

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN ACADEMY OF  
SCIENCES

**ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО  
РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**

**NUCLEAR  
SAFETY INSTITUTE**

Препринт № NSI-7-94

Preprint NSI-7-94

**Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В.**

**Численное моделирование  
свободно конвективной  
тепловыделяющей жидкости  
с фазовыми превращениями**

Москва  
1994

Moscow  
1994

Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В. Численное моделирование свободно конвективной тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями. Препринт № NSI-7-94. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 1994. 20 с.

#### Аннотация

В работе описан вычислительный алгоритм для двумерной задачи конвекции тепло-выделяющей жидкости с фазовыми превращениями в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура". Для получения приближенного решения задачи используется метод фиктивных областей. Реализация используемой схемы расщепления основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Приведены данные расчетов по тестовой задаче о свободноконвективном движении тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с изотермическими граничными условиями.

©ИБРАЭ РАН, 1994

Aksenova A.E., Vabishchevich P.N., Chudanov V.V. Numerical simulation the free convective heat-generating fluid with phase transitions. Preprint NSI-7-94. Moscow: Nuclear Safety Institute, March 1994. 20 p.

#### Abstract

A numerical algorithm is described in the work for 2D convection problem of heat-generating fluid with phase transitions in the stream function - vorticity - temperature formulation. Method of the fictitious domains is used for obtaining of approximate solution of the problem. Numerical implementation of the operator-splitting scheme used in calculations is based on the solution of elliptic grid problems at every time-level. The algorithm validation is conducted on the benchmark solutions for buoyancy-driven flow of the heat-generating fluid with phase transitions in a square cavity with isothermal boundary conditions.

©Nuclear Safety Institute, 1994

# Численное моделирование свободно конвективной тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями

*Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В.\**

Институт Проблем Безопасного Развития Атомной Энергетики РАН  
Большая Тульская 52, Москва 113191, Россия

21 Марта 1994 года

## Аннотация

В работе описан вычислительный алгоритм для двумерной задачи конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”. Для получения приближенного решения задачи используется метод фиктивных областей. Реализация используемой схемы расщепления основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Приведены данные расчетов по тестовой задаче о свободноконвективном движении тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с изотермическими граничными условиями.

## 1 Введение

В работе строится линеаризованная разностная схема для решения задачи конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”, подобная рассмотренной в [1]. Аппроксимация конвективных слагаемых проводится со вторым порядком на основе центральных разностей. Для получения приближенного решения задачи используется вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [2]. Для реализации разностной схемы расщепления на каждом временном слое решаются сеточные эллиптические задачи для нахождения функции тока, вихря скорости, температуры.

Численное моделирование задач свободной конвекции с учетом фазовых переходов для задач с разнотемпературными стенками можно найти, например, в работах [3]–[9]. В этой работе рассматривается задача о свободноконвективном течении тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с изотермическими граничными условиями. Моделирование проводится в приближении Буссинеска для несжимаемой жидкости.

Приводятся данные расчетов для чисел Релея из диапазона  $10^5 \leq Ra \leq 10^9$  и различных чисел Даммкёлера на равномерной сетке  $81 \times 81$ .

## 2 Модельная задача

Рассматривается двумерная задача конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с изотермическими граничными условиями.

Пусть  $\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l, \alpha = 1, 2\}$  — область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода  $S(t)$ :

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u(x, t) = u^*\},$$

где  $u^*$  — температура фазового перехода.

---

\*E-mail: pbl@ibrae.msk.su

Последняя разбивает область  $\Omega$  на две подобласти. Определим область, содержащую жидкую фазу вещества как  $D(t) = \{x | x \in \Omega, u(x, t) > u^*\}$ , а область, содержащую твердую фазу вещества —  $D_0 = \Omega \setminus D$ . Задачу будем рассматривать в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в тепловыделяющей жидкости с однородным объемным источником тепла, с учетом фазовых превращений, используются нестационарные уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением для температуры:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \beta g e u = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$\left( c(u) + \lambda \delta(u - u^*) \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = q, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  обозначает вектор скорости,  $p$  — нормализованное на плотность давления (за вычетом гидростатического),  $g$  — ускорение свободного падения,  $u$  — отклонение температуры от равновесной,  $\nu$  — кинематическую вязкость,  $\beta$  — коэффициент объемного расширения,  $e = (0, 1)$  — вектор, определяющий направление выталкивающей силы,  $q$  — мощность однородного теплового источника,  $\delta$  — дельта-функцию,  $\lambda$  — энтальпию фазового перехода,  $c(u)$  — коэффициент теплоемкости,  $k(u)$  — коэффициент теплопроводности. Для простоты ограничимся рассмотрением случая постоянных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в твердой и жидкой фазах, неменяющихся при фазовом превращении.

Рассматриваемая область течения представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на границах полости  $\partial D$  задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$\mathbf{v}(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В качестве тепловых условий выбраны изотермические граничные условия, что соответствует внешнему охлаждению полости:

$$u(x, t) = u_c = \text{const}, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad (5)$$

где  $u_c$  — температура стенки. В силу того, что в начальный момент времени жидкость покоится и имеет равновесную температуру начальное условие для скорости имеет вид

$$\mathbf{v}(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad (6)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Поскольку первоначально вся область представляет собой жидкую фазу вещества, то  $D(0) = \Omega$ .

Таким образом, соотношения (1)–(7) полностью описывает свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в области  $\Omega$  на любой момент времени  $t > 0$ . Вычислительный алгоритм её приближенного решения строится на базе переменных “функция тока, вихрь скорости”. Компоненты скорости определяются через функцию тока  $\psi(x, t)$  как:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (8)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Для аппроксимации конвективных слагаемых введем для произвольного вектора  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  дифференциальный оператор  $\mathcal{V}(\mathbf{q})$  таким образом, что:

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{V}_{\alpha}(q_{\alpha}), \quad (10)$$

$$\mathcal{V}_{\alpha}(q_{\alpha})z = \frac{1}{2} \left( q_{\alpha} \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (q_{\alpha} z) \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда с учетом соотношений (8)–(10) из уравнения движения (1) для вихря скорости получим следующее выражение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{\text{Ra}_q}{\text{Pr}} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \\ x \in D, \quad 0 < t \leq T$$

с модифицированным числом Релея, получаемым по мощности теплового источника  $q$ , равным

$$\text{Ra}_q = \frac{\beta g q l^5}{a \nu k}$$

и числом Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

Для дальнейших расчетов нам потребуется иная форма записи безразмерного уравнения движения, а именно

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{\text{Ra}_u \text{Da}}{\text{Pr}} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

где используется число Релея, определяемое по характерному перепаду температур

$$\text{Ra}_u = \frac{\beta g (u^* - u_c) l^3}{a \nu}$$

и число Дамкёлера

$$\text{Da} = \frac{q l^2}{k(u^* - u_c)}.$$

Здесь и далее будем использовать для безразмерных переменных те же обозначения что и для точных величин.

