделирования двухфазных течений. Ниже рассмотрены особенности валидации и верификации разработанного программного обеспечения.

4. Верификационный и валидационный аспект (бенчмарки и их численные предсказания)

Верификация вычислительного модуля для прямого моделирования двухфазных течений — важный этап применения методов вычислительной гидродинамики для предсказания тепло- и гидродинамических процессов в проектируемых и эксплуатируемых элементах АЭС. Последовательность разработки и применения соответствующих методов может быть схематично представлена в следующем виде:

- разработка расчетных кодов для прямого моделирования двухфазных течений;
- верификация разработанных кодов на основе существующих эмпирических корреляций, описывающих двухфазное течение в стационарных условиях и/или при простой геометрии канала;
- применение верифицированных кодов для описания двухфазного течения в нестационарных условиях (в переходных режимах) и/или в условиях сложной геометрии канала;
- получение в результате расчетов новых корреляционных зависимостей для нестационарных двухфазных течений в условиях сложной геометрии для применения в существующих теплогидравлических кодах.

Как уже указывалось, основной акцент в настоящей статье сделан на валидации и верификации вычислительной математической модели с использованием как доступных из литературы тестов, так и результатов экспериментов, полученных в ИТ СО РАН.

Одним из наиболее часто встречающихся видов двухфазных течений является пузырьковое течение. Этот режим реализуется при развитом кипении жидкости на различно ориентированных поверхностях, барботаже, двухфазном течении в вертикальных и горизонтальных каналах. Поэтому разрабатываются система тестовых расчетов и матрицы верификации с использованием существующих эмпирических соотношений, описывающих установившееся движение одиночного газового пузырька в большом объеме несжимаемой жидкости в широком диапазоне чисел Рейнольдса. В дальнейшем планируется расширить верификационную матрицу для описания всплытия пузырька в каналах различной формы (цилиндрических, щелевых), а также коллективных эффектов (взаимовлияние пузырьков при барботаже) и фазовых переходов в системе «вода — газ».

В случае движения газового пузырька основной величиной, в отношении которой может проводиться верификация расчетного кода прямого моделирования, является установившаяся скорость пузырька. Установившееся движение одиночного пузырька, всплывающего в поле силы тяжести, оп-

ределяется равновесием между силой Архимеда, выталкивающей пузырек, и силой вязкого сопротивления. При этом в зависимости от размера пузырька реализуются различные режимы течения [46]. Для маленьких пузырьков, числа Архимеда которых $Ar = g(\rho' - \rho'')R^3 / (\rho'v'^2)$ удовлетворяют условию $Ar < 100(\delta_{\sigma g} / R)^{1/2}$, реализуется вязкий режим всплытия. Здесь $\delta_{\sigma g}$ — линейный масштаб капиллярно-гравитационного взаимодействия. При этом приведенная безразмерная скорость всплытия $\bar{U}'' = U''(gR(\rho' - \rho'')/\rho')^{-1/2}$ по мере роста размера пузырька (и соответственно числа Рейнольдса) меняет зависимость от числа Архимеда с $\bar{U}'' \propto Ar^{1/2}$ (классическая формула Адамара—Рыбчинского [47]) до $U \propto Ar^{1/4}$ (эмпирическое соотношение Пиблса—Гарбера [48]).

При дальнейшем увеличении размера пузырька, когда его эквивалентный радиус $R = (3V/4\pi)^{1/3}$, где V — объем, становится сравним с $\delta_{\sigma g} = [\sigma/g(\rho' - \rho'')]^{1/2}$, происходит изменение формы пузырька со сферической на грибообразную [48]. Вызванное этим резкое увеличение сопротивления приводит к относительной стабилизации скорости всплытия в широком диапазоне размеров пузырька.

При $Ar > 2000(\delta_{\sigma g} / R)^{3.8}$ величина приведенной скорости $\bar{U}'' \propto (R/\delta_{\sigma g})^\beta$, при этом β меняется от $-5/6$ до 0 в зависимости от отношения $R/\delta_{\sigma g}$.

Приведенные зависимости адаптируются для непосредственного сравнения с результатами расчетов, полученными методом прямого моделирования (система «вода — воздух»). Подобное сравнение позволит проверить адекватность описания рассматриваемого двухфазного течения с учетом влияния поверхностного натяжения и улучшить вычислительный модуль.

Верификация и валидация разрабатываемого программного обеспечения на наборе численных и экспериментальных тестов, позволяющих оценить такие аспекты, как скорость всплытия и эволюция формы всплывающего пузырька, траектории всплытия отдельного пузырька и группы пузырьков, а также изменение характера течения при всплытии группы пузырьков, позволят в случае успеха перейти к моделированию инженерных задач и получить адекватные предсказания таких важных явлений, как интенсификация теплообмена в трубе и корреляционные зависимости от соответствующих параметров.

В этом подразделе представлены результаты верификации разработанного вычислительного CFD-модуля для моделирования пузырьковых течений

на основе трехмерных уравнений Навье—Стокса. Предварительные результаты валидации можно найти также в [1; 2; 28; 29].

Тест 0 на давление внутри капли. В табл. 4.1 представлены значения давления в пузырьке в зависимости от сетки.

Таблица 4.1. Давление в пузыре в зависимости от сетки.
 $R = 0,125, \sigma = 1$

Сетка	17×17	33×33	65×65	129×129	257×257	
2D	8,935	8,666	8,106	8,034	8,012	$P = 8$
3D	17,561	17,023	16,521	16,108	16,012	$P = 16$

Далее представлена матрица валидации по материалам, опубликованным в [36]. Для тестирования были отобраны 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 11-й и 17-й тесты.

Тест 1 на определение формы пузырька. Этот тест можно рассматривать как предварительный для валидации новых численных методов. Он заслуживает особого внимания, ибо его результат заключается не только в определении окончательной формы пузыря (что является реальным критерием для сравнения), но и в точном построении графика скорости пузыря начиная от состояния покоя вплоть до достижения им заключительного асимптотического значения.

На рис. 4.1 показано сравнение численных предсказаний с данными [36] по скорости роста пузыря в зависимости от времени. Наблюдается хорошее совпадение по динамике и форме траектории кривой скорости роста пузыря.

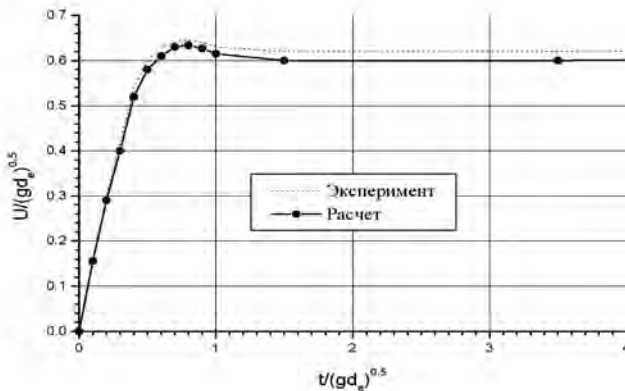


Рис. 4.1. Подъем сферического сегмента пузыря в застойной жидкости

Качественную картину степени деформации пузырей дают наблюдения Р. М. Ладыженского [37; 38] за воздушными пузырями, свободно всплывающими в большом объеме воды (рис. 4.2).

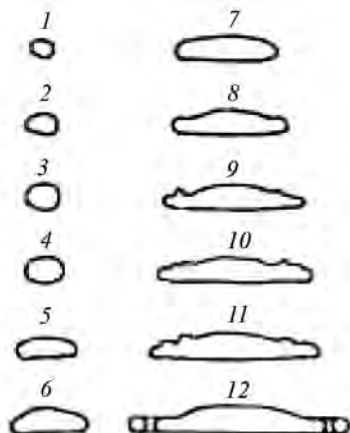


Рис. 4.2. Деформация воздушных пузырьков, всплывающих в воде [38]

