

Аномальные режимы переноса в сильно неоднородных средах

Л. В. Матвеев

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52 тел.: (495) 955-22-91, факс: (495) 958-11-51,

эл.почта: matweev@ibrae.ac.ru

Предисловие

Вашему вниманию предлагается конспект курса лекций, читаемых для студентов кафедры ПБРСЭТ Факультета проблем физики и энергетики МФТИ в Институте проблем безопасного развития атомной энергетики.

Цель курса состоит в том, чтобы дать слушателям представление о процессах переноса примеси в сильно неоднородных средах, процессах, которые не подчиняются классическим закономерностям. Под неклассичностью, в первую очередь, подразумевается, что дисперсия частиц не описывается линейным законом роста со временем, справедливого для решения стандартного уравнения диффузии. Причиной аномального поведения служат структурные особенности и резкий контраст транспортных свойств соседних областей неоднородных сред.

В курсе рассматриваются вопросы, важные с точки зрения переноса радионуклидов в геологических средах.

Содержание

I Основные понятия и определения. Классические режимы переноса в однородных средах	3
II Регулярно-неоднородные среды. Модель Дыхне.....	9
III Регулярно-неоднородные среды. Системы трещин.....	14
IV Адвекция.....	21
V Перенос в слоистой среде.....	24
VI Сильно контрастные среды с фрактальными свойствами.....	29
VII Перколяционные среды.....	34
VIII Диффузия на фрактале.....	45
IX Перенос в перколяционных средах. Диффузия.....	50
X Перенос в перколяционных средах. Адвекция.....	52
XI Статистически однородные резко контрастные среды.....	58
XII Перенос примеси в нестационарных течениях.....	65
XIII Модель случайных блужданий в непрерывном времени.....	67
ЛИТЕРАТУРА	70

I Основные понятия и определения. Классические режимы переноса в однородных средах

Рассмотрим простейший пример случайного блуждания частицы по узлам решетки (см. Рис. 1.1).

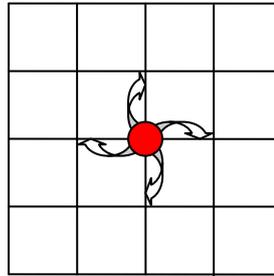


Рис. 1.1

Пусть движение частицы подчинено следующим правилам:

- 1) На каждом шаге частица перескакивает с равной вероятностью в один из ближайших узлов (находящийся на расстоянии a).
- 2) Скачки происходят через равные промежутки времени τ .
- 3) Скачки на двух разных шагах i и j ($i \neq j$) независимы.

После n шагов суммарное смещение частицы определяется выражением

$$\vec{r}_n = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \quad (1.1)$$

где \vec{e}_i - один из элементарных векторов $\vec{e}_i = \{(a, 0), (-a, 0), (0, a), (0, -a)\}$.

Рассмотрим среднее по ансамблю реализаций смещение $\langle \vec{r}_n \rangle = \sum \langle \vec{e}_i \rangle$ и дисперсию

$$\langle \vec{r}_n^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{e}_i^2 \rangle + 2 \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^n \langle \vec{e}_i \vec{e}_j \rangle.$$

Из пункта 1) следуют соотношения, $\langle \vec{e}_i \rangle = 0$, $\langle \vec{e}_i^2 \rangle = a^2$. Из пункта 3) –

$\langle \vec{e}_i \vec{e}_j \rangle \Big|_{i \neq j} = \langle \vec{e}_i \rangle \langle \vec{e}_j \rangle = 0$. В итоге получаем

$$\langle \vec{r}_n \rangle = \sum \langle \vec{e}_i \rangle = 0, \quad (1.2)$$

$$\langle \vec{r}_n^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{e}_i^2 \rangle + 2 \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^n \langle \vec{e}_i \vec{e}_j \rangle = a^2 n, \quad (1.3)$$

В соответствии с пунктом 2) за время t частица совершит $n = t/\tau$ прыжков. Если ввести эффективный коэффициент диффузии

$$\tilde{D} = a^2/\tau, \quad (1.4)$$

то получим, что среднеквадратичное смещение (дисперсия) растет со временем как

$$\langle r^2 \rangle = \tilde{D} t. \quad (1.5)$$

Такой тип смещения частиц характерен для режима переноса, носящего название «классической диффузии».