Из уравнения несжимаемости (2) будем иметь уравнение Пуассона для функции тока

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{\alpha}^2} = w, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Уравнение энергии (3) в безразмерных переменных переписется в виде

$$\left(1 + \text{Ste} \delta(u - u^*)\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})u\right) - \frac{1}{\text{Pr}} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} + 1\right) = 0, \quad (13) \\ x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

где число Стефана определяется из соотношения  $\text{Ste} = \lambda/(c(u^* - u_c))$ . Обезразмеривание здесь проведено по высоте полости  $l$ , коэффициенту кинематической вязкости  $\nu$  и величине  $q l^2/k$ , пропорциональной перепаду температуры.

Система уравнений (11)–(13) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4)–(7). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата  $\Omega$  дают соотношения

$$\psi(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T, \quad (15)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к  $\partial D$ .

Из условия (6) имеем

$$\psi(x, 0) = 0, \quad x \in D. \quad (16)$$

Изотермические граничные условия в безразмерных переменных имеют вид

$$u(x, t) = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Начальное условие для температуры остается без изменений.

### 3 Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи (11)–(17) с расчетом поля течения в изменяющейся области  $D(t)$  используется метод фиктивных областей [2]. Вычислительный алгоритм сквозного счета строится на основе варианта метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. Задача рассматривается во всем единичном квадрате  $\Omega$ .

Пусть  $\varepsilon$  — малый параметр,  $\psi^\varepsilon, w^\varepsilon, u^\varepsilon$  — приближенные решения, которые определяются из уравнений:

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v}^\varepsilon)w^\varepsilon + c^\varepsilon(u^\varepsilon)\psi^\varepsilon - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\text{Ra}_u \text{Da}}{\text{Pr}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} = 0, \quad (18)$$

$$- \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} = w^\varepsilon, \quad (19)$$

$$\left(1 + \text{Ste} \delta(u^\varepsilon)\right) \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v}^\varepsilon)u^\varepsilon\right) - \frac{1}{\text{Pr}} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} + 1\right) = 0. \quad (20)$$

Коэффициент продолжения  $c^\varepsilon(u^\varepsilon)$  определяется выражением

$$c^\varepsilon(u^\varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in D(t) \quad (u^\varepsilon > u^*), \\ \varepsilon^{-2}, & x \in \Omega \setminus D(t) \quad (u^\varepsilon < u^*). \end{cases}$$

Система уравнений (18)–(20) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\psi^\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (22)$$

$$\psi^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (23)$$

$$u^\varepsilon(x, t) = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad (24)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (25)$$

При достаточно малом  $\varepsilon$  решение задачи (18)–(25) в  $\Omega$  дает приближенное решение исходной задачи (11)–(17) в меньшей области  $D$ , т.е.  $\psi^\varepsilon(x, t) \rightarrow \psi(x, t)$ ,  $x \in D$ ,  $t > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 4 Дискретизация по пространству

Введем в области  $\Omega$  равномерную по каждому направлению сетку  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$  с шагами  $h_1$  и  $h_2$ , соответственно. Обозначим через  $\omega_h$  множество всех внутренних узлов, т.е.  $\omega_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = 1, \alpha = 1, 2\}$ , а через  $\partial\omega_h$  множество всех граничных узлов сетки.

Для написания разностной схемы воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [10]. Для направленных разностей справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} w_{x_\alpha} &= \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha)}{h_\alpha}, \\ w_{\bar{x}_\alpha} &= \frac{w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{h_\alpha}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2,$$

а для центральных разностей —

$$w_{x_\alpha}^\circ = \frac{1}{2}(w_{x_\alpha} + w_{\bar{x}_\alpha}) = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Введем сеточный оператор Лапласа на множестве сеточных функций  $y \in H$ , обращающихся в нуль на границе сетки следующим образом:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (26)$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве  $H$  определим скалярное произведение

$$(y, z) = \sum_{x \in w_h} y(x)z(x)h_1h_2.$$

Заметим, что в  $H$  оператор  $\Lambda$  самосопряжен и положительно определен [11], т.е.  $\Lambda = \Lambda^* > 0$ .

Для аппроксимации конвективных слагаемых определим вектор

$$\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad w_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (27)$$

Это позволяет нам записать конвективный перенос вихря в виде

$$\mathcal{V}(\mathbf{v})w = -\mathcal{V}(\mathbf{w})\psi. \quad (28)$$

Обращение к такой форме записи обусловлено тем, что для любых векторов  $\mathbf{w}$  будет выполняться условие  $(\mathcal{V}(\mathbf{v})w, \psi) = 0$ .

Для приближенных решений воспользуемся теми же обозначениями, что и для точных. Тогда с учетом соотношений (10), (27), (28) для аппроксимации конвективных слагаемых будем иметь:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{w}) &= \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha(w_\alpha), \\ V_1(w_1)\psi &= \frac{1}{2} \left( w_{x_2}^\circ \psi_{x_1}^\circ + \left( w_{x_2}^\circ \psi \right)_{x_1}^\circ \right), \\ V_2(w_2)\psi &= -\frac{1}{2} \left( w_{x_1}^\circ \psi_{x_2}^\circ + \left( w_{x_1}^\circ \psi \right)_{x_2}^\circ \right). \end{aligned} \quad (29)$$

При такой аппроксимации конвективного переноса

$$(V(\mathbf{w})\psi, \psi) = 0, \quad (30)$$

т.е. в гильбертовом пространстве  $H$  оператор  $V(\mathbf{w})$  кососимметричен ( $V(\mathbf{w}) = -V^*(\mathbf{w})$ ). Аналогичная аппроксимация  $\mathcal{V}(\mathbf{v})$  используется для конвективных слагаемых в уравнении для температуры.

Аппроксимацию уравнений (18), (19) проведем с использованием формулы Тома [12] для вихря скорости во внутренних узлах сетки, что позволит записать дифференциально-разностное уравнение вида:

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi - V(\mathbf{w})\psi + \Lambda^2 \psi + \left( \rho(x) + c^\varepsilon(u) \right) \psi = \frac{\text{Ra}_u \text{Da}}{\text{Pr}} u_{x_1}^\circ, \quad (31)$$

$$x \in \omega_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В этом уравнении сеточная функция  $\rho(x)$  при граничных условиях Тома для вихря скорости определяется соотношением

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha}(x_{\alpha}),$$

$$\rho_{\alpha}(x_{\alpha}) = \begin{cases} 0, & h_{\alpha} < x_{\alpha} < l_{\alpha} - h_{\alpha}, \\ \frac{2}{h_{\alpha}^4}, & x_{\alpha} = h_{\alpha}, \quad l_{\alpha} - h_{\alpha}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Принимая во внимание особенности вычислительной реализации, удобно переписать уравнение (31) в виде

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi + (A_1 + A_2) \psi = \frac{\text{Ra}_u \text{Da}}{\text{Pr}} u_{x_1}^{\circ}, \quad (32)$$

где

$$A_1 = \Lambda^2, \quad A_2 = -V(\mathbf{w}) + \left( \rho(x) + c^{\varepsilon}(u) \right) E. \quad (33)$$

Учитывая свойство кососимметричности оператора  $V(\mathbf{w})$  (см. (30)), в (33) имеем  $A_1 = A_1^* > 0$ , а  $A_2 \geq 0$  при любых  $\mathbf{w}$ .