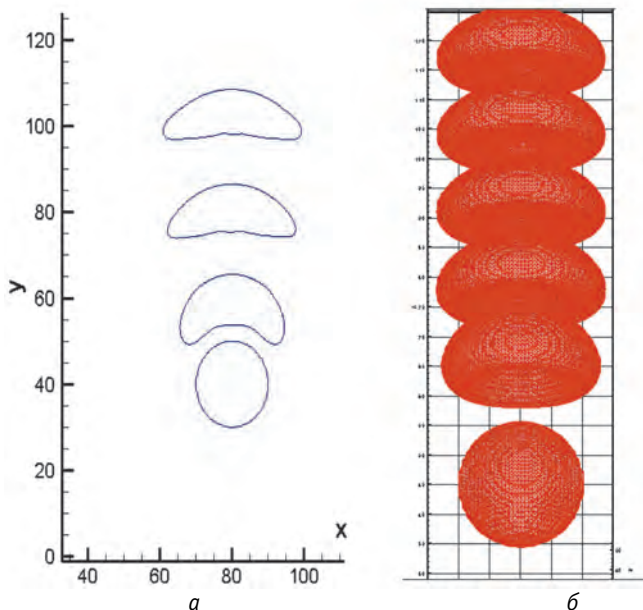


Рис. 4.3. Картины всплытия пузырька (численные предсказания): а — 2D, б — 3D

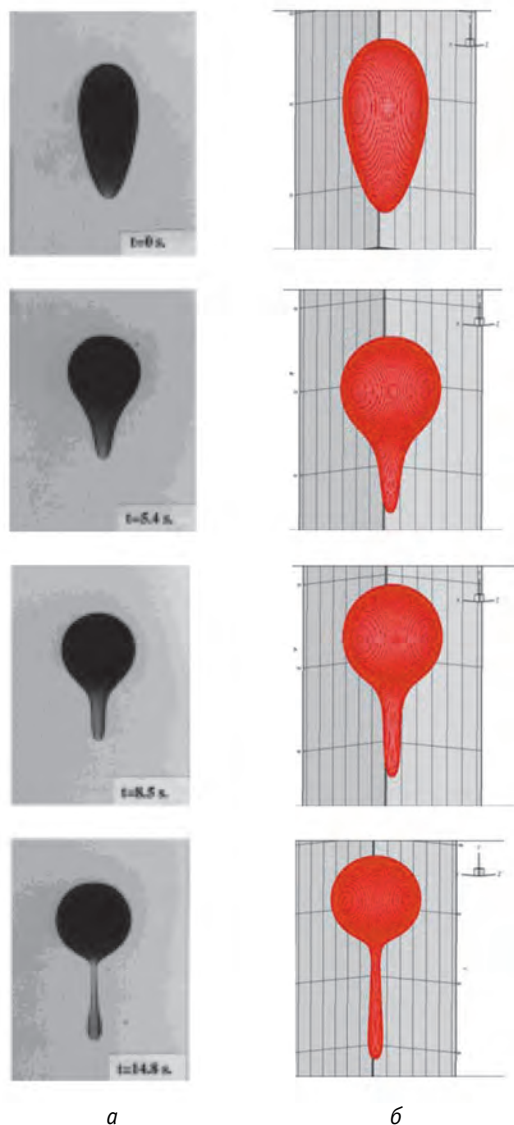


Рис. 4.4. Эксперимент по свободному всплытию жидкого включения в покоящейся жидкости: $\lambda = 0,6$, $Ca = 1,4 \pm 0,2$, $\Delta\rho = 17 \text{ кг/м}^3$ (а) и результаты численного моделирования свободного всплытия жидкого включения в покоящейся жидкости: $\lambda = 0,6$, $Ca = 1,4 \pm 0,2$, $\Delta\rho = 17 \text{ кг/м}^3$ (б)

С увеличением объема пузырька (и, следовательно, числа Рейнольдса) его деформация возрастает. Постепенно из шара он превращается в сплюснутый в направлении движения эллипсоид. Дальнейший рост объема дает форму сферического колпачка с почти плоской нижней поверхностью.

При достаточно больших числах Рейнольдса на кромке купола образуется валик (тор) вследствие того, что падение давления в области отрыва пограничного слоя на кромке сопровождается падением капиллярного давления, т. е. увеличением радиуса кривизны. Продолжая увеличивать Re , можно наблюдать отрыв от нижней кромки купола тора и последующее его разрушение. Существование тора длится весьма короткое время.

Для сравнения на рис. 4.3 приведены двумерные (а) и трехмерные (б) качественные картины одиночного всплывающего пузырька, полученные в результате численных предсказаний. Как видно из рисунка, пузырек проходит при всплытии те же фазы деформации, что и показанные на рис. 4.2.

Тест 2 на стабильность пузырька, свободно всплывающего под действием только силы тяжести, которая, как известно, нелинейным образом зависит от начальных условий. В частности, существует критическое капиллярное число (Ca — капиллярное число, отношение силы вязкости к капиллярным силам), вне которого всплытие пузырька становится непостоянным, и это значение нелинейно зависит от формы пузырька. Когда возникает неустойчивость, интерфейсное движение зависит только от равновесия между эффектами поверхностного натяжения и вязких сдвиговых напряжений. Эта ситуация представляет собой серьезный тест для описания поверхностного натяжения и вязких напряжений на поверхности раздела для вычислительных кодов, имеющих дело с поверхностями раздела. Эксперименты проводились в силиконовом масле, вязкость которого сопоставима с внутренним числом жидкости [39].

Внутренняя жидкость — смесь касторового масла и 3%-ного раствора метанола. На рис. 4.4а показана эволюция формы жидкого включения в момент $t = 0$ и в более поздние моменты $t = 5,4, 8,5$ и $14,8$ с.

Тест 11 алгоритма адвекции объемной фракции для аналитического поля скоростей. В нем рассматривается только вращение исходного профиля, поэтому деформации начальной граничной формы не происходит. Интерес к проблемам адвекции вызван тем, что они могут быть обработаны всеми методами прослеживания поверхности раздела независимо от их типа (Лангранжа или Эйлера) при невысокой стоимости вычислений. Оценка численной диффузии, сохранения массы и точности адвекции демонстрирует качество используемых методик прослеживания поверхности раздела.

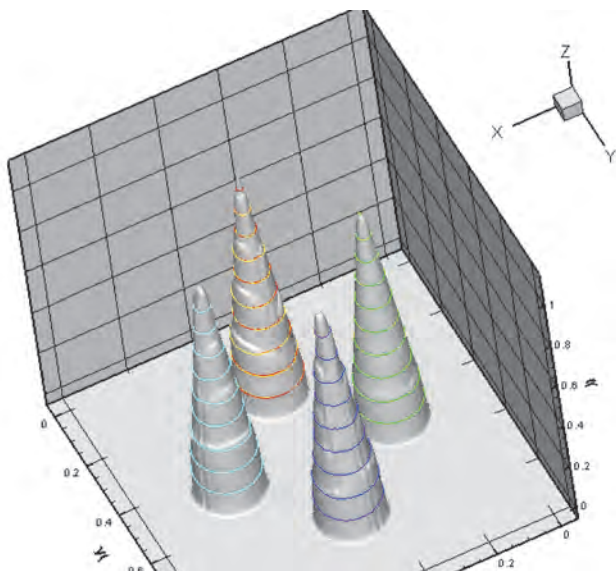


Рис. 4.5. Вращение конуса

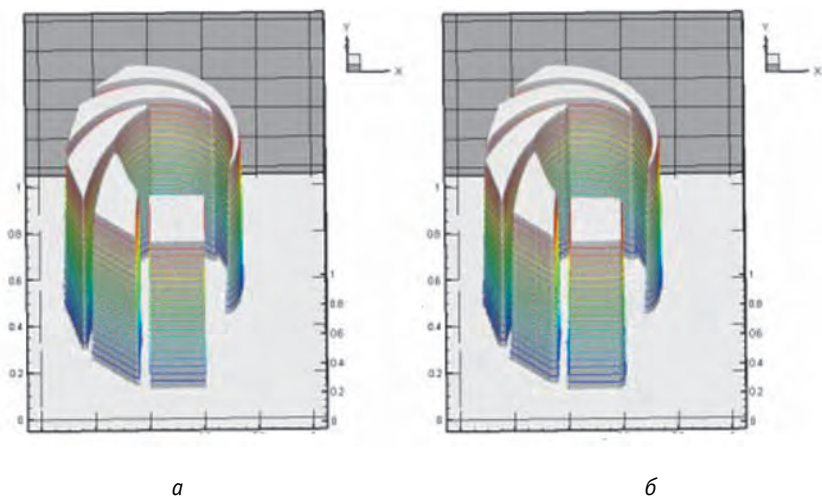


Рис. 4.6. 3D прямое и обратное вращение параллелепипеда:
a — прямое: $u = a \sin \varphi$, $v = -a \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$; *b* — обратное:
 $u = -a \sin \varphi$, $v = a \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

Уравнение переноса имеет автомодельное решение в виде вращающегося вокруг оси начального профиля. В единичном квадрате $\Omega(I_a = 1, \alpha = 1, 2)$ поле скоростей определяется компонентами $v_1 = 2\pi(x_2 - 1/2)$, $v_2 = -2\pi(x_1 - 1/2)$. При этом решение уравнения представляется в виде $u(x, t) = U(\xi, \eta)$. Функция $U(\xi, \eta)$ описывает вращение твердого тела с периодом $T = 1$ вокруг оси $(1/2, 1/2)$ (см. рис. 4.5).

На рис. 4.6 показано прямое и обратное вращение параллелепипеда. Как видно из рисунка, результаты вращения практически совпадают за исключением небольшого дребезга поверхности при обратном вращении (см. рис. 4.6б). Такой эффект прокрутки профиля от начального состояния до конечного деформируемого профиля и обратно, от вытянутого деформируемого профиля в практически исходное не изменяемое состояние достигается благодаря предложенному авторами высокоэффективному алгоритму адвекции.

5. Эксперименты и их численные предсказания

Эксперименты ИТ СО РАН по всплытию воздушных пузырьков в плоском зазоре проводились как для одиночного пузырька, так и для группы пузырьков. Здесь мы в основном ограничимся представлением качественных результатов поведения воздушных пузырьков в плоском зазоре, а именно траекториями пузырьков в плоскости XU , с которыми и будем проводить сравнение.

Эксперименты по всплытию пузырьков проводились на лабораторной установке [40; 41], представляющей щелевой канал толщиной 3 мм, высотой 0,5 м и шириной 0,2 м. Канал заполнялся дистиллированной водой. Генерация пузырьков осуществлялась через капилляры, расположенные в нижней части канала. Диаметр капилляров варьировался. Жидкость внутри рабочего канала была неподвижна. Производились опыты по всплытию одиночных пузырьков различных диаметров, цепочки пузырьков с разными расстояниями между ними, по началу образования и отрыва от капилляра как одиночного пузырька, так и серии пузырьков, по всплытию пузырьков из нескольких источников, коалесценции пузырьков. Фиксация движения пузырьков осуществлялась на скоростную цветную камеру MotionPro, скорость записи изображения варьировалась от 500 до 2000 кадров в секунду.