Более полная информация о поведении частицы содержится в функции плотности вероятности распределения положений частицы в пространстве в заданный момент времени t : $P(\vec{r}, t)$. Например, зная $P(\vec{r}, t)$, можно определить $\langle r^2(t) \rangle$:

$$\langle r^2(t) \rangle = \int r^2 P(\vec{r}, t) d^3 r. \quad (1.6)$$

Найдем $P(\vec{r}, t)$ для миграции частицы вдоль одномерной цепочки узлов (Рис. 1.2).

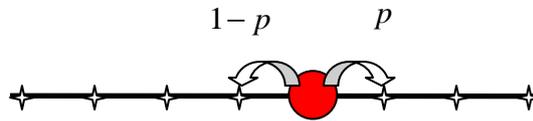


Рис. 1.2.

Пусть частица на каждом шаге перескакивает с вероятностью p в правый узел и с вероятностью $(1-p)$ - в левый. За время t частица совершит $n = t/\tau$ прыжков. Пусть частица совершила m прыжков вправо и, соответственно, $n-m$ прыжков влево. В итоге, смещение частицы есть $x = (2m-n)a$. Вероятность такого события определяется как $\tilde{P}(m, n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где C_n^m - число сочетаний из n по m .

Для случая, когда прыжки вправо и влево равновероятны: $p = 1-p = 1/2$, в пределе $n, m \gg 1$, с учетом $m = \frac{1}{2} \left(n + \frac{x}{a} \right)$ и формулы Стирлинга получаем для плотности

вероятности $P(x,t)dx = \tilde{P}(m,n)\Delta m = \tilde{P}(m(x),n(t))\frac{dx}{a}$ следующее выражение (гауссово распределение):

$$P(x,t) \cong \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad x \ll na, \quad (1.7)$$

где введен коэффициент диффузии $D = \frac{a^2}{2\tau}$.

Функция $P(x,t)$, естественно, удовлетворяет правилу нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)dx = 1$.

Подставляя (1.7) в (1.6), и учитывая, что в одномерном случае $\vec{r} = (x,0,0)$, получаем $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x,t)dx = 2Dt$.

Рассмотрим, какому уравнению должна подчиняться функция $P(\vec{r},t)$ в описанной выше одномерной модели последовательных скачков частиц.

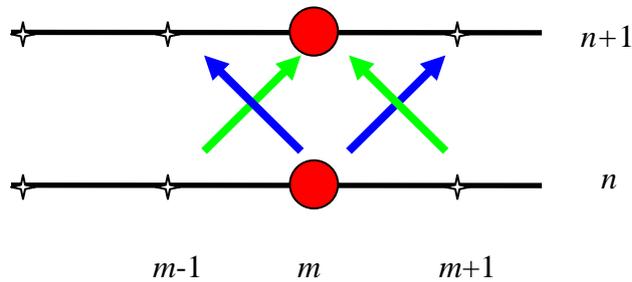


Рис. 1.3.

Пусть в момент времени t (на n -том шаге по времени) частица с вероятностью $\tilde{P}(m,n)$ находится в узле m . При переходе к моменту времени $t+\tau$ (на шаге $n+1$) изменение вероятности для частицы находиться в узле с номером m определяется процессами ухода в соседние узлы и прихода из них (Рис. 1.3), что приводит к соотношению

$$\tilde{P}(m,n+1) - \tilde{P}(m,n) = \tilde{P}(m-1,n) \cdot (1/2) + \tilde{P}(m+1,n) \cdot (1/2) - 2\tilde{P}(m,n) \cdot (1/2). \quad (1.8)$$

Учитывая $x = ma$, $t = n\tau$ и переходя к непрерывному пределу, получаем уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (1.9)$$

где D - введенный выше коэффициент диффузии.