Уравнение теплопроводности (20) принимает вид

$$\left( 1 + \text{Ste} \delta(u, \Delta) \right) \left( \frac{du}{dt} + V(\mathbf{v})u \right) + \frac{1}{\text{Pr}} (\Lambda u + 1) = 0, \quad (34)$$

$$x \in \omega_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В (34)  $\delta(u, \Delta)$  аппроксимирует  $\delta$ -функцию, т.е.  $\delta$ -функция заменяется  $\delta$ -образной функцией  $\delta(u, \Delta)$  вида

$$\delta(u, \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |u| \leq \Delta, \\ 0, & |u| > \Delta, \end{cases}$$

где  $\Delta$  — полуширина сглаживания  $\delta$ -функции.

## 5 Разностные схемы расщепления

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку по времени с шагом  $\tau > 0$ :  $\omega_{\tau} = \{t | t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_{\tau}, N_{\tau}\tau = T\}$  и пусть  $y_n = y(t_n)$ . Разностная схема для системы уравнений (31), (34) основана на естественной линеаризации, когда операторы конвективного переноса  $V(\mathbf{w}), V(\mathbf{v})$  — определяются решением на предыдущем временном слое. Для решения задачи используется чисто неявная факторизованная схема (аналог схемы Дугласа-Рэкфорда).

На первом шаге рассчитывается вихрь скорости  $w_{n+1/2} = \Lambda \psi_{n+1/2}$  из уравнения

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1/2} - \Lambda \psi_n}{\tau} - V(\mathbf{w}_n) \psi_n + \Lambda^2 \psi_{n+1/2} + \left( \rho(x) + c^{\varepsilon}(u_n) \right) \psi_n = \frac{\text{Ra}_u \text{Da}}{\text{Pr}} (u_{n+1})_{x_1}^{\circ}, \quad x \in \omega_h, \quad (35)$$

т.е. конвективный перенос и граничное условие для вихря берутся с предыдущего временного слоя. С учетом введенных обозначений уравнение (35) может быть представлено в виде

$$\frac{w_{n+1/2} - w_n}{\tau} - V(\mathbf{w}_n) \psi_n + \Lambda w_{n+1/2} + \left( \rho(x) + c^{\varepsilon}(u_n) \right) \psi_n = \frac{\text{Ra}_u \text{Da}}{\text{Pr}} (u_{n+1})_{x_1}^{\circ}, \quad x \in \omega_h. \quad (36)$$

На втором шаге проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для вихря скорости:

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1} - \Lambda \psi_{n+1/2}}{\tau} + \left( \rho(x) + c^{\varepsilon}(u_n) - V(\mathbf{w}_n) \right) (\psi_{n+1} - \psi_n) = 0. \quad (37)$$



Таким образом, при переходе на новый временной слой вихрь скорости определяется как решение самосопряженной задачи (36), а для определения функции тока имеем несамосопряженную задачу (37). Для вычисления температуры во внутренних узлах сетки используется линейризованное разностное уравнение вида:

$$\left(1 + \text{Ste} \delta(u_n, \Delta)\right) \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + V(\mathbf{v}_n)u_{n+1}\right) + \frac{1}{\text{Pr}}(\Lambda u_{n+1} + 1) = 0, \quad x \in \omega_h.$$

Схема (35)-(37) хорошо зарекомендовала себя при решении задач свободной конвекции тепло-выделяющих жидкостей.

## 6 Результаты расчетов

Сначала были проведены расчеты стационарного решения для модифицированного числа Релея  $\text{Ra}_q = 10^5$  и числа Прандтля  $\text{Pr} = 1$  на последовательности равномерных сеток  $41 \times 41, 81 \times 81, 161 \times 161$ . Решение было получено методом установления. Расчеты были выполнены для числа Стефана  $\text{Ste} = 0$  и числа Даммкёлера  $\text{Da} = 50$  на сетках с числом шагов  $N_1 = N_2 = 40, 80, 160$ , соответственно.

На Рис.1 представлены изотермы и линии тока для стационарного решения на сетке  $81 \times 81$ . Максимум температуры немного смещен вверх и расположен на оси симметрии. Жидкость в полости циркулирует в виде двух симметричных конвективных вихрей с незначительно смещенными вверх центрами.

Далее, были зафиксированы основные параметры, входящие в модифицированное число Релея  $\text{Ra}_q$ , кроме характерного размера рассматриваемой области  $l$ . При таком предположении варьирование размеров рассматриваемой полости ведет к изменению значений чисел  $\text{Ra}_q$  и  $\text{Da}$ . Так, увеличение характерного размера области  $l$  в  $10^{1/5}$  раза будет сопровождаться ростом модифицированного числа Релея на порядок и одновременным увеличением числа Даммкёлера на величину  $10^{2/5}$ .

В этой связи, была проведена серия расчетов для различных пар чисел  $\text{Ra}_q$  и  $\text{Da}$  (см. табл. 1). При обработке данных расчетов основное внимание уделялось минимальной ве-

Табл. 1: Безразмерные параметры для серии 1.

$\text{Ra}_q$	$\text{Da}$
$10^5$	50
$10^6$	125.5
$10^7$	312.5
$10^8$	769.2

личине функции тока, которая определяет интенсивность конвективного перемешивания, и объему, занимаемому твердой фазой вещества. Расчеты были выполнены для числа Стефана  $\text{Ste} = 0$  и числа Прандтля  $\text{Pr} = 1$  на равномерной сетке  $81 \times 81$ .

На Рис.2 представлено стационарное решение для  $\text{Ra}_q = 10^6$  и соответствующего числа Даммкёлера. Картина течения в этом случае подобна той, что получена для  $\text{Ra}_q = 10^5$ . Однако максимум температуры гораздо сильнее смещен вверх по сравнению с предыдущим расчетом (см. Рис.1), что объясняется увеличением характерного размера полости  $l$  примерно в 1.5 раза.

На рисунке 3 отражена структура нестационарного теплового и гидродинамического полей для  $\text{Ra}_q = 10^7$  и  $\text{Da} = 312.5$ . По сравнению с предыдущим расчетом, характер течения существенно усложняется: в верхней части полости образуются два вторичных вихря, что приводит к возникновению двух локальных максимумов температуры в объеме полости и двух максимумов теплового потока на её верхней поверхности. Картина течения, в результате смещения вторичных вихрей в верхней части полости, существенно несимметрична.

