

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО
РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

RUSSIAN ACADEMY OF
SCIENCES
NUCLEAR
SAFETY INSTITUTE

Препринт № NSI-04-94

Preprint NSI-04-94

Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В.,
Чурбанов А.Г.

**Численное моделирование проблем
тепло-и массопереноса с фазовыми
превращениями**

Москва
1994

Moscow
1994

Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование проблем тепло-и массопереноса с фазовыми превращениями. Препринт № NSI-04-94. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 1994. 20 с.

Аннотация

В работе предложен вычислительный алгоритм для двумерной задачи конвекции с фазовыми превращениями в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура". Используются специальные аппроксимации конвективных слагаемых центральными разностями. Реализация используемой схемы расщепления основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Приведены данные расчетов по тестовой задаче о свободноконвективном движении жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с боковым подогревом при различных числах Релея.

©ИБРАЭ РАН, 1994

Aksenova A.E., Vabishchevich P.N., Chudanov V.V., Churbanov A.G. Numerical simulation the heat- and mass transfer problems with phase transitions. Preprint NSI-04-94. Moscow: Nuclear Safety Institute, January 1994. 20 p.

Abstract

A numerical algorithm is developed in the work for 2D convection problem with phase transitions in the stream function - vorticity -temperature formulation. Special approximations of convective terms are constructed via central differences. Numerical implementation of the operator-splitting scheme used in calculations is based on the solution of elliptic grid problems at every time-level. The algorithm validation is conducted on the benchmark solutions for buoyancy-driven flow with phase transitions in a square cavity with side walls of different temperatures at various Rayleigh number values.

©Nuclear Safety Institute, 1994

Численное моделирование проблем тепло-и массопереноса с фазовыми превращениями

Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В.; Чурбанов А.Г.*

Институт Проблем Безопасного Развития Атомной Энергетики РАН
Большая Тульская 52, Москва 113191, Россия

17 Января 1994 года

Аннотация

В работе предложен вычислительный алгоритм для двумерной задачи конвекции с фазовыми превращениями в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”. Используются специальные аппроксимации конвективных слагаемых центральными разностями. Реализация используемой схемы расщепления основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Приведены данные расчетов по тестовой задаче о свободноконвективном движении жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с боковым подогревом при различных числах Релея.

1 Введение

В настоящее время большое внимание уделяется проблемам разработки вычислительных алгоритмов решения задач тепло- и массообмена с фазовыми превращениями твердое тело — жидкость [1]. Моделирование проводится на основе приближения Буссинеска для несжимаемой жидкости. Для двумерных задач тепловой конвекции с фазовыми превращениями чаще всего используются вычислительные алгоритмы на основе переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”.

В работе строится линеаризованная разностная схема для решения задачи конвекции с фазовыми превращениями в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура” подобная рассмотренной в [2]. Конвективные члены аппроксимируются со вторым порядком на основе центральных разностей. Используется разностная схема расщепления для реализации которой на каждом временном слое решаются сеточные эллиптические задачи для нахождения функции тока, вихря скорости, температуры.

В качестве модельной рассматривается задача о свободноконвективном течении частично затвердевающей жидкости в полости квадратного сечения с боковым подогревом. Такая задача численно исследовалась в работах [3]-[8].

Представлены данные расчетов при различных числах Релея: $Ra = 10^5, 10^6, 10^7$, на последовательности сеток $41 \times 41, 81 \times 81$ и, кроме того, для $Ra = 10^7$ представлена динамика развития плавления на сетке 161×161 .

2 Модельная задача

Рассматривается двумерная задача конвекции с фазовыми превращениями, в полости квадратного сечения. Температура левой боковой поверхности выше, а правой — ниже температуры фазового перехода, верхняя и нижняя грани теплоизолированы. В этих условиях часть вещества находится в жидком, а часть — в твердом состоянии.

Пусть $\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l, \alpha = 1, 2\}$ — область, в которой необходимо найти решение задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода, где температура $u(x, t)$ принимает значение, равное температуре фазового перехода u^* :

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u(x, t) = u^*\}.$$

*E-mail: pbl@ibrae.msk.su

Граница $S(t)$ разбивает область Ω на две подобласти. В области $D(t)$, где $D(t) = \{x | x \in \Omega, u(x, t) > u^*\}$, находится жидкая фаза вещества, в оставшейся части $D_0 = \Omega \setminus D$ — твердая. Задача рассматривается в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в жидкой фазе используется система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Так для скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и нормализованного на плотность давления p имеем уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \beta g e u = 0, \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2) \in D, \quad 0 < t \leq T,$$

где g — ускорение свободного падения, u — отклонение температуры от равновесной, ν — кинематическая вязкость, β — коэффициент объемного расширения, $e = (0, 1)$ — вектор, определяющий направление выталкивающей силы. Уравнение (1) дополняется уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Поле температур во всей области Ω , при наличии конвекции с учетом энтальпии фазового перехода, описывается уравнением теплопроводности в виде:

$$\left(c(u) + \lambda \delta(u - u^*) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad (3)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

где u^* — температура фазового перехода, δ — дельта-функция, а λ — энтальпия фазового перехода. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициенты теплоемкости и теплопроводности постоянны в твердой и жидкой фазах и не меняются при фазовом превращении.

На границах полости ∂D условия прилипания и непротекания приводят к граничным условиям вида:

$$\mathbf{v}(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Нижняя и верхняя части границы считаются теплоизолированными и, следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, 1, \quad 0 < x_1 < 1. \quad (5)$$

Левая и правая границы изотермичны, т.е.:

$$u(0, x_2, t) = \chi_0 = \operatorname{const} > u^*, \quad u(1, x_2, t) = \chi_1 = \operatorname{const} < u^*. \quad (6)$$

Поскольку в начальный момент времени жидкость неподвижна, имеет место следующее начальное условие для скорости

$$\mathbf{v}(x, 0) = 0, \quad x \in D(0), \quad (7)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = \chi_1 + \frac{x}{l} (\chi_0 - \chi_1), \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Таким образом, задача (1)–(8) описывает свободную конвекцию тепла с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Вычислительный алгоритм её приближенного решения строится на базе переменных “функция тока, вихрь скорости”. Компоненты скорости выражаются через функцию тока $\psi(x, t)$ следующим образом:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (9)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполняется. Для вихря скорости справедливо соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (10)$$