Решение данного уравнения должно, очевидно, приводить к гауссовому распределению (1.7). Проверим это. Будем искать решение уравнения (1.9) с начальным условием

$$P(x, t = 0) = \delta(x), \quad (1.10)$$

то есть считать, что в начальный момент времени частица находится в начале координат.

Уравнение линейное с постоянными коэффициентами. Поэтому удобно перейти к представлению Фурье по координатам и Лапласа по времени:

$$P(x, t) \doteq p(k, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} P(x, t) e^{-st} dt e^{-ikx} dx. \quad (1.11)$$

Уравнение для Фурье-Лаплас образа принимает вид

$$(s + Dk^2) p(k, s) = 1. \quad (1.12)$$

Вычисление обратного преобразования

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma} p(k, s) e^{st} \frac{ds}{2\pi i} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}, \quad \Gamma - \text{контур Меллина}, \quad (1.13)$$

осуществляется в два этапа.

На первом этапе вычисляем интеграл по переменной Лапласа s , который определяется вычетом в точке $s = -Dk^2$:

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-Dtk^2 + ikx) \frac{dk}{2\pi}. \quad (1.14)$$

На втором этапе интеграл вычисляется сведением к интегралу Пуассона. В итоге мы приходим к выражению (1.7), полученному из комбинаторного рассмотрения.

Если мы имеем дело не с одной частицей, а с ансамблем частиц, то вместо $P(\vec{r}, t)$ принято пользоваться концентрацией $C(\vec{r}, t)$. Уравнение для $C(\vec{r}, t)$ в этом случае имеет вид (1.9) и при начальном условии

$$C(\vec{r}, t = 0) = N_0 \delta(\vec{r}) \quad (1.15)$$

$C(\vec{r}, t)$ имеет в трехмерном случае решение

$$C(\vec{r}, t) = \frac{N_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \quad (1.16)$$

Ниже мы будем называть область со значениями координат $|\vec{r}| < \sqrt{4Dt}$ *основной областью локализации* частиц (или облаком примеси). Область $r \gg \sqrt{4Dt}$, в которой $C(r, t) \ll 1$, будем называть *областью асимптотически далеких расстояний* (или «хвостов концентрации»).

Часто перенос характеризуется такими величинами как среднее смещение частиц

$$\langle \vec{r} \rangle = N_0^{-1} \int \vec{r} C(\vec{r}, t) d^3r \quad (1.17)$$

и их дисперсией

$$\sigma^2 = \langle \vec{r}^2 \rangle - \langle \vec{r} \rangle^2 \quad (1.18)$$

где

$$\langle \vec{r}^2 \rangle = N_0^{-1} \int r^2 C(\vec{r}, t) d^3r. \quad (1.19)$$

Нетрудно видеть, что в рассмотренном выше случае дисперсия частиц совпадает с основной областью их локализации.

Уравнение (1.9) с заменой $P(\vec{r}, t)$ на концентрацию $C(\vec{r}, t)$ есть частный случай закона сохранения полного числа частиц

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = 0, \quad (1.20)$$

когда в нем положено $\vec{q} = -D\vec{\nabla}C$. Если же наряду с короткими хаотичными скачками в системе имеет место дрейф частиц со средней скоростью \vec{u} , то выражение для потока принимает вид

$$\vec{q} = -D\vec{\nabla}C + \vec{u}C. \quad (1.21)$$

Подставляя выражение (1.21) в (1.20), и повторяя приведенное выше решение, получаем распределение концентрации в виде

$$C(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{4Dt}\right). \quad (1.22)$$

Уравнения (1.20), (1.21) и выражение (1.22) описывают режим переноса, который носит название «классической адвекции-диффузии» (или «адвекции-дисперсии»), при котором среднее смещение растет со временем как $\langle \vec{r} \rangle = ut$, а дисперсия $\sigma^2 = 6Dt$.