Полученные изображения обрабатывались по специально разработанному алгоритму на основе современных методов, в том числе спектральной и

адаптивной пространственной фильтрации, морфологического анализа и сегментации, а также нелинейных преобразований полей [40].

Разработанный алгоритм позволил не только фиксировать контур пузырьков, но и следить за эволюцией этого контура во времени. Использование нелинейных преобразований изображений позволило существенно повысить пороговую чувствительность. В результате оказалась возможной динамическая фиксация слабоконтрастных и мелких пузырьков в поле с неравномерным освещением. В ходе цифровой обработки изображения каждому распознанному пузырьку присваивалась своя метка и записывалась полная информация о нем, включавшая координаты центра пузырька, площадь, линейные размеры, эксцентриситет, угол наклона главной оси, контур пузырька. Полученная база данных позволила не только реконструировать траектории движения любого пузырька, содержащегося в исходном кадре, и строить матрицу газосодержания, но и осуществлять 2D- и 3D-визуализацию движений пузырьков.

Простейший пример для случая одиночного пузырька, всплывающего в покоящейся жидкости, приведен на рис. 5.1: показаны расчетные поля скоростей при всплытии пузырька. В случае цепочки пузырьков существенное влияние на траекторию всплытия отдельного пузырька оказывает движение предыдущего пузырька. Начиная с некоторого расстояния между пузырьками каждый последующий пузырек испытывает на себе воздействие гидродинамического следа от предыдущего, что ведет к существенному размытию траекторий по ширине канала.

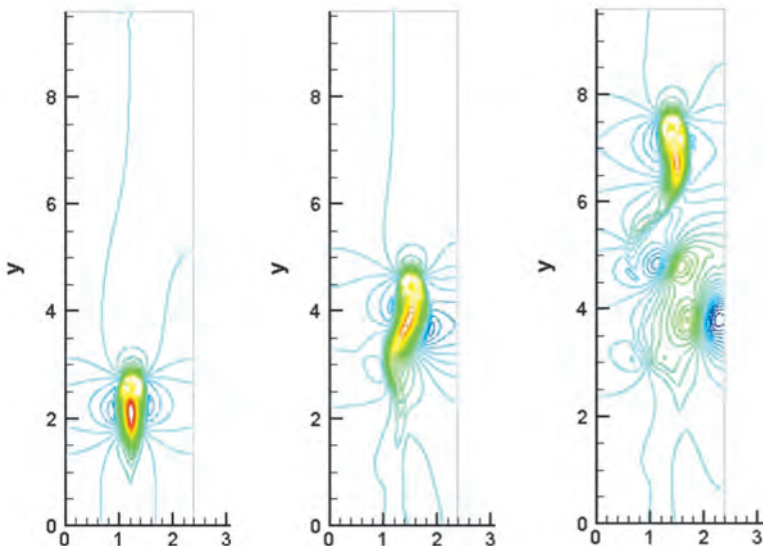


Рис. 5.1. Расчетные поля скоростей всплывающего одиночного пузырька

На рис. 5.2 показаны траектория центра массы всплывающего одиночного пузырька [38] и численные результаты. Траектория всплывающих пузырьков (см. рис. 5.2а) винтообразна, что обусловлено неоднородностью гидродинамического сопротивления при смещении вектора скорости относительно плоскостей симметрии пузырька.

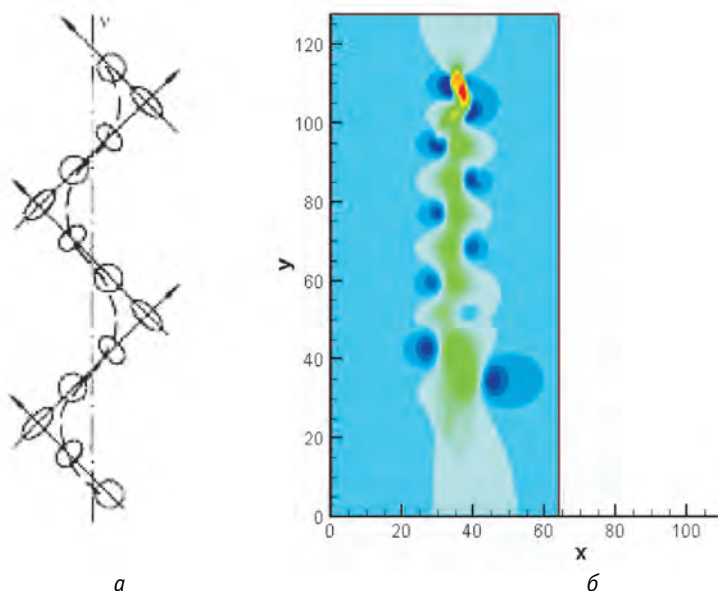


Рис. 5.2. Всплывающие в заполненном водой плоском зазоре воздушные пузырьки: а — траектории [38], б — численная траектория одиночного пузырька, всплывающего в покоящейся воде

На рис. 5.3а приведены результаты численного моделирования формирования «пузырьковой струи» в плоском канале с водой, что хорошо совпадает с картиной, наблюдаемой в эксперименте. Для сравнения на рис. 5.3б показано фото пузырьковой струи в плоском канале с водой, наблюдаемой в эксперименте.

На рис. 5.4 приведено распределение газовой фазы по высоте в сравнении с расчетом, выполненным для условий данного эксперимента. В опытах и в расчетах наблюдается заметная дискретизация распределения газовой фазы на начальном участке всплытия пузырьков, с увеличением расстояния от источника генерации пузырьков эта неравномерность смягчается, что связано с более случайным распределением пузырьков по ширине канала.

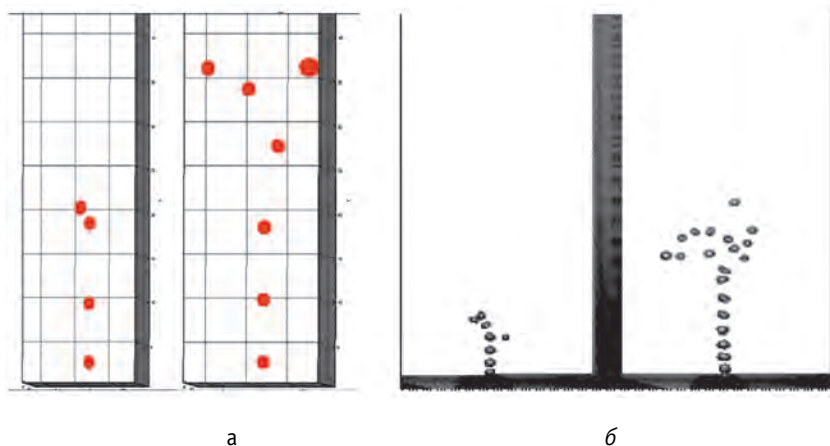


Рис. 5.3. Траектория движения капель за период 20 мс. Время с момента начала расчета — 350 мс, скорость всплывания — 150—250 м/с:
а — численные предсказания, б — эксперимент [2; 41]

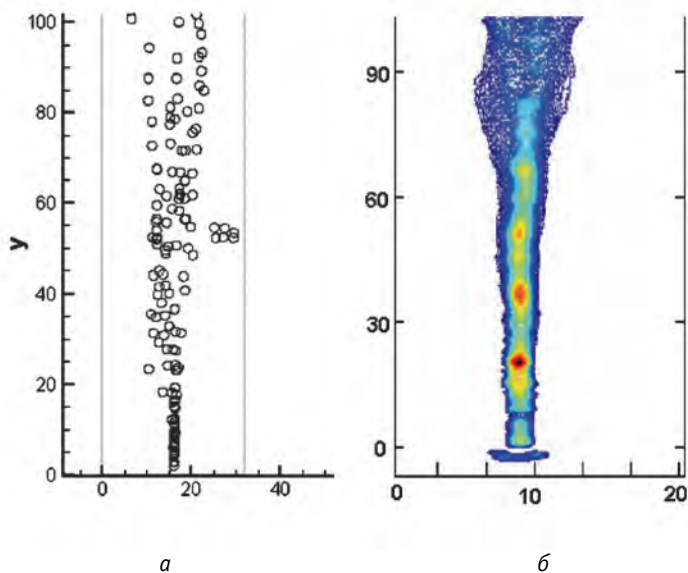


Рис. 5.4. Поле относительной объемной концентрации газовой фазы (газосодержание) в плоском зазоре:
а — численные предсказания, б — эксперимент [2; 41]

Приведенные примеры демонстрируют лишь часть полученных результатов, существует детальная база данных по каждому рассмотренному случаю, а возможности разработанной методики экспериментального исследования пузырьковых течений и обработки экспериментальных данных позволяют существенно расширить эту базу.

6. Результаты применения для прикладных задач

После успешного тестирования разработанная методика была применена для моделирования отдельных видов поверхностных явлений, широко и многообразно используемых в промышленной практике. Например, и гомогенное, и гетерогенное образование зародышей новой фазы существенно сказываются на эффективности теплообменных процессов.

Поверхностными называют явления, которые обусловлены особыми (по сравнению с объемными) свойствами поверхностных слоев жидкостей. Наиболее общее и важное свойство этих слоев — избыточная свободная энергия $F = \sigma S$, где σ — поверхностное (межфазное) натяжение; S — площадь поверхности раздела фаз. Поверхностные явления наиболее выражены протекают в гетерогенных системах с сильно развитой поверхностью раздела фаз, т. е. в дисперсных системах. Самопроизвольные поверхностные явления происходят вследствие уменьшения поверхностной энергии системы. Они могут быть обусловлены уменьшением общей поверхности системы либо снижением поверхностного натяжения на границе раздела фаз. К поверхностным явлениям, связанным с уменьшением общей поверхности, относят явление коалесценции — слияния капель в эмульсиях (или газовых пузырьков в пенах) при их непосредственном контакте.