Для унификации записи слагаемых конвективного переноса введем для произвольного вектора $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ дифференциальный оператор $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ таким образом, что:

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{V}_\alpha(q_\alpha), \quad (11)$$

$$\mathcal{V}_\alpha(q_\alpha)z = \frac{1}{2} \left(q_\alpha \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (q_\alpha z) \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

С учетом (9)–(11) из уравнения движения (1) будем иметь следующее выражение для вихря скорости в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \text{Gr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (12)$$

$$x \in D, \quad 0 < t \leq T,$$

где число Грасгофа для задачи (1)–(8) определяется соотношением

$$\text{Gr} = \frac{\beta l^3 g \Delta u}{\nu^2}.$$

Для функции тока имеем уравнение Пуассона

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = w, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T. \quad (13)$$

В безразмерных переменных уравнение для температуры имеет вид

$$\left(1 + \text{Ste} \delta(u - u^*)\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})u\right) - \frac{1}{\text{Pr}} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad (14)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

где $\text{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля, $\text{Ste} = \lambda/(c(\chi_0 - \chi_1))$ — число Стефана.

Здесь безразмерная температура определяется соотношением $(u - \chi_1)/(\chi_0 - \chi_1)$.

Система уравнений (12)–(14) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4)–(8). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω записываются в виде

$$\psi(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T, \quad (16)$$

где n — внешняя нормаль к ∂D .

Из условия (7) следует

$$\psi(x, 0) = 0, \quad x \in D. \quad (17)$$

И, наконец, в безразмерных переменных изотермические граничные условия имеют вид

$$u(0, x_2, t) = 1, \quad u(1, x_2, t) = 0. \quad (18)$$

Остальные условия для температуры (см. (5),(8)) остаются без изменений.

3 Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи (12)–(18) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется метод фиктивных областей [8]. Вычислительный алгоритм сквозного счета строится на основе варианта метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. Задача рассматривается во всем единичном квадрате Ω .

Пусть ε — малый параметр, $\psi^\varepsilon, w^\varepsilon, u^\varepsilon$ — приближенные решения. Они определяются из уравнений:

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v}^\varepsilon)w^\varepsilon + c^\varepsilon(u^\varepsilon)\psi^\varepsilon - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} - \text{Gr} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} = 0, \quad (19)$$

$$- \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} = w^\varepsilon, \quad (20)$$

$$\left(1 + \text{Ste} \delta(u^\varepsilon)\right) \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v}^\varepsilon)u^\varepsilon\right) - \frac{1}{\text{Pr}} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} = 0. \quad (21)$$

Здесь коэффициент продолжения $c^\varepsilon(u^\varepsilon)$ определяется выражением

$$c^\varepsilon(u^\varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in D(t) \quad (u^\varepsilon > u^*), \\ \varepsilon^{-2}, & x \in \Omega \setminus D(t) \quad (u^\varepsilon < u^*). \end{cases}$$

Система уравнений (19)–(21) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\psi^\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (23)$$

$$\psi^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (24)$$

$$u^\varepsilon(0, x_2, t) = 1, \quad u^\varepsilon(1, x_2, t) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, 1; \quad 0 < x_1 < 1, \quad (26)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (27)$$

При достаточно малом ε решение задачи (19)–(27) в Ω дает приближенное решение исходной задачи (12)–(18) в меньшей области D , т.е. $\psi^\varepsilon(x, t) \rightarrow \psi(x, t)$, $x \in D$, $t > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

4 Дискретизация по пространству

В области Ω введем равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$ с шагами h_1 и h_2 , соответственно. Множество ω_h — содержит все внутренние узлы, т.е. $\omega_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = 1, \alpha = 1, 2\}$, а $\partial\omega_h$ — граничные узлы.

Для написания разностной схемы воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [9]. Для направленных разностей имеем следующие соотношения:

$$w_{x_\alpha} = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha)}{h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$w_{\bar{x}_\alpha} = \frac{w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{h_\alpha},$$

а для центральных разностей используется выражение

$$w_{x_\alpha}^\circ = \frac{1}{2} (w_{x_\alpha} + w_{\bar{x}_\alpha}) = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Определим сеточный оператор Лапласа на множестве сеточных функций $y \in H$, обращающихся в нуль на границе сетки, как:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} y, \quad \Lambda_{\alpha} y = -y_{x_{\alpha} x_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (28)$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве H введем скалярное произведение

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)z(x)h_1 h_2.$$

Заметим, что в H оператор Λ самосопряжен и положительно определен [10], т.е. $\Lambda = \Lambda^* > 0$.

Для аппроксимации конвективных слагаемых определим вектор

$$\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad w_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (29)$$

Это позволяет нам записать конвективный перенос вихря в виде

$$\mathcal{V}(\mathbf{v})w = -\mathcal{V}(\mathbf{w})\psi, \quad (30)$$

т.е. интерпретировать конвективный перенос вихря скорости как некий эффективный перенос функции тока. Обращение к такой форме записи обусловлено тем, что для любых векторов \mathbf{w} будет выполняться условие $(\mathcal{V}(\mathbf{v})w, \psi) = 0$.

Для приближенных решений будем использовать те же обозначения, что и для точных. Тогда с учетом соотношений (11), (29)–(30) для аппроксимации конвективных слагаемых будем иметь:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{w}) &= \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha}(w_{\alpha}), \\ V_1(w_1)\psi &= \frac{1}{2} \left(w_{x_2} \psi_{x_1}^{\circ} + \left(w_{x_2} \psi \right)_{x_1}^{\circ} \right), \\ V_2(w_2)\psi &= -\frac{1}{2} \left(w_{x_1} \psi_{x_2}^{\circ} + \left(w_{x_1} \psi \right)_{x_2}^{\circ} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

При такой аппроксимации конвективного переноса

$$(V(\mathbf{w})\psi, \psi) = 0, \quad (32)$$

т.е. в гильбертовом пространстве H оператор $V(\mathbf{w})$ кососимметричен ($V(\mathbf{w}) = -V^*(\mathbf{w})$). Аналогичная аппроксимация $\mathcal{V}(\mathbf{v})$ используется для конвективных слагаемых в уравнении для температуры.