Убывание на асимптотически больших расстояниях в данном случае имеет гауссов вид.

Простейший пример аномального режима переноса.

Изменим одно из трех условий для указанной выше модели скачков (по прежнему, рассматривается однородная среда!). Например, условие (3). Пусть у нас время, приходящееся на один скачок, не постоянно, а описывается некоторой функцией распределения $\psi(\tau)$, так что $\int_0^{\infty} \psi(\tau) d\tau = 1$. Если существует $\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau \psi(\tau) d\tau < \infty$, то

основные выводы остаются теми же с точностью до замены $\tilde{D} = a^2/\tau \rightarrow \tilde{D}' = a^2/\langle \tau \rangle$. Если

же $\psi(\tau) \sim \tau^{-(1+\mu)}$, где $0 < \mu < 1$, то $\langle \tau \rangle = \infty$. Здесь следует учесть, что за конечное время t

могут реализоваться скачки со временем ожидания не более t , поэтому среднюю

длительность скачка естественно определить как $\langle \tau \rangle_t = \int_0^t \tau \psi(\tau) d\tau \sim t^{1-\mu}$. Отметим, что

она растет со временем. Тогда среднее число скачков будет $n_t = \frac{t}{\langle \tau \rangle_t} \sim t^\mu$, откуда

$$\langle r^2 \rangle \sim a^2 t^\mu \quad (1.23)$$

В силу $0 < \mu < 1$ данный режим приводит к более медленному распространению частиц по сравнению с классическим диффузионным режимом. Такой режим носит название «субдиффузии». Его относят к аномальным режимам переноса.

Также нетрудно показать, что возможны режимы, при которых показатель μ в формуле (1.23) лежит в диапазоне $1 < \mu < 2$. Такие режимы переноса принято называть режимами «супердиффузии».

Супердиффузия и субдиффузия являются примерами аномальных или неклассических режимов переноса.

Задача. Определить, какое условие (из указанных в начале параграфа) и как нужно изменить, чтобы миграция частицы описывалась режимом супердиффузии.

II Регулярно-неоднородные среды. Модель Дыхне

Рассмотрение переноса примеси в неоднородных средах начнем с регулярно-неоднородных сред.

Будем считать, что регулярно-неоднородная среда состоит из области I с высокой проницаемостью, ограниченной в одном или в двух измерениях, и области с низкой проницаемостью, заполняющей оставшуюся часть пространства (область II). В качестве физического механизма переноса частиц рассматривается классическая диффузия. Модель была впервые сформулирована академиком А.М. Дыхне, и мы называем ее в честь него моделью Дыхне. Применительно к переносу примеси в геологических породах модель учитывает один из принципиальных аспектов этих сред – резкий контраст в распределении транспортных свойств. В этом смысле можно говорить, что область I имитирует трещину, а область II соответствует матрице скальной породы.

Постановка задачи

В области I концентрация частиц $c(\vec{r}, t)$ удовлетворяет классическому уравнению диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c. \quad (2.1)$$

Здесь D – коэффициент диффузии в сильно проницаемой среде. Уравнение для концентрации в области II получается из (2.1) заменой D на коэффициент диффузии слабо проницаемой среды d . Между коэффициентами диффузии имеется соотношение

$$D \gg d. \quad (2.2)$$

Как обычно, на границе двух сред непрерывными являются концентрация и нормальная компонента плотности потока. Мы полагаем, что в начальный момент все частицы сосредоточены внутри области I .