На Рис. 4 показано нестационарное течение для  $\text{Ra}_q = 10^8$  и  $\text{Da} = 769.2$ , характер которого указывает на возможность превращения режима течения из ламинарного в переходной.

Как показывают вычислительные эксперименты, с увеличением размеров расчетной области пространство занимаемое твердой фазой вещества сокращается, а начиная с  $Ra_q = 10^8$  корки практически исчезают, так как с увеличением размеров области происходит уменьшение безразмерной разности температур  $u^* - u_c$ , что снижает возможность образования корок.

Поскольку в этой серии расчетов при числе Релея равном  $10^8$  корки практически полностью отсутствовали, представлялось интересным повторить аналогичные вычисления с меньшим числом Даммкёлера  $Da = 5$ . Значения чисел  $Ra_q$  и  $Da$  для второй серии расчетов приведены в таблице 2.

Табл. 2: Безразмерные параметры для серии 2.

$Ra_q$	$Da$
$10^5$	5
$10^6$	12.5
$10^7$	31.25
$10^8$	76.92
$10^9$	200.0

На Рис.5 отражено стационарное решение для  $Ra_q = 10^5$ , где жидкость в полости циркулирует в виде двух симметричных конвективных ячеек, а максимум температуры расположен в центре полости. Малый объем области, занимаемый функциями тока, свидетельствует о почти полном замерзании жидкости в полости, в отличие от аналогичного расчета из серии 1. Такая разница в объемах твердой фазы объясняется более высокой разницей температур  $(u^* - u_c)$ <sup>1</sup> при  $Da = 5$  нежели, чем при  $Da = 50$ .

На Рис.6 показаны изотермы и линии тока для случая  $Ra_q = 10^6$  и соответствующего числа Даммкёлера  $Da = 12.5$ . Картина течения аналогична полученной для предыдущего расчета, несмотря на то, что в данном случае стационарное решение получено не было. Постоянство средней по объему температуры полости позволяет говорить о квазистационарном решении.

Квазистационарное решение для  $Ra_q = 10^7$  демонстрирует Рис.7, где показана четырехвихревая структура течения с двумя локальными максимумами температуры в объеме полости и двумя максимумами теплового потока на её верхней поверхности. В данном случае наблюдается ярко выраженная стратификация теплового поля с повышением уровня теплоотдачи через верхнюю границу. В отличие от аналогичного расчета серии 1, имеется практически симметричное решение.

Для случая  $Ra_q = 10^8$  течение становится периодически осциллирующим (Рис.8). Нарушение симметрии вблизи верхней поверхности полости происходит из-за смещения вторичных вихрей.

С увеличением числа Релея до  $10^9$  ( $Da = 200$ ) течение приобретает существенно нестационарный характер (см. Рис.9), что указывает на возможность превращения режима течения из ламинарного в переходной.

Как показывают вычислительные эксперименты, в размерах области затвердевания для двух проведенных серий расчетов наблюдается существенное различие. Так, в серии 2 жидкость в полости при низких числах Релея ( $Ra_q = 10^5, 10^6$ ) (см. Рис.5 и Рис.6) практически полностью замерзает, в отличие от аналогичных расчетов серии 1, где корки занимают существенно меньшую область. Кроме того, наблюдаются корки при  $Ra_q = 10^9$ , тогда как для серии 1 они практически полностью исчезают при  $Ra_q = 10^8$ . Это объясняется наличием значительной разницы в температурах фазового перехода и стенки.

---

<sup>1</sup> $(u^* - u_c) \sim 1/Da$

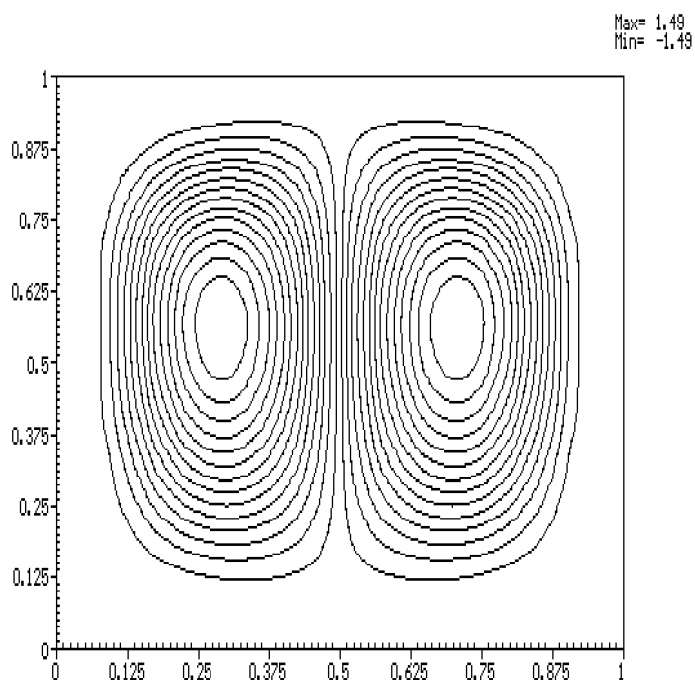
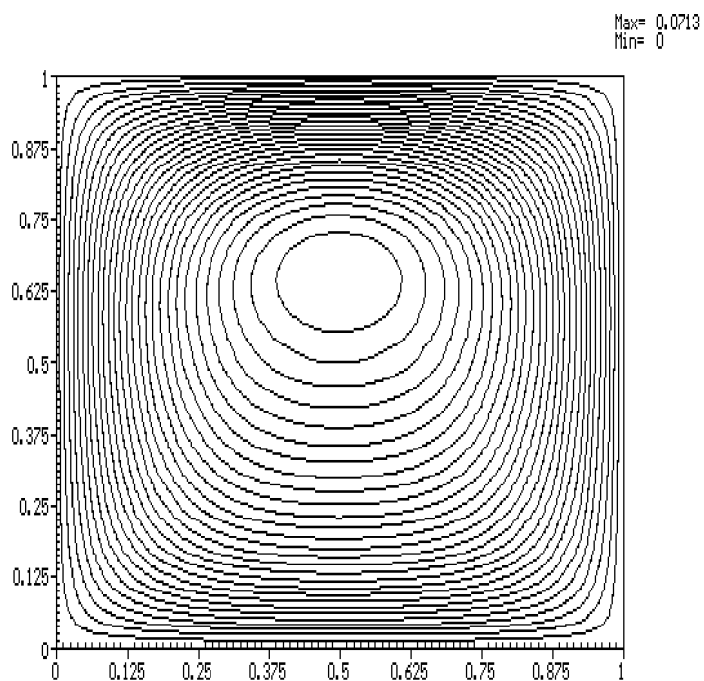


Рис. 1: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^5$  и  $Da = 50$ .