Аппроксимация уравнений (19)–(20) с использованием формулы Тома [11] для вихря скорости во внутренних узлах сетки приводит к дифференциально-разностному уравнению вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Lambda \psi - V(\mathbf{w})\psi + \Lambda^2 \psi + \left(\rho(x) + c^{\varepsilon}(u) \right) \psi &= \text{Gr } u_{x_1}^{\circ}, \\ x \in \omega_h, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (33)$$

В этом уравнении сеточная функция $\rho(x)$ при граничных условиях Тома для вихря скорости определяется соотношением

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha}(x_{\alpha}), \\ \rho_{\alpha}(x_{\alpha}) &= \begin{cases} 0, & h_{\alpha} < x_{\alpha} < l_{\alpha} - h_{\alpha}, \\ \frac{2}{h_{\alpha}^A}, & x_{\alpha} = h_{\alpha}, \quad l_{\alpha} - h_{\alpha}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание особенности вычислительной реализации, удобно переписать уравнение (33) в виде

$$\frac{d}{dt}\Lambda\psi + (A_1 + A_2)\psi = \text{Gr} u_{x_1}, \quad (34)$$

где

$$A_1 = \Lambda^2, \quad A_2 = -V(\mathbf{w}) + \left(\rho(x) + c^\varepsilon(u)\right)E. \quad (35)$$

Учитывая свойство кососимметричности оператора $V(\mathbf{w})$ (см. (32)), в (35) имеем $A_1 = A_1^* > 0$, а $A_2 \geq 0$ при любых \mathbf{w} .

Для аппроксимации уравнения теплопроводности выделим множество узлов $\omega'_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, i_2 = 0, 1, \dots, N_2, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Для сеточных функций y , обращающихся в нуль в узлах вне сетки ω'_h , определим гильбертово пространство H' со скалярным произведением

$$(y, z)' = \sum_{x \in \omega'_h} y(x)z(x)h_1 h_2(x_2),$$

где $h_2(x_2) = h_2$ при $0 < x_2 < l_2$ и $h_2(x_2) = 0.5 h_2$ при $x_2 = 0$ при $x_2 = l_2$.

Сеточный оператор Лапласа с учетом смешанных граничных условий представим в виде

$$\Lambda' y = \Lambda_1 y + \Lambda_2' y, \quad x \in \omega'_h, \quad (36)$$

где

$$\Lambda_2' y = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}, & x_2 = 0, \\ -\frac{y_{\bar{x}_2} - y_{x_2}}{h_2}, & 0 < x_2 < l_2, \\ \frac{2}{h_2} y_{\bar{x}_2}, & x_2 = l_2. \end{cases} \quad (37)$$

В гильбертовом пространстве H' оператор Λ' , определяемый соотношениями (36)–(37), самосопряжен и положительно определен [10] ($\Lambda' = (\Lambda')^* > 0$).

С учетом вышесказанного, уравнение теплопроводности (21) принимает вид

$$\left(1 + \text{Ste} \delta(u, \Delta)\right) \left(\frac{du}{dt} + V(\mathbf{v})u\right) + \frac{1}{\text{Pr}} \Lambda' u = \varphi(\mathbf{v}, x, t), \quad (38)$$

$$x \in \omega'_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В (38) $\delta(u, \Delta)$ аппроксимирует δ -функцию, т.е. δ -функция заменяется δ -образной функцией $\delta(u - u^*, \Delta)$, отличной от нуля лишь на интервале $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$ и удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{u^* - \Delta}^{u^* + \Delta} \delta(u - u^*, \Delta) du = 1.$$

В нашем случае для $\delta(u, \Delta)$ использовалось следующее представление:

$$\delta(u, \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |u| \leq \Delta, \\ 0, & |u| > \Delta, \end{cases}$$

где Δ — полуширина сглаживания δ -функции. Сеточная функция $\varphi(\mathbf{v}, x, t)$ в уравнении (38) определяется в соответствии с неоднородным граничным условием (18) и отлична от нуля только в узлах примыкающих к левой границе.

5 Разностные схемы расщепления

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$: $\omega_\tau = \{t | t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau, N_\tau\tau = T\}$ и пусть $y_n = y(t_n)$. Разностная схема для системы уравнений (33), (38) основана на естественной линеаризации, когда операторы конвективного переноса $V(\mathbf{w}), V(\mathbf{v})$ — определяются решением на предыдущем временном слое. Для решения задачи используется чисто неявная факторизованная схема (аналог схемы Дугласа-Рэкфорда).

На первом шаге рассчитывается вихрь скорости $w_{n+1/2} = \Lambda\psi_{n+1/2}$ из уравнения

$$\frac{\Lambda\psi_{n+1/2} - \Lambda\psi_n}{\tau} - V(\mathbf{w}_n)\psi_n + \Lambda^2\psi_{n+1/2} + \left(\rho(x) + c^\varepsilon(u_n)\right)\psi_n = \text{Gr}(u_{n+1})_{x_1}, \quad x \in \omega_h. \quad (39)$$

т.е. конвективный перенос и граничное условие для вихря берутся с предыдущего временного слоя. С учетом введенных обозначений уравнение (39) может быть представлено в виде

$$\frac{w_{n+1/2} - w_n}{\tau} - V(\mathbf{w}_n)\psi_n + \Lambda w_{n+1/2} + \left(\rho(x) + c^\varepsilon(u_n)\right)\psi_n = \text{Gr}(u_{n+1})_{x_1}, \quad x \in \omega_h. \quad (40)$$

На втором шаге проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для вихря скорости:

$$\frac{\Lambda\psi_{n+1} - \Lambda\psi_{n+1/2}}{\tau} + \left(\rho(x) + c^\varepsilon(u_n) - V(\mathbf{w}_n)\right)\left(\psi_{n+1} - \psi_n\right) = 0. \quad (41)$$

Таким образом, при переходе на новый временной слой вихрь скорости определяется как решение самосопряженной задачи (40), а для определения функции тока имеем несамосопряженную задачу (41). Для вычисления температуры во внутренних узлах сетки используется линеаризованное разностное уравнение вида:

$$\left(1 + \text{Ste} \delta(u_n, \Delta)\right) \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + V(\mathbf{v}_n)u_{n+1}\right) + \frac{1}{\text{Pr}} \Lambda' u_{n+1} = \varphi(\mathbf{v}_n, x, t_n), \quad x \in \omega'_h.$$

Схема (39)-(41) хорошо зарекомендовала себя при решении задач свободной конвекции при боковом подогреве, конвекции тепловыделяющих жидкостей.