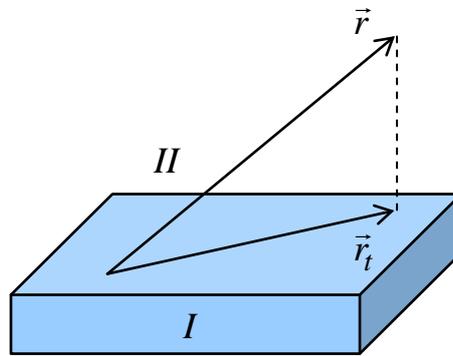
Для случая, когда область I является односвязной (одиночная трещина), мы будем рассматривать плоскопараллельный слой толщины a .

Наша задача будет состоять в том, чтобы выяснить зависимость дисперсии примеси (которую в этом и следующем параграфах в отличие от (1.18) будем обозначать как $\sigma(t)$) в области I от времени. Величину $\sigma(t)$ определим равенством

$$\sigma(t) \equiv \langle \vec{r}_t^2 \rangle = \left(\int_{(I)} d^3 r c(\vec{r}, t) \right)^{-1} \int_{(I)} d^3 r \vec{r}_t^2 c(\vec{r}, t). \quad (2.3)$$

Здесь \vec{r}_t – 2-мерный радиус-вектор, который есть проекция трехмерного радиус-вектора \vec{r} на плоскую границу раздела двух сред. Интегрирование в (2.3) происходит по области I . Здесь и далее предполагается, что начало координат выбрано так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{(I)} d^3 r \vec{r}_t c(\vec{r}, 0) = 0. \quad (2.4)$$



$$l = 1$$

Рис. 2.1.

Отметим, что характер зависимости $\sigma(t)$ определяет режим переноса примеси. На временах, когда размер области локализации в области I , $R(t)$, велик по сравнению с первоначальным размером $R_0 = R(0)$, имеется очевидное соотношение, вытекающее из определения дисперсии (2.3):

$$R(t) \sim \sqrt{\sigma(t)} \quad (2.5)$$

Качественный анализ

Так как за время t частицы в области I диффундируют на расстояние $\sim \sqrt{4Dt}$, то на временах $t \ll t_0$, где

$$t_0 = a^2 / 4D, \quad (2.6)$$

частицы не выходят за пределы этой области. Диффузия тогда происходит так, как если бы область I занимала всё бесконечное пространство и являлась трехмерной.

На временах $t \gg t_0$ распределение концентрации в области I становится однородным по одному (для плоскопараллельного слоя) или двум (для цилиндра) направлениям, по которым область ограничена. Если при этом длина диффузии в слабо проницаемой среде мала по сравнению с a , то есть $t \ll t_1$, где

$$t_1 = a^2 / 4d, \quad (2.7)$$

то большую часть времени частицы проводят внутри области I , так что при этом мы имеем дело с квазидвумерной диффузией. Дисперсия при этом дается известным выражением

$$\sigma(t) = 4Dt. \quad (2.8)$$

Ситуация существенно меняется на временах $t \gg t_1$, когда доля времени τ из интервала t , проводимая частицей в среде I , становится много меньше единицы. До тех пор пока $\sigma(t)$ растет главным образом благодаря диффузии в среде I (время окончания этого режима будет определено ниже), можно считать, что частицы распространяются по направлениям, вдоль которых среда I бесконечна, только в эти отрезки времени ($\sim \tau(t)$). Величину τ по порядку величины можно оценить как отношение объемов, занятых частицами в областях I и II :

$$\tau(t) \sim a / \sqrt{dt}. \quad (2.9)$$

Оценку для дисперсии будем искать по формуле

$$\sigma(t) \sim D \int_{t_1}^t \tau(t') dt'. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в (2.10), находим:

$$\sigma(t) \sim D\sqrt{tt_1}, \quad (2.11)$$

Эти соотношения остаются справедливыми до тех пор, пока дисперсия за счет диффузии в слабопроницаемой среде ($\sim dt$) остается малой по сравнению дисперсией в среде I , (2.11). Приравнивание этих величин даёт оценку верхних границ t_2 для режимов переноса, определяемых зависимостью (2.11):