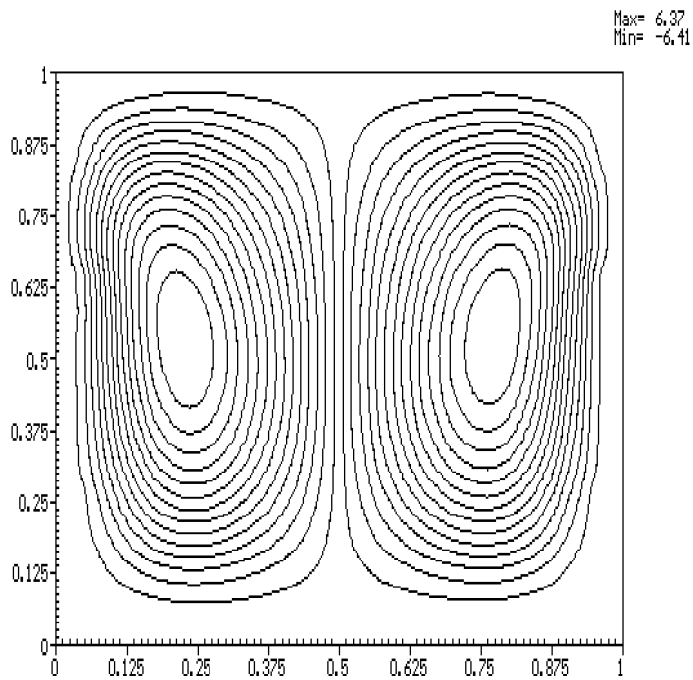
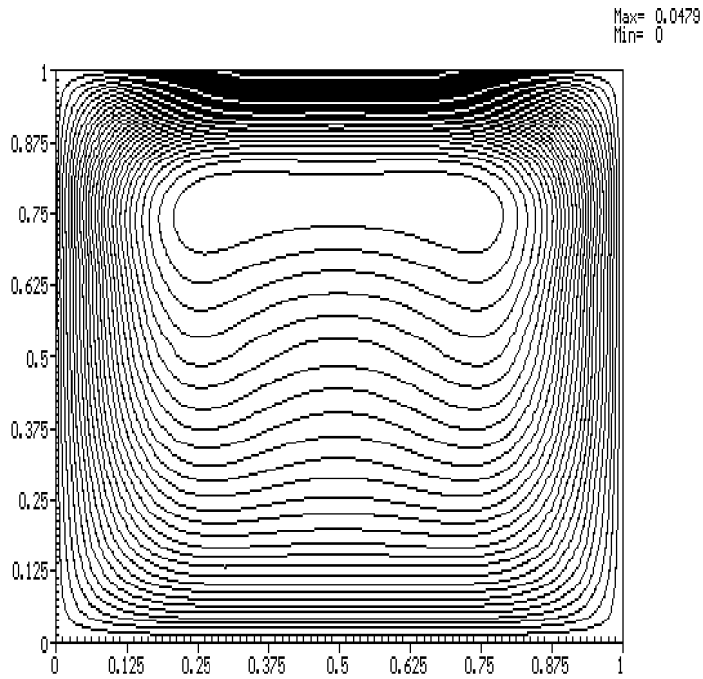


Рис. 2: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^6$  и  $Da = 125.5$ .

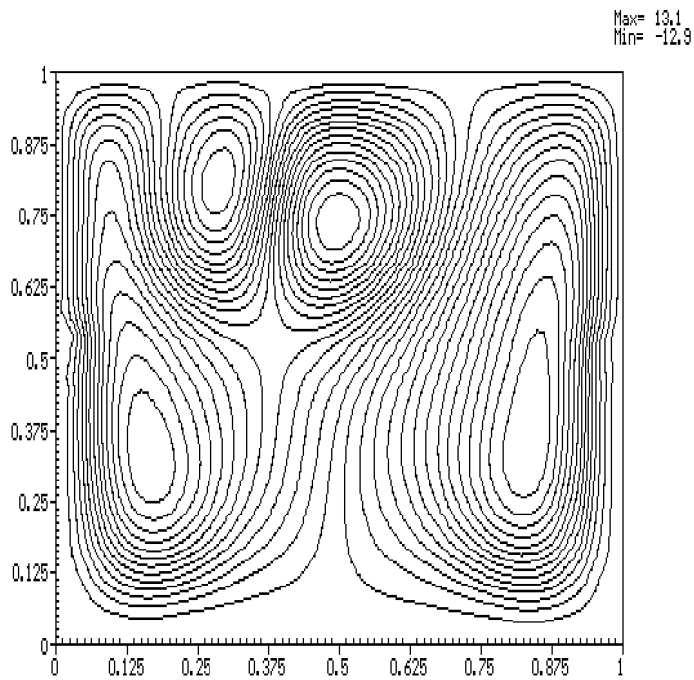
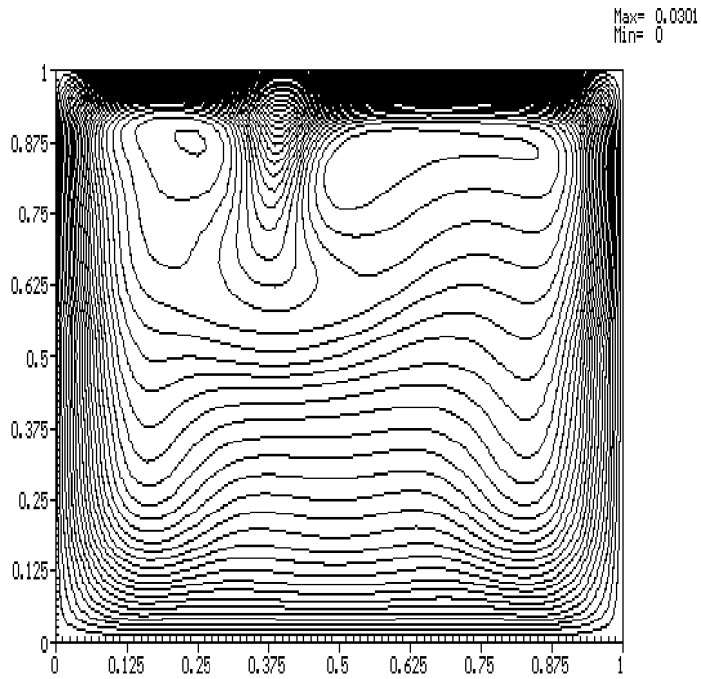


Рис. 3: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^7$  и  $Da = 312.5$ .