6 Результаты расчетов

Сначала представим результаты расчетов стационарного решения для чисел Релея $\text{Ra} = \text{Gr} = 10^5, 10^6, 10^7$ и $\text{Pr} = 1$ на равномерных сетках $41 \times 41, 81 \times 81$ ($N = 40, 80$ ($N = N_1 = N_2$)). Стационарное решение было получено методом установления. Расчеты были выполнены для числа Стефана $\text{Ste} = 0.25$ и полуширины сглаживания δ -функции $\Delta = 0.025$. В качестве начального условия для температуры был задан линейный градиент температур — чисто тепловое стационарное состояние.

При обработке данных расчетов основное внимание уделялось минимальной величине функции тока, которая определяет интенсивность конвективного перемешивания, и тепловым потокам на боковые грани. Ниже в таблицах 1-3 приводятся следующие важные параметры, характеризующие стационарное решение:

- $|\psi|_{mid}$ — абсолютная величина функции тока в центре полости,
- $|\psi|_{max}$ — максимум модуля функции тока во всей полости,
- v_{1max} — максимум горизонтальной скорости на среднем вертикальном сечении,
- v_{2max} — максимум вертикальной скорости на среднем горизонтальном сечении,
- X_{1melt} — координата фронта плавления на нижней грани,
- X_{2melt} — координата фронта плавления в среднем горизонтальном сечении,
- X_{3melt} — координата фронта плавления на верхней грани.

В расчетах использовалась равномерная сетка с числом шагов $N = 40, 80$ ($N = N_1 = N_2$).

На рис. 1-3 представлены изотермы и линии тока для стационарного решения, а также положение фронта плавления на сетке 81×81 при различных числах Релея. Заметим, что для задачи с $\text{Ra} = 10^7$ и $\text{Pr} = 1$ на равномерной сетке 81×81 стационарное решение получено не

Табл. 1: $Ra = 10^5$

N	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	$ Nu_l _{max}$	$ Nu_r _{max}$	X_{1melt}	X_{2melt}	X_{3melt}
40	8.280	9.218	30.73	51.90	3.776	3.253	0.500	0.750	0.850
80	7.946	8.957	29.59	51.08	3.653	3.051	0.513	0.749	0.849

Табл. 2: $Ra = 10^6$

N	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	$ Nu_l _{max}$	$ Nu_r _{max}$	X_{1melt}	X_{2melt}	X_{3melt}
40	16.497	17.590	79.89	170.59	8.442	9.316	0.625	0.850	0.950
80	15.235	16.125	74.49	165.69	8.066	7.860	0.624	0.849	0.937

Табл. 3: $Ra = 10^7$

N	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	$ Nu_l _{max}$	$ Nu_r _{max}$	X_{1melt}	X_{2melt}	X_{3melt}
40	39.336	43.581	187.76	632.46	18.177	34.887	0.700	0.900	1.000
80	29.487	30.617	127.76	549.58	18.425	19.931	0.737	0.925	0.975

было, однако слабые изменения во времени границы фронта плавления позволяет говорить о квазистационарном решении.

Затем, на рис. 4-8 для $Ra = 10^7$ на сетке 161×161 показана динамика развития плавления во времени. На отдельные моменты времени приводятся линии тока и изотермы. Эти результаты были получены для шага по времени $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ и начального условия для температуры:

$$u = \begin{cases} 1, & u(x, t) > u^*, \\ 0, & u(x, t) < u^*. \end{cases}$$

На рисунке 9 представлены зависимости координат фронта плавления от времени. Кривая 1 характеризует изменение координаты фронта плавления на нижней грани, кривая 2 описывает её изменение в среднем горизонтальном сечении, и, наконец, кривая 3 соответствует положению фронта плавления на верхней грани.

На рисунке 10 представлены временные зависимости максимального значения числа Нуссельта на боковых гранях. Кривая 1 характеризует изменение максимального значения числа Нуссельта на левой боковой поверхности полости, кривая 2 — на правой.

Как показывают вычислительные эксперименты, с увеличением числа Ra увеличивается размывание твердой фазы и увеличивается область, занимаемая жидкой фазой, причем скорость проплавления наиболее интенсивна в верхней части рассматриваемой области.

Литература

- [1] Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., Pnev O.P. and Churbanov A.G, Numerical simulation of convective/diffusion phase change problems - a review, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 17, pp. 4095–4106, 1993.
- [2] Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”, ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
- [3] Вабищевич П.Н., Илиев О.П. Численное решение сопряженных задач тепло- и массопереноса с учетом фазового перехода. // *Дифференциальные уравнения*. 1987. Т. 23, No. 7. С. 1127–1132.
- [4] Ramachandran N., Gupta J.P. and Jaluria Y., Thermal and fluid flow effects during solidification in a rectangular enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 187–194(1982).
- [5] Lacroix M., Computation of heat transfer during melting of a pure substance from an isothermal wall, *Numer. Heat Transfer, Part B* **15**, 191–210(1989).
- [6] Voller V.R., Cross M. and Markatos N.C., An enthalpy method for convection/diffusion phase change, *Int. Numer. Methods Engng* **24**, 271–284(1987).
- [7] Brent A.D., Voller V.R. and Reid K.J., Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal, *Numer. Heat Transfer* **13**(3), 297–318(1988).
- [8] Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Из-во МГУ, 1991.
- [9] Самарский А.А., Теория разностных схем, Наука, 1989.
- [10] Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений, Наука, 1978.
- [11] Роч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, 1980.