На рис. 6.1 показано слияние двух капель при движении в наклонном бесконечно длинном канале. Первая капля догоняет вторую (рис. 6.1а), и далее наблюдаются столкновение (рис. 6.1б), прохождение первой капли сквозь вторую и превращение сферической поверхности второй капли в тор (рис. 6.1в). После этого первая капля теряет энергию и замедляет движение, в результате теперь уже вторая капля догоняет первую (рис. 6.1г).

На рис. 6.2 показано падение капли на поверхность с небольшой высоты. При столкновении капли с поверхностью (рис. 6.2а) капля пробивает поверхность и начинает движение вниз под действием силы тяжести (рис. 6.2б). Затем капля достигает дна и расплывается (рис. 6.2в), после чего в силу несмачиваемости вновь собирается и отскакивает от поверхности, при этом выстреливая вверх микроструйку воды (рис. 6.2г).

Казалось бы, такие обыденные и легко воспроизводимые явления должны быть изучены вдоль и поперек, по крайней мере в эксперименте. Поэтому удивительно, что в недавней статье [42] были описаны явления, сопровождающие падение капли воды на поверхность с очень малой высоты, которые никто прежде не замечал.

В совместной работе французских и голландских исследователей описываются результаты наблюдений за падением капли размером 1 мм с высоты всего около 1 см на гидрофобную (несмачиваемую) поверхность. Наблюдения проводились с помощью ультраскоростной видеосистемы, которая позволяла получать до 100 тыс. кадров в секунду и проследить за всеми этапами столкновения капли с поверхностью.

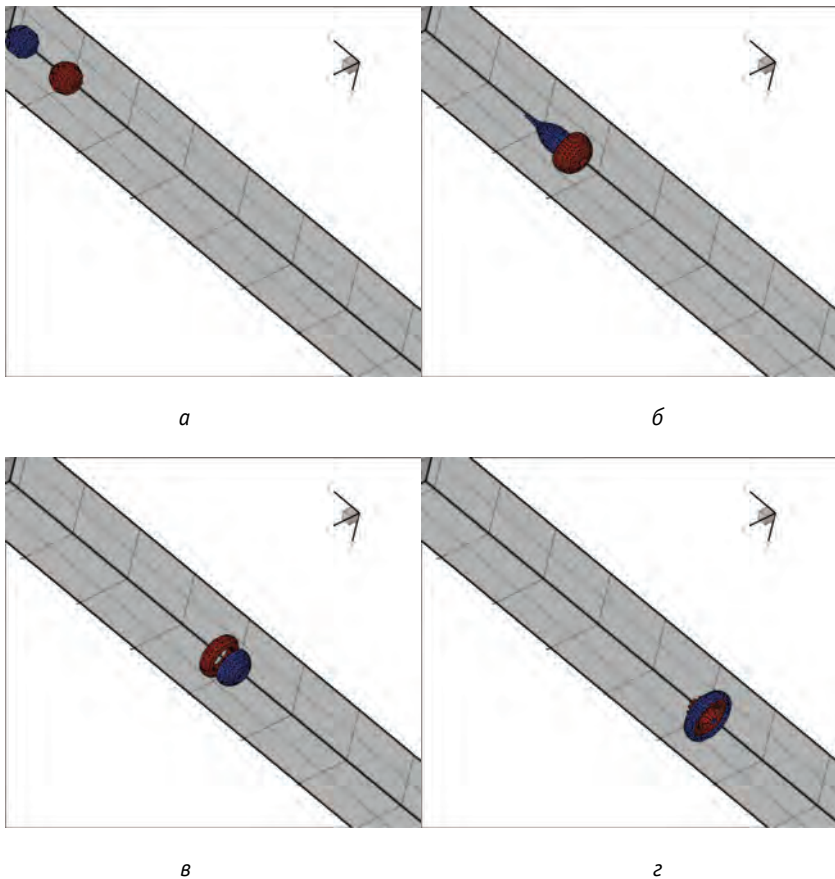


Рис. 6.1. Слияние двух капель при поверхностном натяжении, близком к нулевому значению

Упавшая капляк вначале расплющивается, но из-за несмачиваемости затем вновь собирается и отскакивает от поверхности. Однако за те миллисекунды, которые длится столкновение, с ней успевают произойти очень интересные явления. Удар нижнего края капляк о поверхность порождает капиллярные волны (рис. 6.3), которые пробегают по всей капляк и фокусируются в ее верхней части. Там они вызывают сильные колебания воды вверх-вниз, и при движении воды вниз впадина пробивает капляк насквозь, превращая ее в «микробублик».

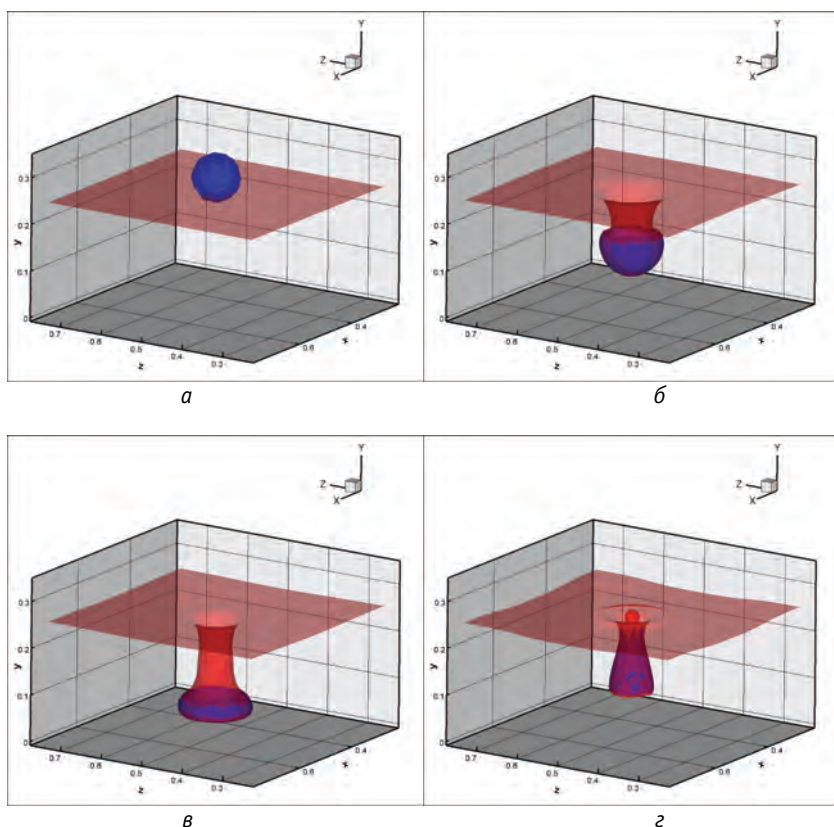


Рис. 6.2. Падеие капляк на поверхность (численный расчет)

Эксперименты показали, что этот воздушный канал быстро схлопывается, но если подобрать правильную начальную скорость, он все время остается строго цилиндрическим (для теоретиков такое поведение — признак того, что уравнения имеют самоподобное решение).

Лишь в последний момент с ним что-то происходит, причем так быстро, что видеокамера не успевает ничего отследить: на одном кадре есть цилиндрический канал, на следующем уже ничего нет. Однако именно это разрушение воздушного канала порождает микроскопическую струйку, бьющую вверх. В некоторых экспериментах ее скорость превышала начальную скорость капельки в 40 раз!

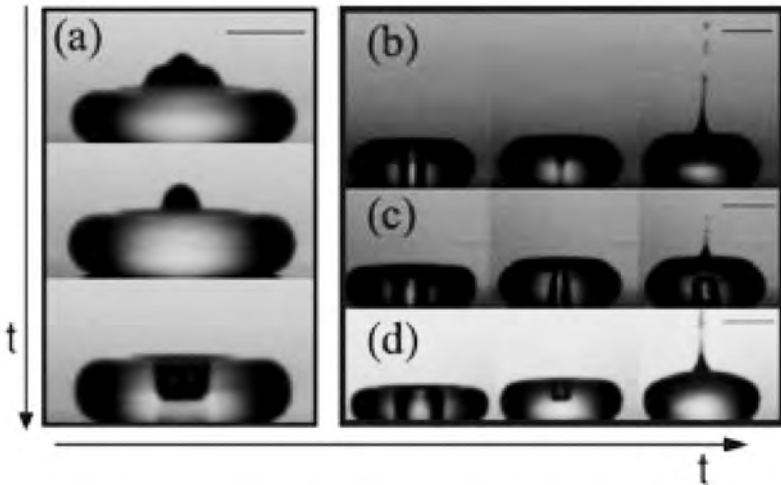


Рис. 6.3. Падение капли на поверхность. Капля, упав на гидрофобную поверхность, превращается в «микробублик», а затем «выстреливает» вверх микроструйкой воды [42]

Интересно, что если начальная скорость капли чуть больше оптимальной, то строгая цилиндрическая форма воздушного столбика нарушается, и в результате он превращается в пузырек воздуха, пойманный внутри капельки.

Конечно, пузырьки и струйки можно легко получить при падении капли с очень большой высоты (достаточно вспомнить пузыри на лужах во время ливня), но вряд ли кто-то подозревал, что подобные эффекты возникают и при столь «нежных» процессах. Впрочем, как утверждают авторы [42], большой загадки наблюдавшиеся явления для теоретической гидродинамики не представляют. Решив уравнения, они смогли теоретически вывести не только зависимость скорости и радиуса струйки от начальных параметров, но даже воспроизвести ее форму. Единственный неясный момент — это сам процесс исчезновения цилиндрического воздушного канала, и для прояснения его потребуются дополнительные исследования.