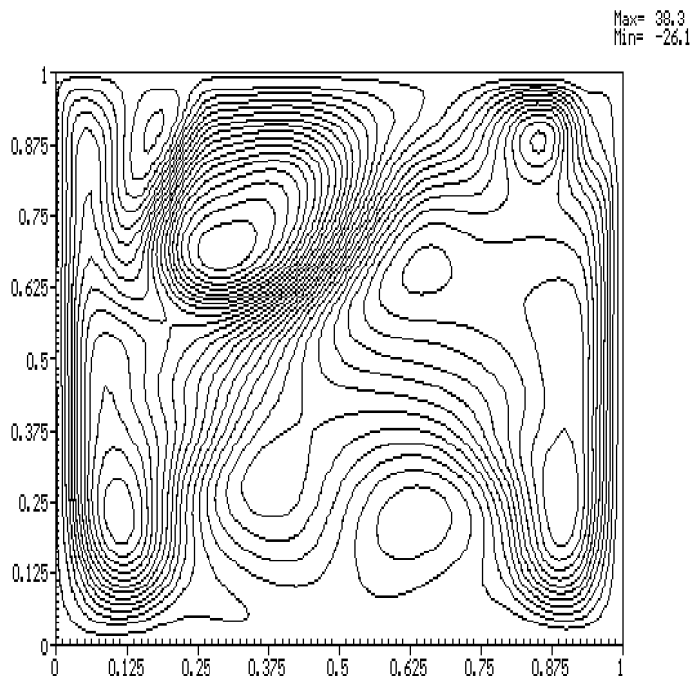
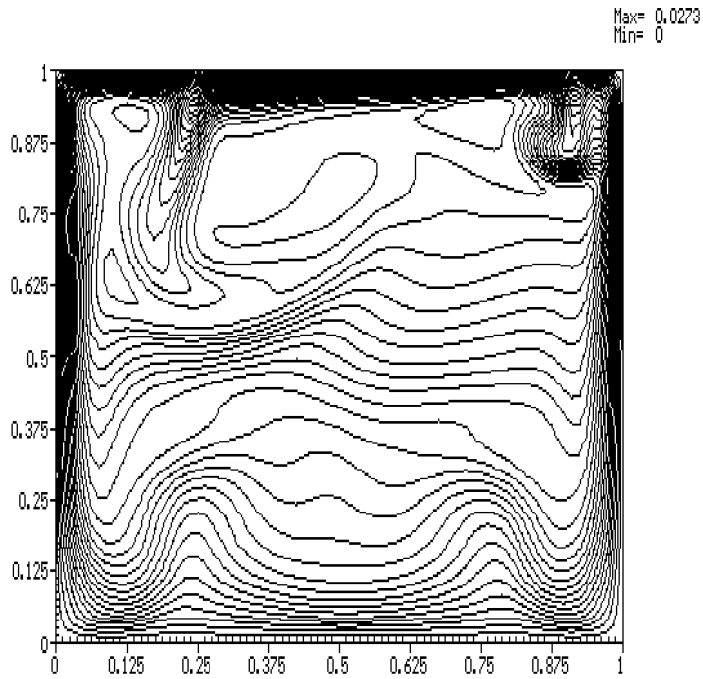


Рис. 4: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^8$  и  $Da = 769.2$ .

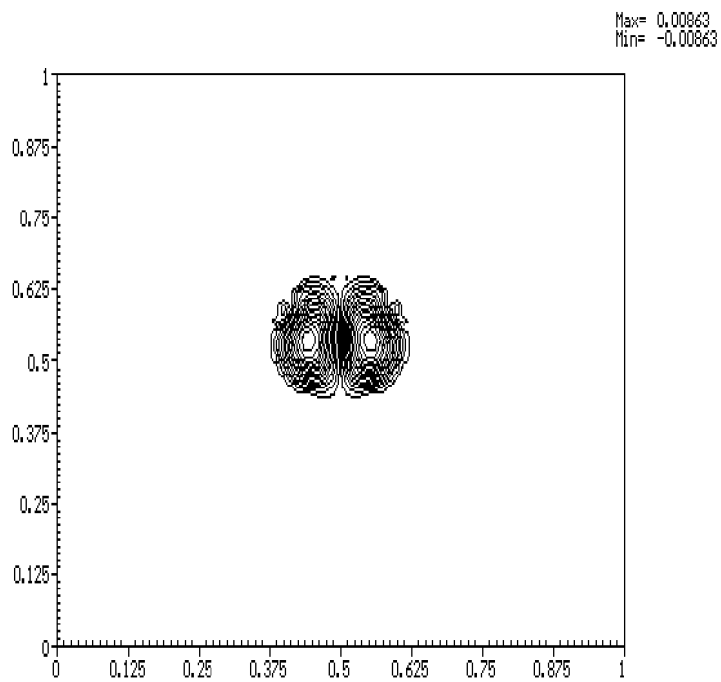
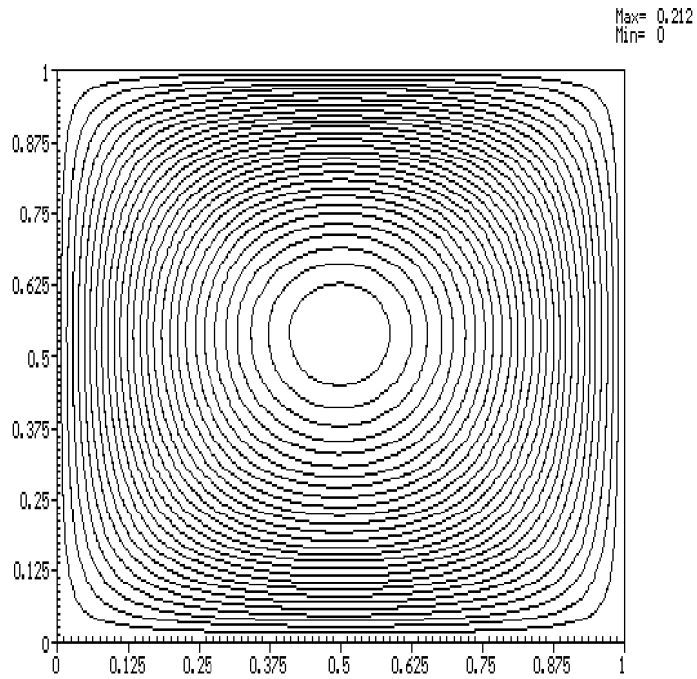


Рис. 5: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^5$  и  $Da = 5$ .