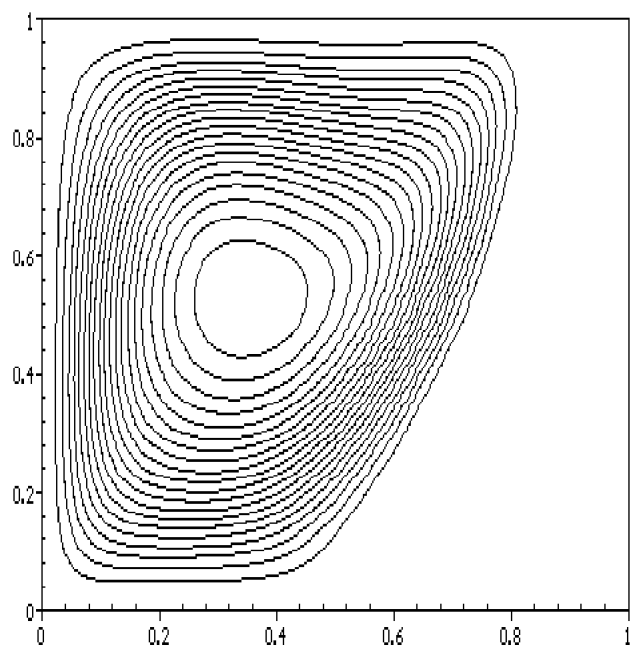
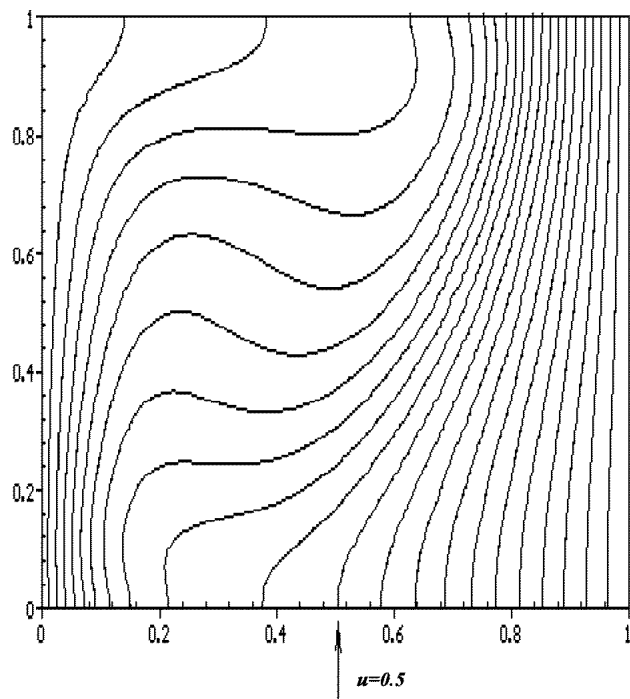


Рис. 1: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^5$.

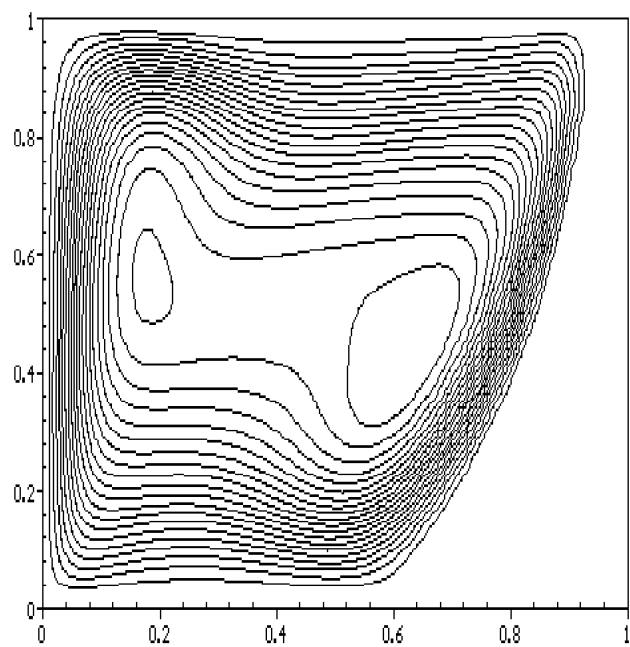
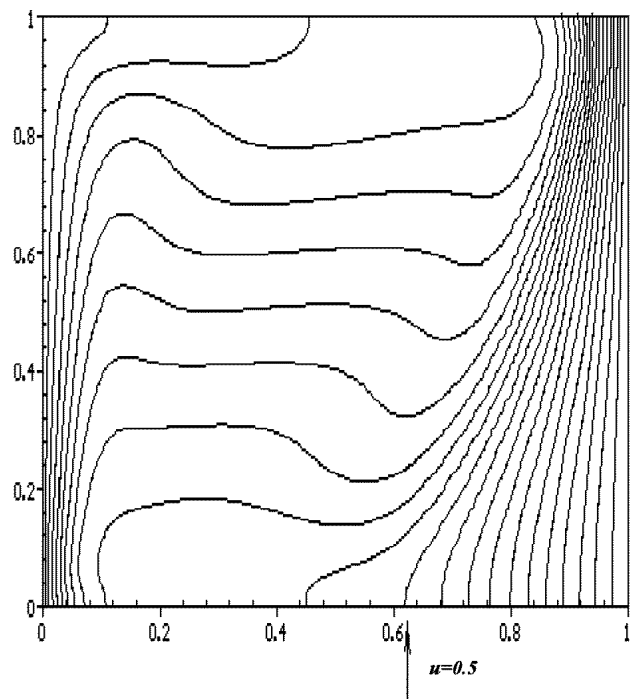


Рис. 2: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$.

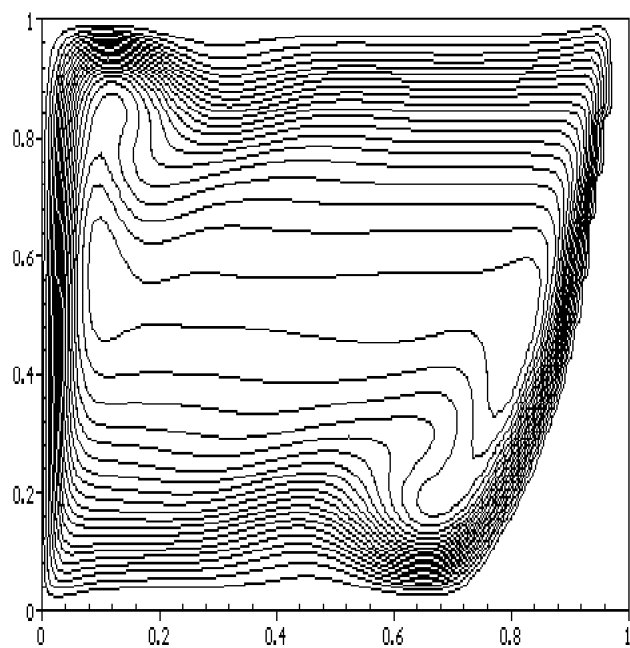
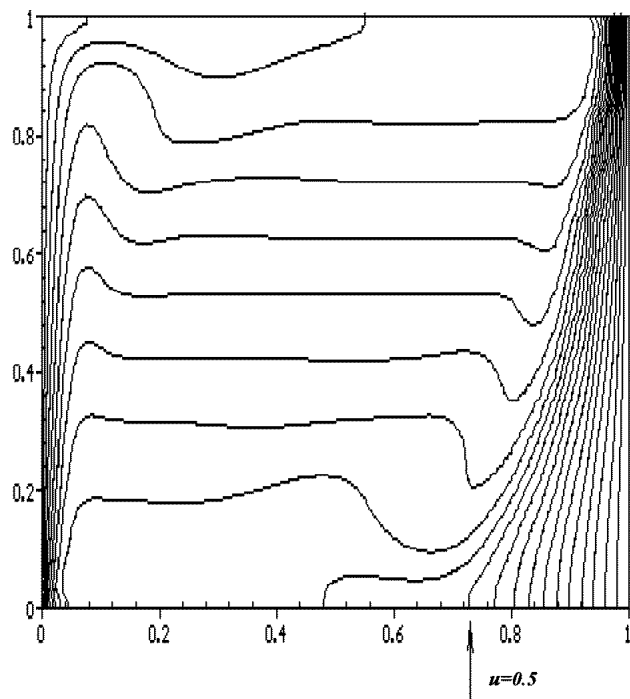