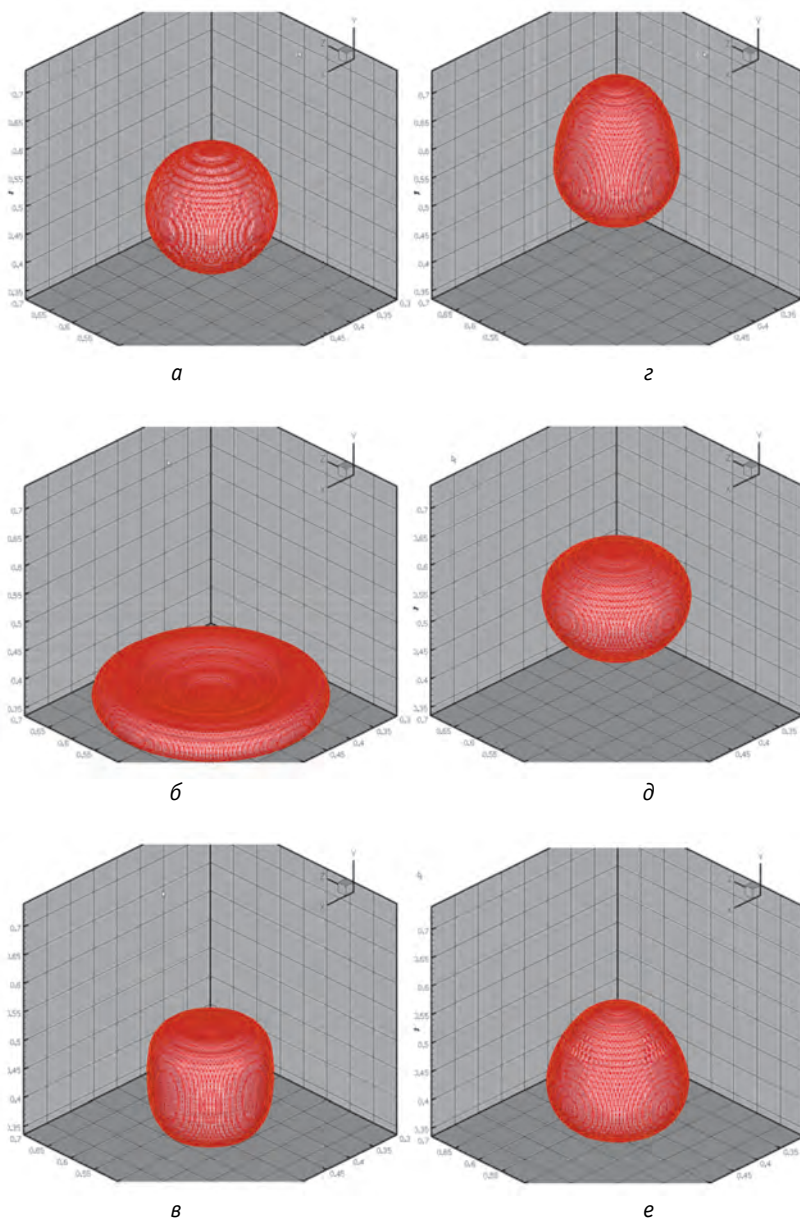


Рис. 6.4. Движение капли в вертикальном канале с ударением ее о дно канала и последующим отскоком

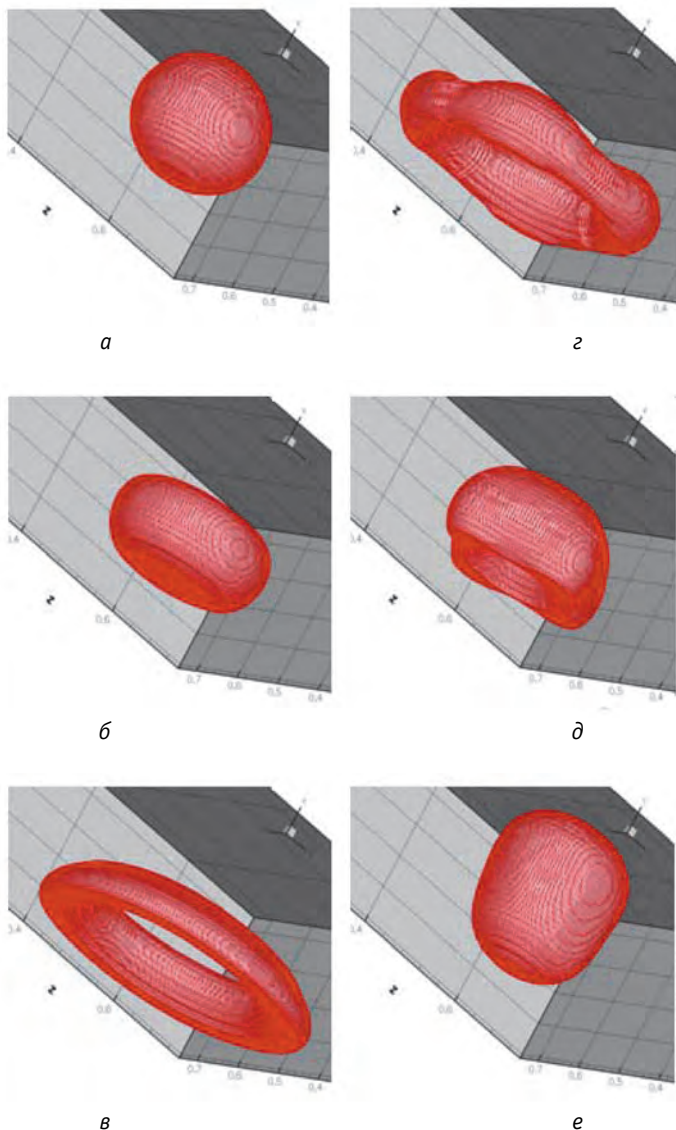


Рис. 6.5. Движение капли в наклонном канале с ударением ее о дно канала и последующим отскоком:

а — недеформированная капля, *б* — удар капли о дно и превращение в тор, *в* — формирование кольца с внутренней поверхностью, *г* — отскок от дна и всплытие кольца вверх, *д* — сжатие кольца, *е* — превращение кольца в эллипсоидальную каплю

На рис. 6.4 показано движение капли в вертикальном канале квадратного основания с ударением ее о дно канала и последующим отскоком: *а* — недеформированная капля, *б* — удар капли о дно и формирование тора, *в* — упругий отскок, *г* — всплытие капли вверх, *д* — повторное падение капли вниз с потерей энергии и изменением формы на эллипсоидальную, *е* — повторный удар капли о дно канала.

На рис. 6.5 показано движение капли в наклонном канале квадратного основания с ударением ее о дно несмачиваемого канала и последующим отскоком. В данном случае, в отличие от капли на рис. 6.4, капля движется с большей скоростью. В результате после соударения с сухой несмачиваемой поверхностью капля образует сначала минимальный тор, а затем в силу большей инерции превращается в кольцо с внутренней поверхностью (т. е. происходит разрыв). Дополнительная внутренняя поверхность увеличивает свободную энергию и, следовательно, амплитуду, и капля подпрыгивает вверх.

На рис. 6.6 показаны некоторые основные восходящие режимы потока в вертикальной трубе.

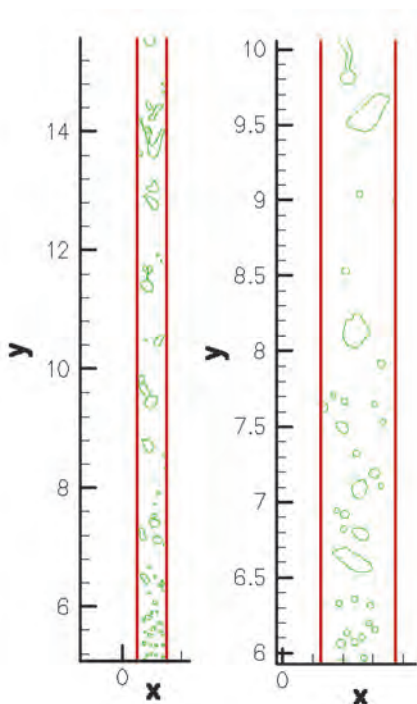


Рис. 6.6. Пузырьковые течения в вертикальных трубах различных диаметров

В пузырьковом потоке (см. рис. 6.6, нижние части труб) искаженные сферические и дискретные пузыри двигаются в непрерывной жидкой фазе. Пузыри имеют небольшое взаимодействие при очень низких потоках газа, но это взаимодействие увеличивается, когда растет объемная скорость потока газа Q_G . При высоких скоростях Q_G пузырьки взаимодействуют, что ведет к их соединению и разрыву. При высоких скоростях газового потока возможно возникновение эмульсионного режима течения (Churn), в этом случае (см. рис. 6.6, средние части труб) имеет место хаотичное движение нерегулярных по форме газовых карманов с произвольной интерфейсной формой.

При увеличении скорости газового потока обе фазы могут наблюдаться в виде как непрерывных эмульсий, так и колебательных противотоков. Колебательный изменяющийся во времени режим, где большие волны, перемещающиеся дальше в направлении потока, наложены на волнистую кольцеобразно-дисперсную картину течения с толстыми пленками жидкости на стенках, также называется эмульсионным режимом течения. Эмульсионный поток возникает и на входе вертикального канала. Подобная интерпретация эмульсионных течений представляет нерегулярную область около входа длинного канала, где в конечном счете разовьется снарядная картина течения.