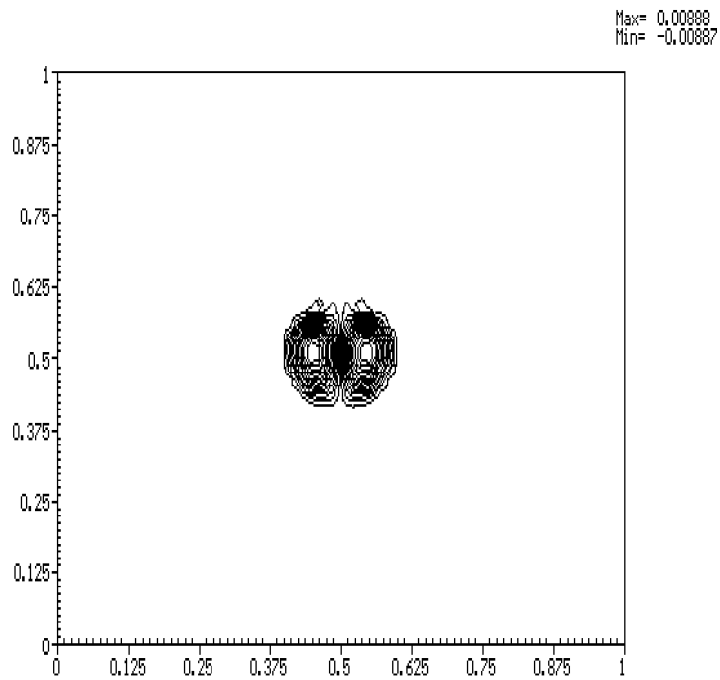
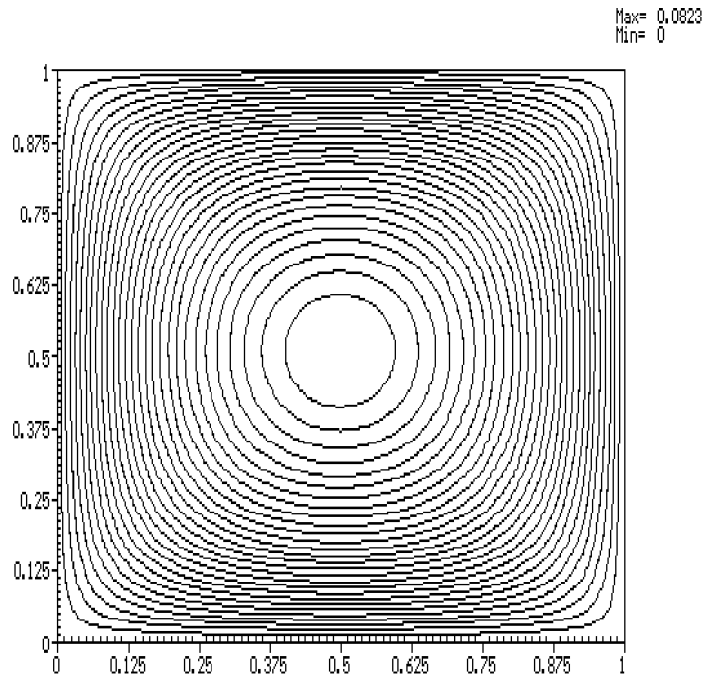


Рис. 6: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^6$  и  $Da = 12.5$ .



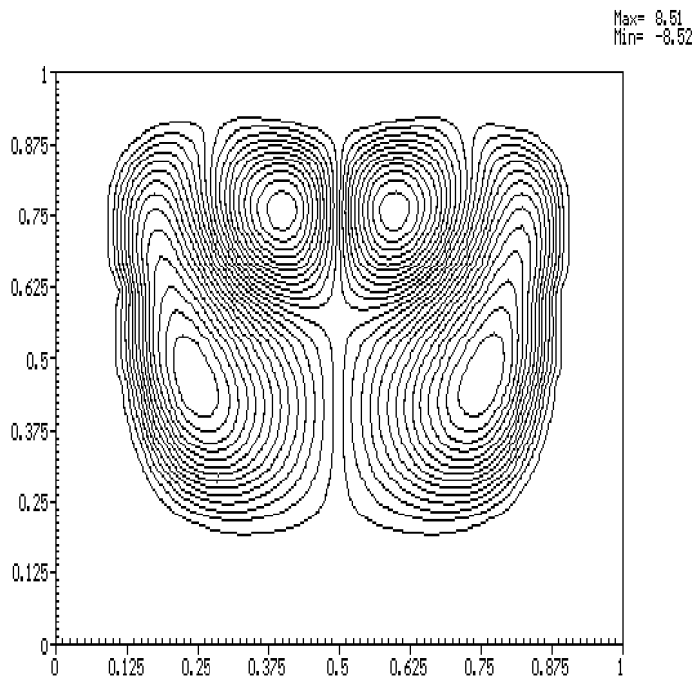
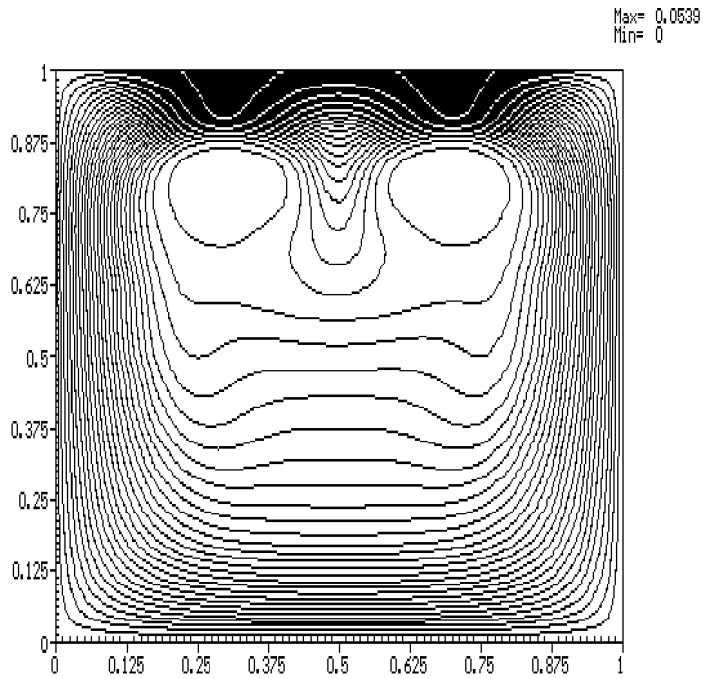


Рис. 7: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^7$  и  $Da = 31.25$ .