Рис. 3: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$.

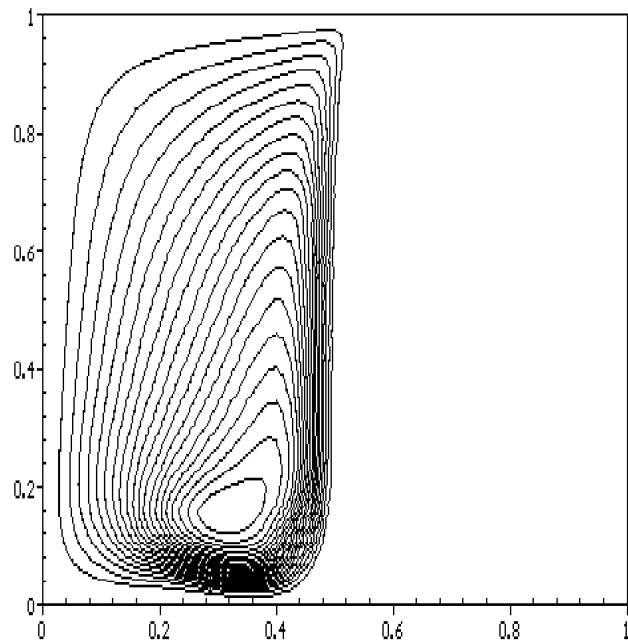
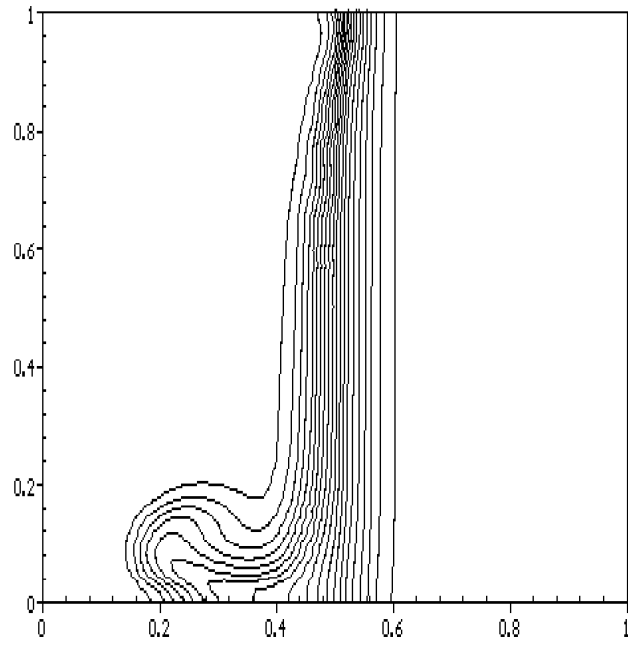


Рис. 4: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.001$.

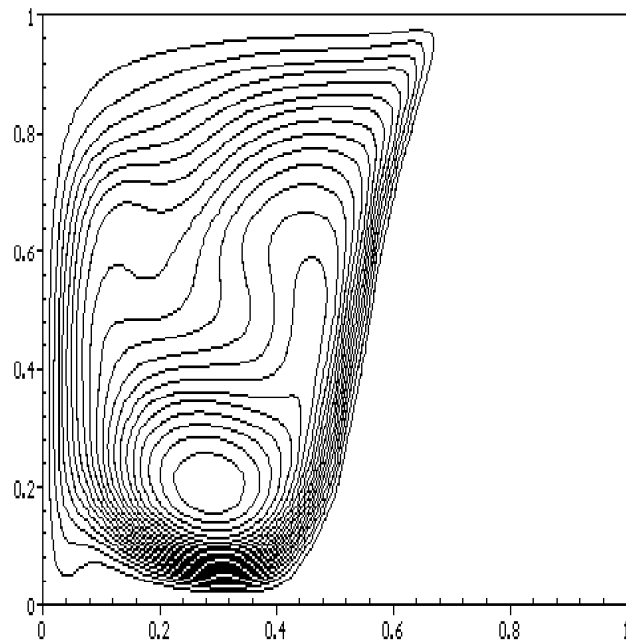
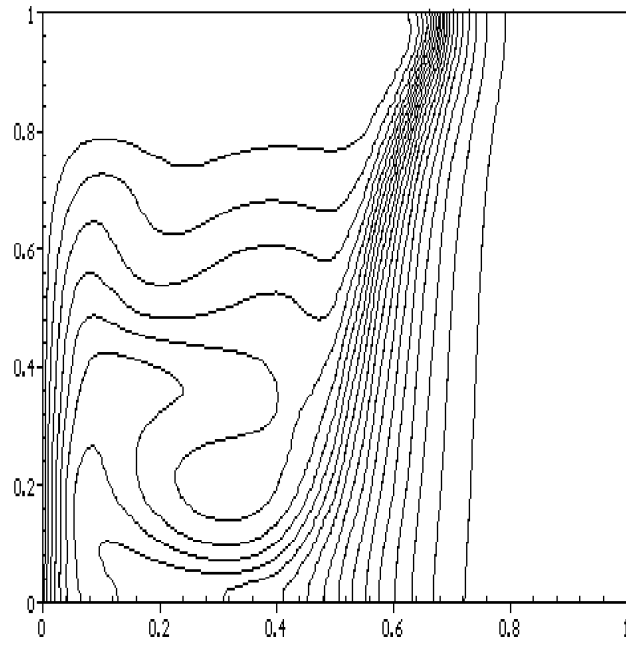


Рис. 5: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.005$.