$$t_2 \sim t_1 \left(\frac{D}{d} \right)^2, \quad (2.12)$$

При $t \gg t_2$ доля времени, проводимая частицами в области I , столь мала, что дисперсия определяется диффузией в слабо проницаемой среде. Тогда имеем:

$$\sigma(t) \cong 4dt. \quad (2.13)$$

Количественный анализ

При выводе результатов, относящихся к временам $t \gg t_0$, когда концентрация в области I однородна по её поперечному сечению, удобно перейти к представлению Фурье по координате \vec{r}_t и Лапласа по времени

$$c_{\vec{k}p} = \int_0^{\infty} dt \int d^2\vec{r}_t c(\vec{r}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}_t - pt). \quad (2.14)$$

Выраженная через это представление, дисперсия частиц (2.3) имеет вид

$$\sigma(t) = - \left[\int_{p^*-i\infty}^{p^*+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} c_{0p} \right]^{-1} \int_{p^*-i\infty}^{p^*+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \nabla_{\vec{k}}^2 c_{\vec{k}p} \Big|_{\vec{k}=0}, \quad \text{Re } p^* > 0. \quad (2.15)$$

Здесь, как и в (2.14), концентрация частиц относится к области I .

Проинтегрировав уравнение (2.1) по координатам внутри области I (по её поперечному сечению) и перейдя в представление Фурье по координате \vec{r}_t и Лапласа по времени, придём к равенству

$$(p + Dk^2) S c_{\vec{k}p} + q_{\vec{k}p} = N. \quad (2.16)$$

Здесь N – полное число частиц, S – площадь поперечного сечения области I ($S = a$), $q_{\vec{k}p}$ – компонента Фурье-Лапласа плотности потока частиц из области I в область II через границу между ними. Предполагается, что абсолютная величина вектора \vec{k} удовлетворяет неравенству

$$kR_0 \ll 1, \quad (2.17)$$

где R_0 – размер области локализации частиц по координате \vec{r}_t в начальный момент времени.

Для того чтобы замкнуть задачу о среде I , необходимо установить связь между величинами $q_{\vec{k}p}$ и $c_{\vec{k}p}$. С этой целью воспользуемся уравнением диффузии в области II , учтя граничные условия непрерывности концентрации и плотности потока.

Уравнение диффузии в $\vec{k}p$ -представлении для концентрации частиц в области II , $c_{\vec{k}p}(z)$, имеет вид

$$\left(p + dk^2 - d \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c_{\vec{k}p}(z) = 0. \quad (2.18)$$

Здесь z – координата по нормали к плоскопараллельному слою. Решение уравнения (18) для положительных значений координаты z имеет вид

$$c_{\bar{k}p}^-(z) = c_{\bar{k}p}^- \exp\left\{-z\sqrt{k^2 + p/d}\right\}. \quad (2.19)$$

В этой формуле начало отсчета координаты z выбрано на границе между областями I и II и учтено граничное условие

$$c_{\bar{k}p}^-(0) = c_{\bar{k}p}^-. \quad (2.20)$$

Учитывая наличие двух равноценных частей границы ($z=0$ и $z=-a$), для суммарной плотности потока имеем из (2.19):

$$q_{\bar{k}p}^- = -2d \left. \frac{\partial c_{\bar{k}p}^-(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 2d\sqrt{k^2 + p/d} c_{\bar{k}p}^-. \quad (2.21)$$

Выражая с помощью этой зависимости $q_{\bar{k}p}^-$ через $c_{\bar{k}p}^-$ в уравнении (2.16), находим компоненту Фурье-Лапласа концентрации частиц в области I :

$$c_{\bar{k}p}^- = \frac{N/S}{p + Dk^2 + \sqrt{\frac{p + dk^2}{t_1}}}. \quad (2.22)$$

Здесь t_1 – характерное время, определенное формулой (2.7).