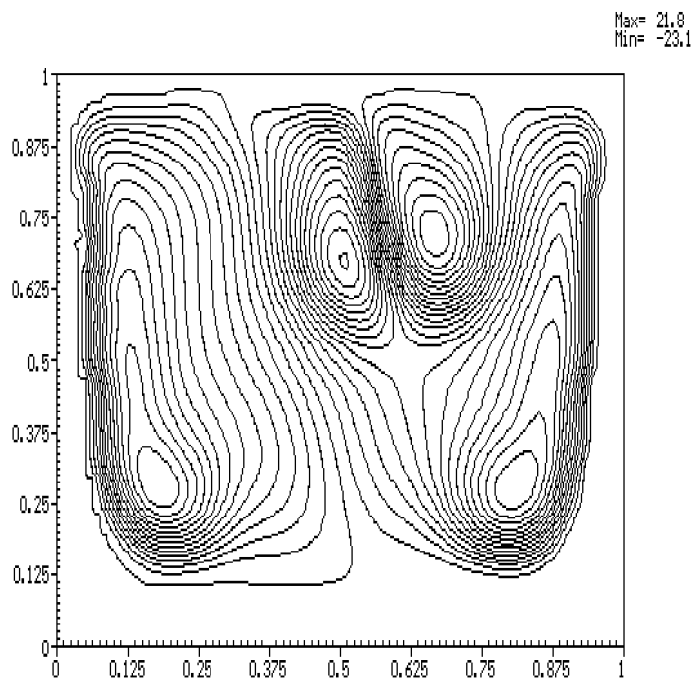
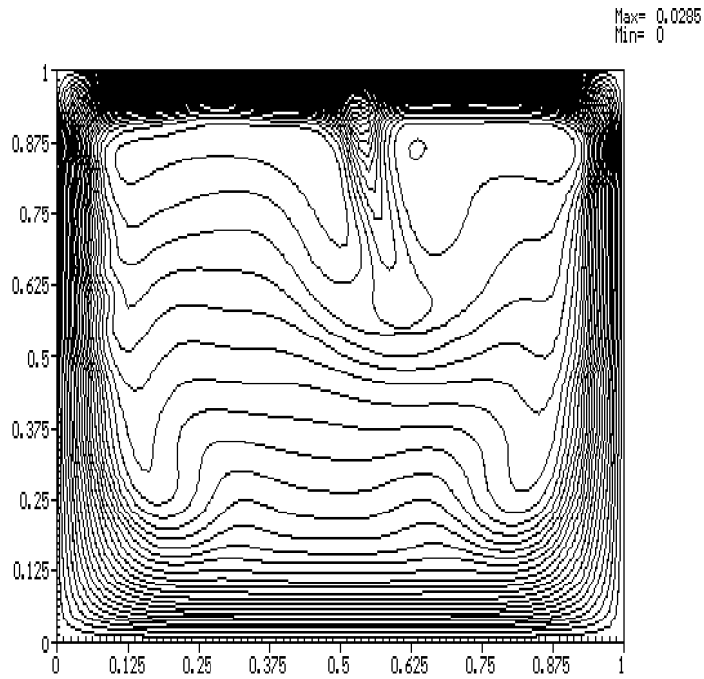


Рис. 8: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^8$  и  $Da = 76.92$ .

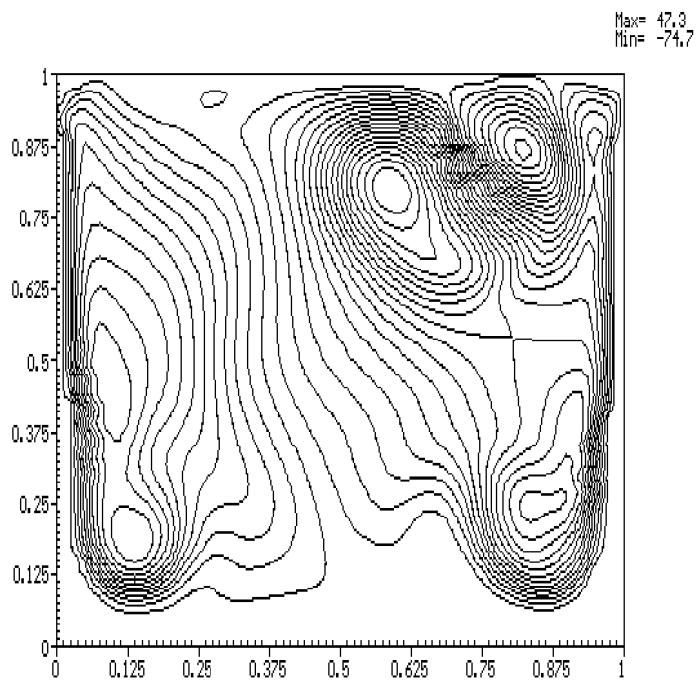
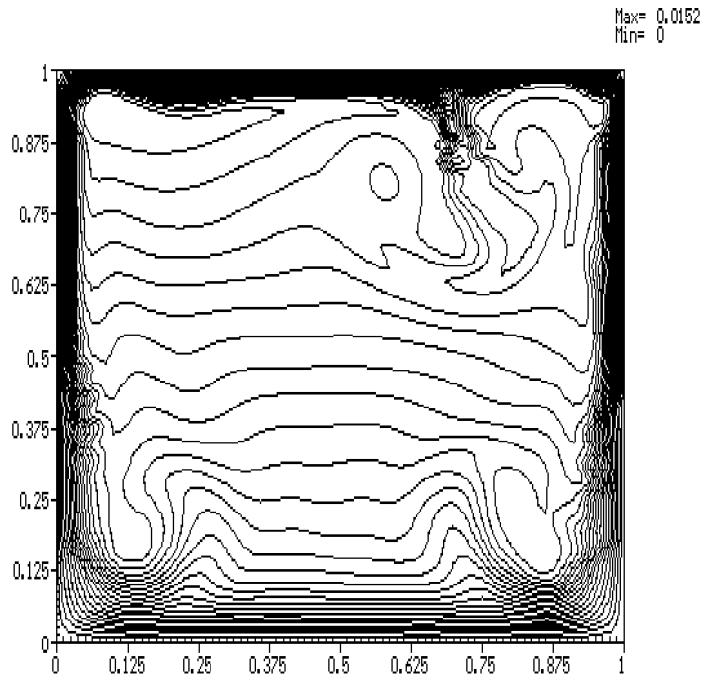


Рис. 9: Изотермы и линии тока для задачи с  $Ra_q = 10^9$  и  $Da = 200$ .

## Литература

- [1] Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”, ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
- [2] Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Из-во МГУ, 1991.
- [3] Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование проблем тепло- и массопереноса с фазовыми превращениями, ИБРАЭ РАН, Препринт No. NSI-04-94, Москва, 1994.
- [4] Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., Plev O.P. and Churbanov A.G, Numerical simulation of convective/diffusion phase change problems - a review, *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, No. 17, 4095–4106(1993).
- [5] Вабищевич П.Н., Илиев О.П. Численное решение сопряженных задач тепло- и массопереноса с учетом фазового перехода. // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, No. 7. С. 1127–1132.
- [6] Ramachandran N., Gupta J.P. and Jaluria Y., Thermal and fluid flow effects during solidification in a rectangular enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 187–194(1982).
- [7] Lacroix M., Computation of heat transfer during melting of a pure substance from an isothermal wall, *Numer. Heat Transfer, Part B* **15**, 191–210(1989).
- [8] Voller V.R., Cross M. and Markatos N.C., An enthalpy method for convection/diffusion phase change, *Int. J. Numer. Methods Engng* **24**, 271–284(1987).
- [9] Brent A.D., Voller V.R. and Reid K.J., Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal, *Numer. Heat Transfer* **13**(3), 297–318(1988).
- [10] Самарский А.А., Теория разностных схем, Наука, 1989.
- [11] Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений, Наука, 1978.
- [12] Роч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, 1980.