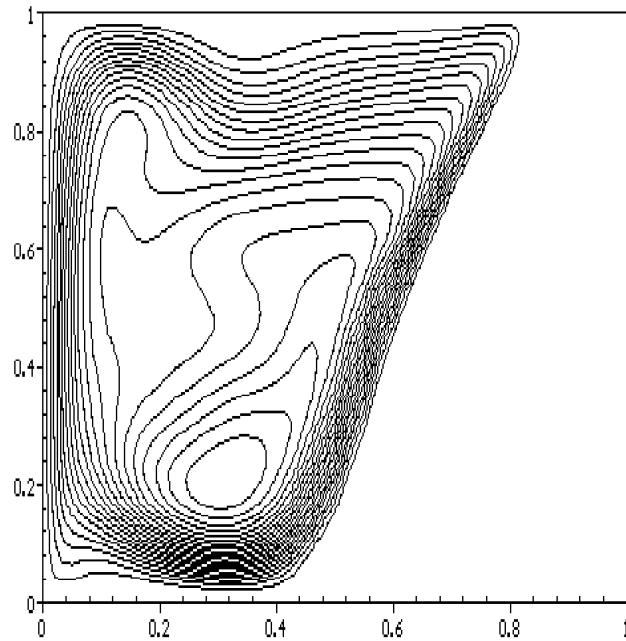
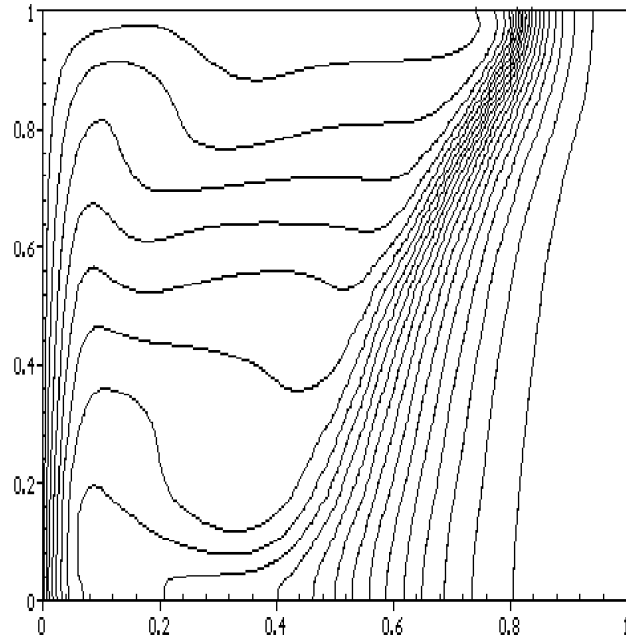


Рис. 6: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.009$.

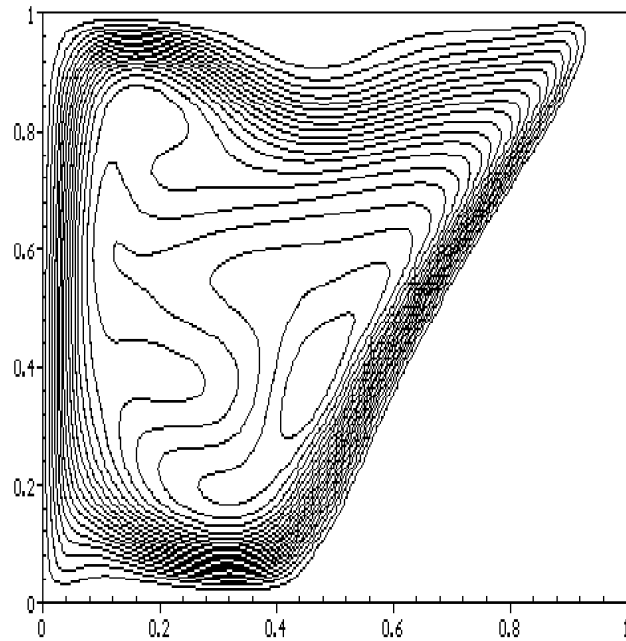
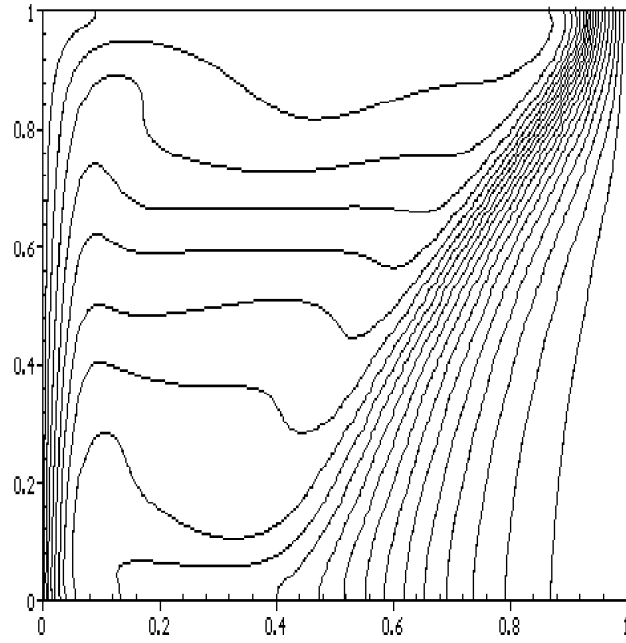


Рис. 7: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.013$.