Подстановка (2.22) в (2.15) даёт

$$\sigma(t) = 2 \left[\int_{p_* - i\infty}^{p_* + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{1}{p + \sqrt{\frac{p}{t_1}}} \right]^{-1} \int_{p_* - i\infty}^{p_* + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{2D + \frac{d}{\sqrt{pt_1}}}{\left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}}\right)^2}, \quad \text{Re } p_* > 0 \quad (2.23)$$

Отсюда после интегрирования получается выражение для дисперсии на временах, больших по сравнению с t_1 :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= 4Dt & \text{при } t_0 \ll t \ll t_1, \\ \sigma(t) &= 4\left(D\sqrt{\pi t t_1} + dt\right) & \text{при } t \gg t_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В интервалах времени $t_1 \ll t \ll t_2$ и $t \gg t_2$, где t_2 определено в (2.12), формула (2.24) подтверждают оценку дисперсии (2.11), полученную качественными методами. Сами же формулы (2.24) остаются справедливыми и в переходной области, то есть при $t \sim t_2$.

Учитывая (2.5), формуле (2.11) можно придать еще один вид:

$$R(t) \propto t^{1/4}, \quad \text{при } t_1 \ll t \ll t_2. \quad (2.25)$$

Таким образом, в задаче Дыхне имеет место промежуточный интервал времени $t_1 \ll t \ll t_2$, в котором перенос примеси является неклассическим. Он соответствует степенной субдиффузии.

С учетом поведения концентрации при $t \ll t_1$ легко подобрать интерполяционные формулы, описывающие поведение дисперсии при $t \gg t_0$:

$$\sigma(t) = 2\pi D t_1 \left(\sqrt{1 + \frac{4t}{\pi t_1}} - 1 \right) + 4dt. \quad (2.26)$$

Задача. Найти режимы переноса для случая, когда область I имеет форму цилиндра.

III Регулярно-неоднородные среды. Системы трещин

Теперь рассмотрим вариант задачи Дыхне, в которой сильно проницаемая среда занимает многосвязную область I и соответствует периодической системе M параллельных друг другу одинаковых плоскопараллельных слоев ($l=1$) либо прямых цилиндров ($l=2$) (для краткости и те и другие будем называть трещинами). Здесь параметр l определяет число измерений, вдоль которых ограничена сильно проницаемая среда. Толщину плоского слоя будем обозначать a , площадь поперечного сечения цилиндра – $S \sim a^2$. Расстояние между трещинами b считается большим в сравнении с их поперечным размером:

$$b \gg a \quad (3.1)$$

Как и прежде, будем считать, что примесь изначально сосредоточена в одной из трещин. Назовем её основной и выберем в ней начало координат, причем так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{(I)} d^3 r \bar{r}_i c(\bar{r}, 0) = 0 \quad (3.2)$$

Дисперсия как и раньше определена равенством

$$\sigma(t) \equiv \langle \bar{r}_i^2 \rangle = \left(\int_{(I)} d^3 r c(\bar{r}, t) \right)^{-1} \int_{(I)} d^3 r \bar{r}_i^2 c(\bar{r}, t) \quad (3.3)$$

в котором интегрирование происходит по объему основной трещины. Анализ проведем на качественном уровне.

Оценку для дисперсии будем искать по формуле

$$\sigma(t) \sim \int_0^t D_{ef}(t') dt' \quad (3.4)$$

где $D_{ef}(t)$ – средневзвешенное значение коэффициента диффузии по области локализации примеси в момент времени t :

$$D_{ef}(t) \sim \frac{DA_I(t) + dA_{II}(t)}{A_I(t) + A_{II}(t)} \quad (3.5)$$

Здесь D и d – коэффициенты диффузии, соответственно, сильно и слабо проницаемой среды. $A_I(t)$ и $A_{II}(t)$ – парциальные объемы, приходящиеся, соответственно, на сильно и слабо проницаемую среды в области локализации примеси на момент времени t в пространстве l измерений, по которым сильно проницаемая среда имеет ограничения.