Ниже представлены результаты численного расчета для задачи интенсификации пристеночного теплообмена, которая находит все более широкое применение в энергетических установках, а также в теплообменных аппаратах различного назначения. Характерной особенностью пристеночного теплообмена является то, что перенос тепла интенсифицируется только в пристеночной области (вблизи границы), где имеет место максимальный поперечный градиент температуры. Теплообменные устройства с интенсификацией теплообмена на границах теплообменника обладают высокой энергетической эффективностью. Внедрение их в практику содействует решению проблем энергосбережения, в частности, путем снижения энергозатрат на обеспечение циркуляции теплоносителей в контурах теплообменников.

Рассматривается подъемное течение холодной жидкости в вертикальной проточной трубе с горячими стенками. В такой геометрии осуществляется ввод струи пузырьков, движущейся вдоль одной из горячих стенок по траектории, аналогичной показанной на рис. 5.2. Иными словами, пузырьки следуют один за другим по осциллирующей траектории и увлекают за собой слои жидкости, образуя турбулентный слой. В результате при движении пузырьков вдоль стенки (со скоростью от 50 до 400 мм/с) происходит разрушение динамического и теплового пристеночного пограничного слоя.

На рис. 6.7 показано поле температур, а на рис. 6.8 и 6.9 — поле скоростей. На рис. 6.10 показана карта материалов (пузырьков). Поднимаю-

щиеся вдоль левой стенки пузырьки разрушают динамический пограничный слой на левой стенке, что приводит к интенсификации теплообмена в два-три раза, о чем свидетельствует рис. 6.11, где показан график теплового потока в зависимости от скорости теплоносителя в трубе.

Следующие результаты также связаны с задачей интенсификации теплообмена, а именно интенсификации теплообмена внутри жидкости, в которой всплывают пузырьки.

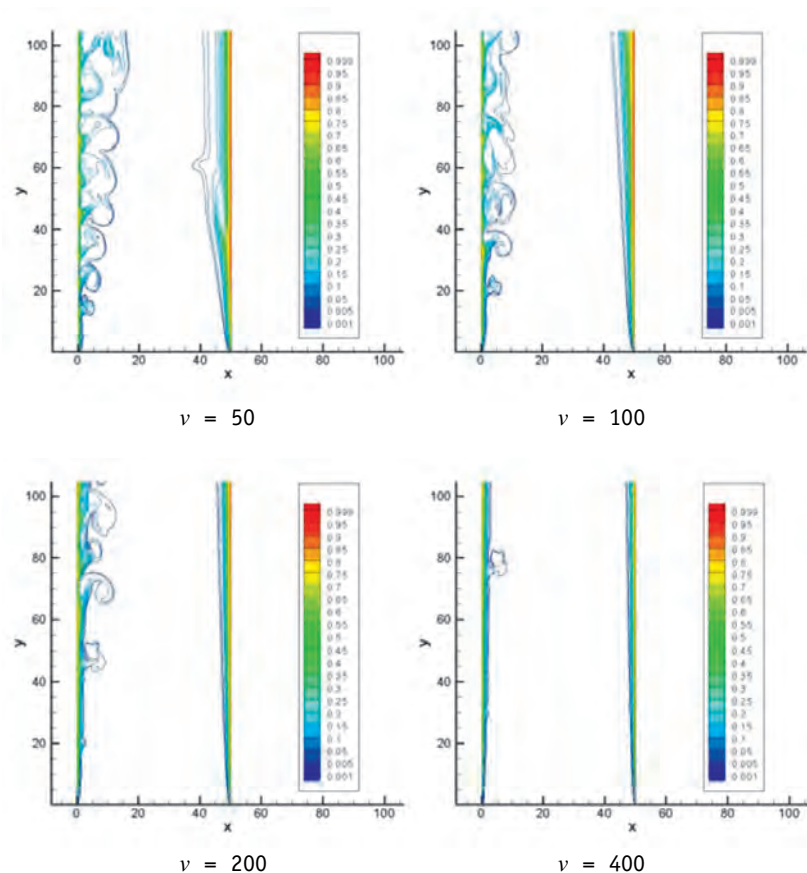


Рис. 6.7. Поле температур

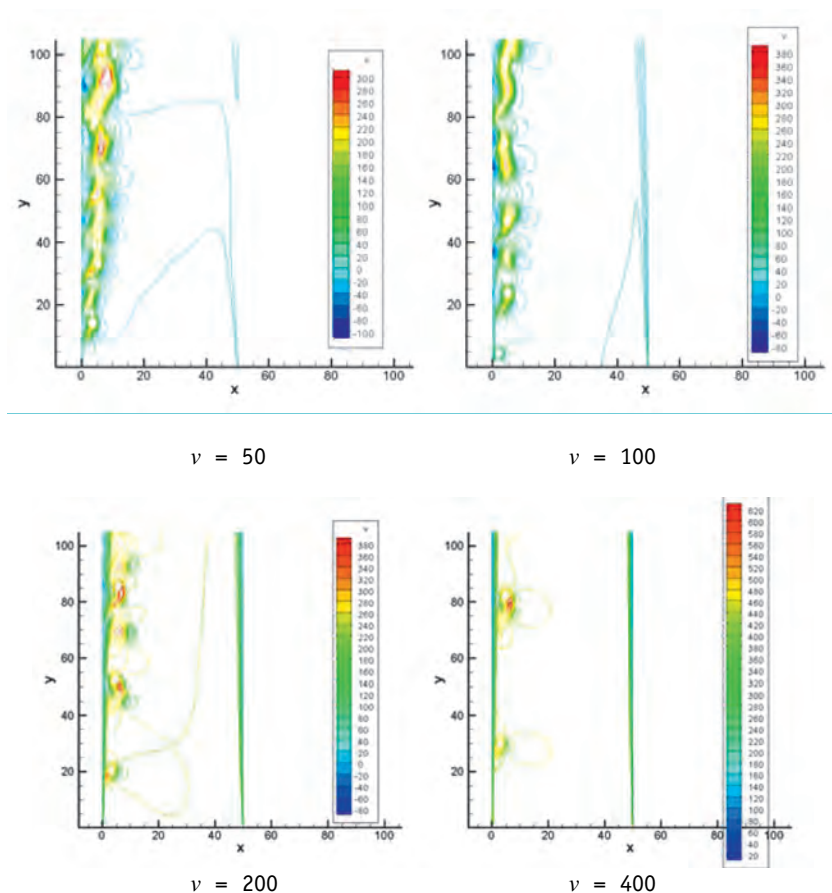


Рис. 6.8. Поле скоростей

На рис. 6.12 и 6.13 показано поле температур для двух моментов времени, а на рис. 6.14 и 6.15 — распределение средней температуры по высоте области. Наклон кривой на рис. 6.14 и 6.15 характеризует средний коэффициент теплообмена в жидкости, через которую проходят пузырьки.

Подобные течения характерны при явлении барботаж в задачах взаимодействия расплава топлива с бетоном. Теплопередача барботирующего газа при плавлении бетона увеличивает теплопередачу в расплаве.

Численные расчеты значительно менее затратны, чем экспериментальные работы, что позволит получать корреляционные зависимости для определения коэффициента теплопередачи в зависимости от параметров барботаж газа при абляции бетона.

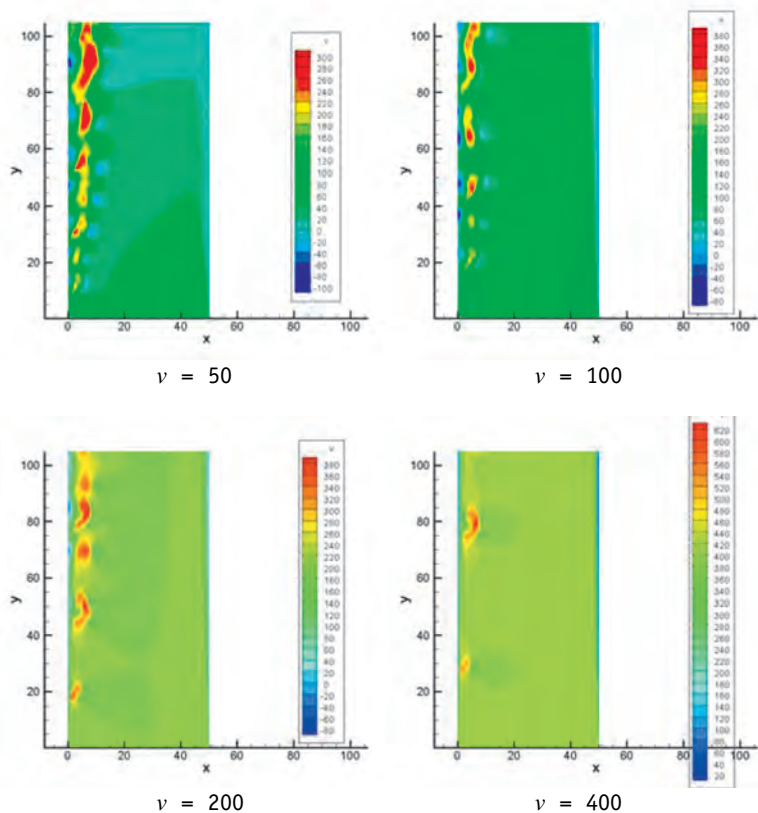
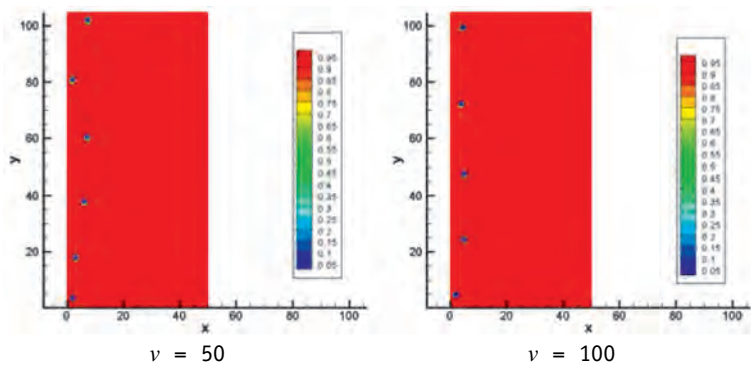