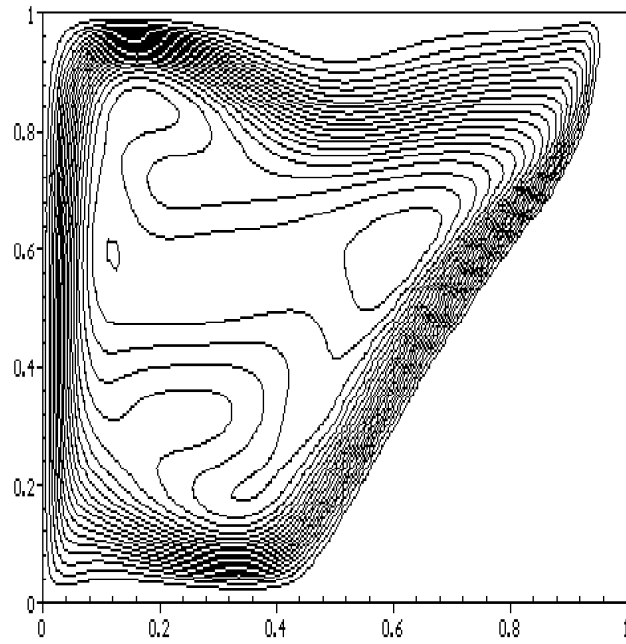
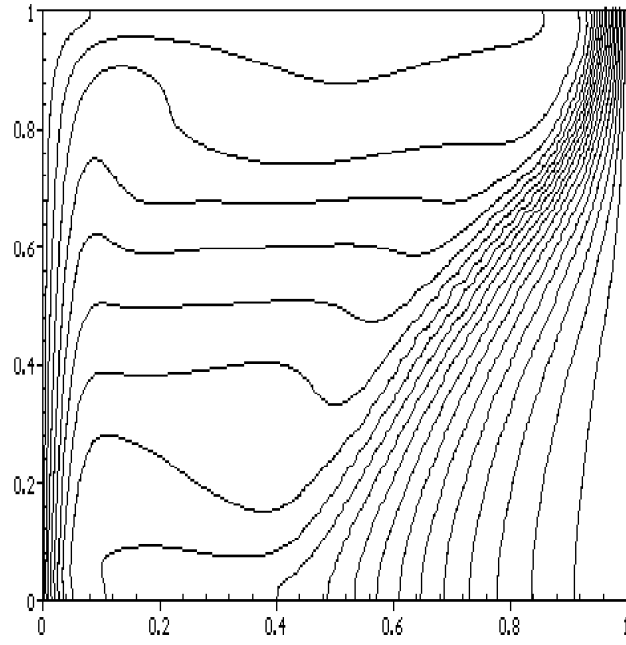


Рис. 8: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.017$.

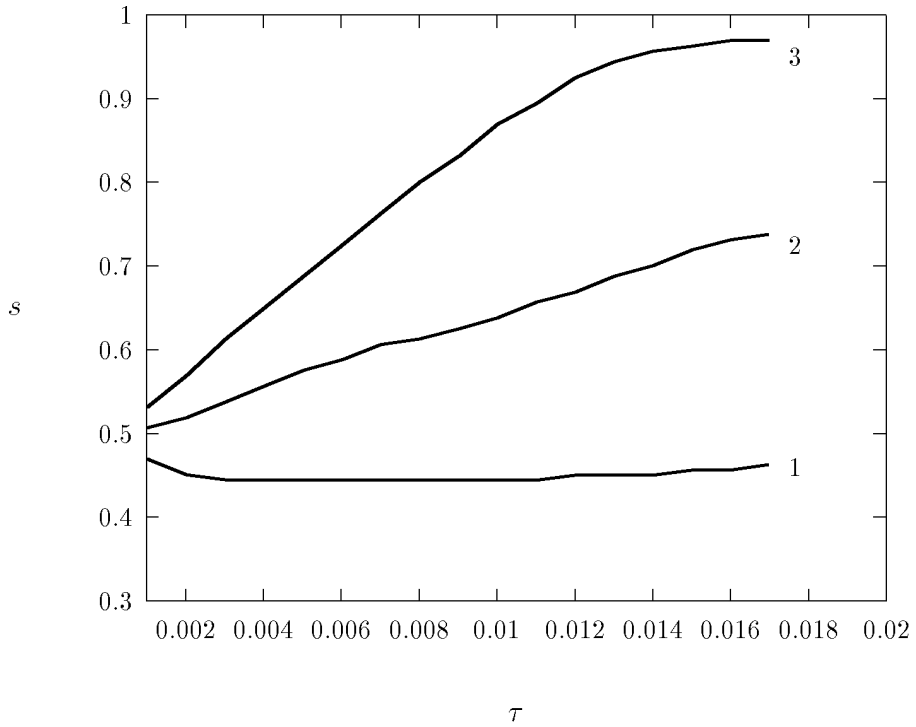


Рис. 9: Зависимости $X_{1melt}(t)$, $X_{2melt}(t)$, $X_{3melt}(t)$ для задачи $Ra = 10^7$ на сетке 161×161 .

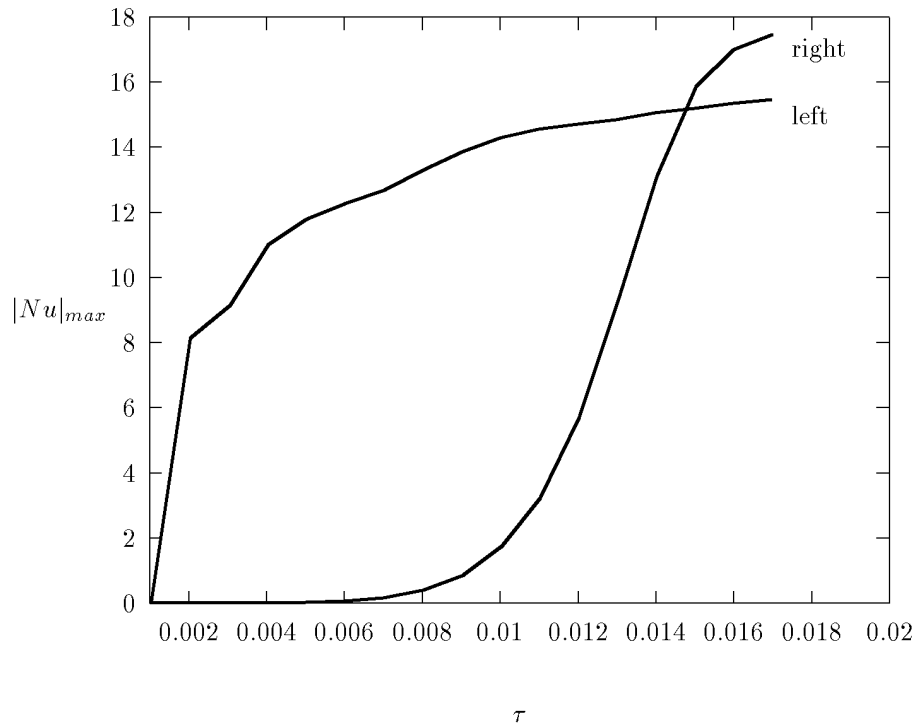


Рис. 10: Временная зависимость $|Nu|_{max}$ для задачи $Ra = 10^7$ на сетке 161×161 .