Рис. 6.9. Поле скоростей



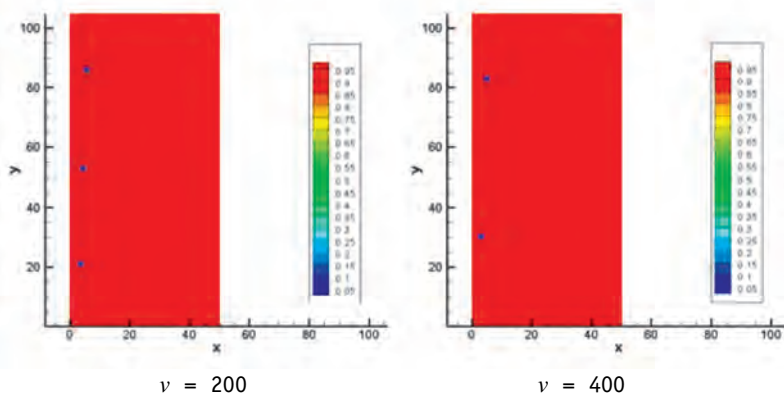


Рис. 6.10. Карта материалов

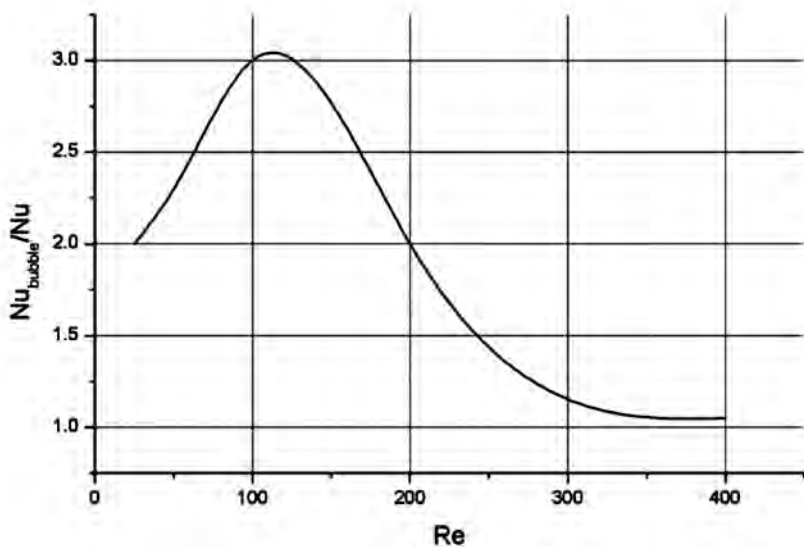


Рис. 6.11. Приведенное число Нусельта в зависимости от числа Рейнольдса в трубе. Число Рейнольдса определяется по размеру пузыря (1 мм)

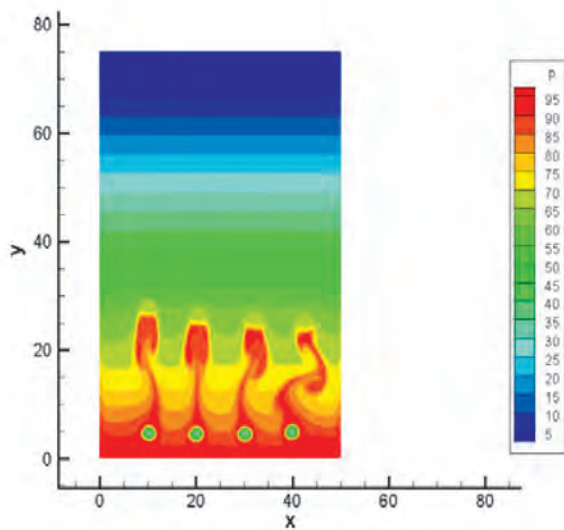


Рис. 6.12. Поле температур на момент 1τ

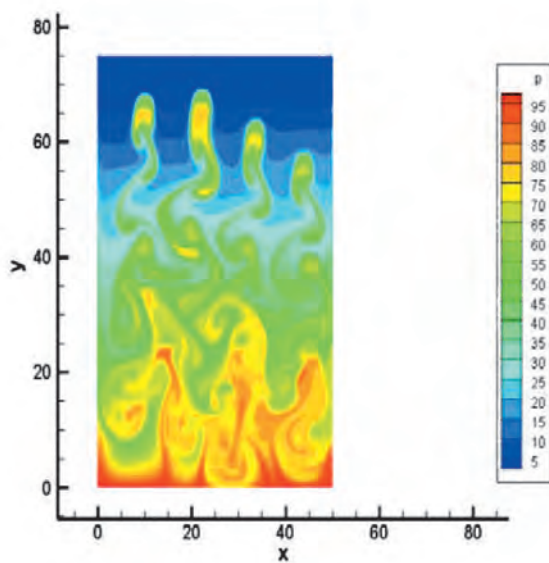


Рис. 6.13. Поле температур на момент 2τ

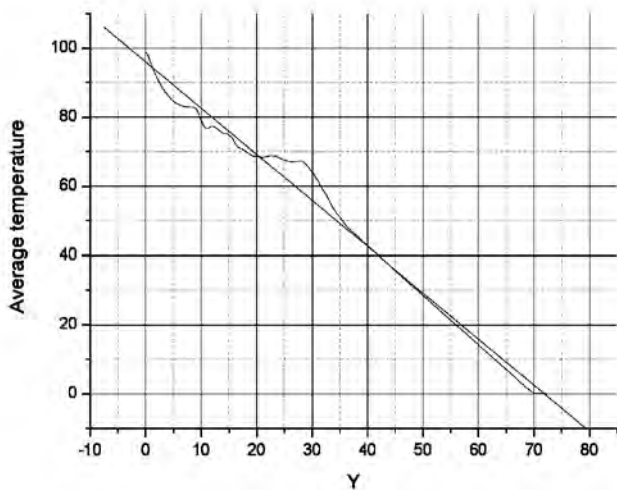


Рис. 6.14. Распределение средней температуры по высоте на момент 1t

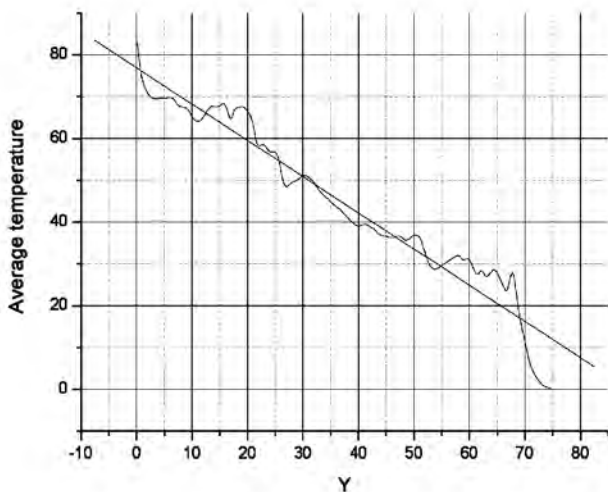


Рис. 6.15. Распределение средней температуры по высоте на момент 2t

7. Заключение

Для решения проблем вычислительной динамики жидкости разработаны эффективные конечно-разностные численные алгоритмы.

Развитые алгоритмы применяются к уравнениям тепло- и массопереноса, а именно к уравнениям Навье—Стокса с уравнением энергии в естественных переменных для несжимаемых и слабо сжимаемых течений при малых числах Маха.

Было проведено тестирование развитого подхода на наборе тестов из [36] и экспериментов, проводимых в ИТ СО РАН [40; 41], для которых было получено хорошее совпадение между численными предсказаниями и экспериментальными данными.

Предварительные результаты, полученные методом прямого численного моделирования с помощью наблюдения за траекториями, объемной фракцией вещества, позволяют говорить об адекватном качественном соответствии расчетной модели экспериментальным данным.

Вычислительные эксперименты значительно менее затратны, чем экспериментальные работы, что может позволить получать необходимые корреляционные зависимости для определения коэффициента теплопередачи для таких задач теплообмена, где экспериментальные данные обладают высокой степенью неопределенности.

Литература

1. *Chudanov V. V., Aksenova A. E., Pervichko V. A.* 3D unified CFD approach to modeling of bubble phenomena // Proc. 11th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics (NURETH-11), Popes' Palace Conference Center, Avignon, France, October 2—6, 2005. — [S. 1.], 2005.
2. *Bolshov L. A., Chudanov V. V., Strizhov V. F.* et al. Best estimate methodology for modeling bubble flows // Proc. 14th International Conference on Nuclear Engineering (ICONE-14). July 17—20, 2006, Miami, Florida, USA. — [S. 1.], 2006. — CDROM, Publisher ASME, Paper № ICONE-89296.
3. *Ishii M.* Thermo-fluid Dynamics Theory of Two-phase Flow. — Paris: Eyrolles, 1975.
4. *Morel C., Goreaud N., Delhaye J. M.* The local volumetric interfacial area transport equation: derivation and physical significance // Int. J. Multi-phase Flow. — 1999. — Vol. 25.

5. *Rider W. J., Kothe D. B.* Reconstructing volume tracking // *J. Comp. Phys.* — 1998. — Vol. 141. — P. 112.
6. *Juric D., Tryggvason G.* Computations of boiling flows // *Int. J. Multi-phase Flow.* — 1998. — Vol. 24. — P. 387.
7. *Osher S., Fedkiw R. P.* Level set methods: an overview and some recent results // *J. Comp. Phys.* — 2001. — Vol. 169. — P. 463.
8. *Jacqmin D.* Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modelling // *J. Comp. Phys.* — 1999. — Vol. 155. — P. 96.
9. *Noh W., Woodward P.* Simple line interface method (SLIC) // *Proc. 5th International Conference on Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics / A. van de Vooren, P. Zandbergen, (Eds.).* — Vol. 59. — Berlin: Springer, 1976.
10. *Rider W. J., Kothe D. B., Mosso S. J.* et al. Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions. — [S. L.], 1995. — (AIAA Paper 95-0699).
11. *Rider W. J., Kothe D. B.* Reconstructing volume tracking // *J. Comp. Phys.* — 1998. — Vol. 14, № 2. — P. 112—152.
12. *Fulgosi M., Lakehal D., Banerjee S., Yadigaroglu G.* Direct numerical simulation of turbulence and interfacial dynamics in counter-current air-water flows (Procs. DLES-4) // *Direct and Large-Eddy Simulation IV / B. J. Geurts, R. Friedrich, O. M'etais (Eds.).* — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2001. — P. 443—452. — (ERCOFTAC Series; Vol. 8).
13. *Beux F., Knowlton B., Banerjee S.* A three-dimensional level set method for direct numerical simulation of two-phase flows in variable gravity environments // *Proc. 4th Microgravity Fluid Physics and Transport Phenomena Conference, Cleveland.* — [S. 1.], 1998.
14. *Son G., Dhir V. K., Ramanujapu N.* Dynamics and heat transfer associated with a single bubble during nucleate boiling on a horizontal surface // *J. Heat Transfer.* — 1999. — Vol. 121. — P. 623—631.
15. *Jamet D., Lebaigue O., Coutris N., Delhaye J. M.* The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid-vapor flows with phase change // *J. Comp. Phys.* — 2001. — Vol. 169, Iss. 2. — P. 624—651.
16. *Carey V. P.* *Liquid-Vapor Phase-Change Phenomena.* — Washington: Hemisphere Publ. Corporation, 1992.
17. *Welch S. W. J., Wilson J.* A volume of fluid based method for fluid flows with phase change // *J. Comp. Phys.* — 2000. — Vol. 160, № 2. — P. 662—682.

18. Tryggvason G., Bunner B., Esmaeeli A. et al. A front tracking method for the computations of multiphase flow // J. Comput. Phys. — 2001. — Vol. 169. — P. 708.
19. Qian J., Tryggvason G., Law C. K. A front tracking method for the motion of premixed flames // J. Comput. Phys. — 1998. — Vol. 144. — P. 52.
20. Helenbrook B. T., Martinelli L., Law C. K. A numerical method for solving incompressible flow problems with a surface of discontinuity // J. Comp. Phys. — 1999. — Vol. 148. — P. 366.
21. Nguyen D. Q., Fedkiw R. P., Kang M. A boundary condition capturing method for incompressible flame discontinuities // J. Comp. Phys. — 2001. — Vol. 172. — P. 71.
22. Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comp. Phys. — 1999. — Vol. 150. — P. 425—467.
23. Churbanov A. G. et al. Proc. Computational Fluid Dynamics, Wiley, Chichester, 1(2). — [S. 1.], 1998. — P. 894—899.
24. Chudanov V. V., Aksenova A.E. et al. A new approach to CFD problems in complex geometries // Proc. of 9th International Topic Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics (NURETH-9), San Francisco, California. — [S. 1.], 1999. — CDROM, paper log326.
25. Chudanov V. et al. Non-linear regularized difference schemes for multi-dimensional advection equations // J. of Computing Mathematics and of Mathematical Physics. — 2001. Vol. 40, № 6. — P. 900—907.
26. Chudanov V. V., Leonov A. A. Generalization of two-phase model with topology microstructure of mixture to LAGRANGE-EULER METHODOLOGY // Proc. 11th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics (NURETH-11) Popes' Palace Conference Center, Avignon, France, October 2—6, 2005. — [S. 1.], 2005. — CDROM paper 049.
27. Большов Л. А., Стрижов В. Ф., Чуданов В. В. и др. Новая расчетно-экспериментальная методология для моделирования пузырьковых течений // Труды 4-й российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-4). — Т. 5, секция 6. — М., 2006. — С. 229—233.
28. Chudanov V. V., Aksenova A. E., Pervichko V. A. 3D unified CFD approach to thermal hydraulic problems in safety analysis // Proc. of IAEA Technical Meeting on Use of Computational Fluid Dynamics (CFD) Codes for Safety Analysis of Nuclear Reactor Systems, Including Containment, University of Pisa, Italy, 11—14 November, 2002. — [S. 1.], 2003. — P. 14. — Summary report IAEA-TECDOC-1379. — CD-disk (Session 7).

29. Чуданов В. В., Аксенова А. Е., Первичко В. А. и др. Методы вычислительной гидродинамики для анализа безопасности объектов ТЭК / Под. науч. ред. В. Ф. Стрижова // Труды ИБРАЭ РАН / Под. общ. ред. Л. А. Большова. — Вып. 3. — М.: Наука, 2008. — 210 с.
30. *De Vahl D. G.* Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. — 1983. — Vol. 3. — P. 249—264.
31. *Visser E. P., Kleijn C. R., Govers C. A. M.* et al. Return flows in horizontal MOCVD reactors studied with use of TiO₂ particle injection and numerical calculations // *J. Crystal Growth*. — 1989. — Vol. 94. — P. 929—946.
32. *Samarskii A. A., Nikolaev E. S.* Methods for solving of grid equations. — М.: Nauka, 1978.
33. *Vreugdenhil C. B., Koren B.* Numerical methods for advection-diffusion problems. — Braunschweig: Vieweg, 1993.
34. *Chella R., Vinals J.* Mixing of a two-phase fluid by cavity flow // *Phys. Rev. E*. — 1996. — Vol. 53, № 4. — P. 3832.
35. *Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C.* A continuum method for modelling surface tension // *J. Comp. Phys*. — 1992. — Vol. 100. — P. 335.
36. *J. Multiphase Science and Technology*. — 2004. — Vol. 16, № 1—3.
37. *Кутамеладзе С. С.* Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979. — 416 с.
38. *Накоряков В. Е., Горин А. В.* Теплоперенос в двухфазных системах / Ин-т теплофизики СО РАН. — Новосибирск, 1994. — 431 с.
39. *Koh C. J., Leal L. G.* An experimental investigation on the stability of viscous drops translating through a quiescent liquid // *Physics of Fluids A*. — 1990. — Vol. 2, № 12. — P. 2103—2109.
40. *Meledin V. G., Bakakin G. V., Naumov I. V.* et al. Real Time Machine Vision System for Non-contact Measurements of the Masses of Free Falling Hot Glass Drops // *Current Research on Holography and Interferometric Methods for Measurement of Object Properties: Selected Paper of SPIE*. — 2000—2002. — Vol. 5134. — P. 139—149.
41. *Meledin V., Pavlov V., Tsvlodub O., Yavorsky N.* Gravity-Capillary Waves on the Surface of a Liquid Dielectric // *Doklady Physics*. — 2005. — Vol. 50, № 8. — P. 426—430.
42. *Bartolo D., Josserand C., Bonn D.* Singular Jets and Bubbles in Drop Impact // *Physical Review Letters*. — 2006. — Vol. 96, № 12. — P. 124501.
43. *Glimm J., Grove J. W., Li X. L.* et al. Three-dimensional front tracking // *SIAM J. Sci. Comput*. — 1998. — Vol. 19. — P. 703.

44. *Peskin C. S.* Numerical analysis of blood flow in the heart // *J. Comput. Phys.* — 1977. — Vol. 25. — P. 220—252.
45. *Shin S., Juric D.* Modeling Three-Dimensional Multiphase Flow Using a Level Contour Reconstruction Method for Front Tracking without Connectivity // *J. of Comput. Phys.* — 2002. — Vol. 180. — P. 427—470.
46. *Кутателадзе С. С.* Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
47. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. — М., 1959.
48. *Peebles F., Garber H.* Studies of the motion of gas bubbles in liquids // *Chem. Eng. Progr.* — 1953. — Vol. 49, № 2. — P. 88—97.

Научное издание

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ
И ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Том 2
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Утверждено к печати Ученым советом
Института проблем безопасного развития атомной энергетики
Российской академии наук*

Редактор *А. И. Иоффе*

Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
Зав. редакцией *М. В. Грачева*
Редактор издательства *Е. А. Жукова*

Оригинал-макет подготовлен ООО «Комтехпринт»
Иллюстрации приведены в авторской редакции

Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная 80 г/м²
Печать офсетная. Гарнитура «Оффицина»
Уч.-изд. л. 24,6. Заказ 20923

Заказное

Отпечатано с готовых диапозитивов типографией ООО «Инфолио-Принт»