Для рассмотренного в предыдущих Разделах случая одиночной трещины при $t \gg t_0$ имеем

$$\begin{aligned} A_I = a, \quad A_{II} \sim \sqrt{4dt} & \quad \text{при } l=1 \\ A_I = S, \quad A_{II} \sim 4dt & \quad \text{при } l=2 \end{aligned} \quad (M=1) \quad (3.6)$$

Легко проверить, что подстановкой (3.6) в (3.5), а затем (3.5) в (3.4) получаются все результаты прошлой лекции для одиночной трещины. При этом условная граница между режимами быстрой классической диффузии и субдиффузии t_1 соответствует моменту, когда второе слагаемое в знаменателе формулы (3.5) сравнивается с первым; при этом второе слагаемое в числителе (3.5) остаётся много меньше первого. Граница же между режимами субдиффузии и медленной классической диффузии t_2 соответствует моменту, когда вклад в интеграл (3.4), возникающий от второго слагаемого в числителе (3.5), сравнивается с вкладом от первого. Отметим, что из-за выполнения неравенства (3.1) величина $A_{II}(t)$ определяется (3.6) независимо от количества трещин.

При переходе от одиночной трещины к системе трещин существенны два соображения. Первое из них: поскольку диффузия по слабо проницаемой среде между основной и ближайшей к ней трещиной занимает время

$$t_b = \frac{b^2}{4d}, \quad (3.7)$$

то на временах $t \ll t_b$ присутствие всех остальных (помимо основной) трещин на переносе не сказывается. Второе соображение: в задаче об одиночной трещине на временах $t \gg t_2$, где

$$t_2 \sim t_1 \left(\frac{D}{d} \right)^2 \quad \text{при } l=1 \text{ и} \quad (3.8)$$

$$t_2 \sim t_1 \frac{D}{d} \ln \frac{D}{d} \quad \text{при } l=2, \quad (3.9)$$

величина дисперсии определяется исключительно слабо проницаемой средой. Сопоставляя их, приходим к выводу, что при $t_b \gg t_2$ дисперсия частиц в задачах о системе трещин совпадает с найденной в предыдущих разделах соответствующей дисперсией в случае единственной трещины. Иначе говоря, при выполнении неравенства $t_b \gg t_2$ присутствие всех других трещин, кроме основной, на переносе примеси не сказывается. Поэтому далее, рассматривая случай $M \geq 2$, будем считать, что выполняется обратное неравенство

$$t_b \ll t_2. \quad (3.10)$$

Начнем со случая двух трещин, $M = 2$.

Заметим сразу, что благодаря (3.1) между характерными временами: t_b и t_1 справедливо неравенство

$$t_1 \ll t_b. \quad (3.11)$$

Поэтому при $t \ll t_1$ перенос идет в режиме быстрой классической диффузии, а в интервале между временами t_1 и t_b реализуется режим субдиффузии, соответствующий одиночной трещине:

$$\sigma^{(2)}(t) = \sigma(t) \quad \text{при } t_1 \ll t \ll t_b. \quad (3.12)$$

Здесь и далее номер в верхнем индексе будет обозначать количество трещин, к которому относится рассматриваемый случай. Величины без верхнего индекса относятся к одиночной трещине. Так, $\sigma(t)$ есть дисперсия в задаче об одиночной трещине.

На временах $t \sim t_b$ в процесс переноса вовлекается вторая трещина, и дисперсия приобретает дополнительный коэффициент 2:

$$\sigma^{(2)}(t) = 2\sigma(t) \quad \text{при } t_b \ll t \ll t_2. \quad (3.13)$$

На временах $t \gg t_2$ перенос идет в режиме медленной классической диффузии с дисперсией, определенной формулой

$$\sigma(t) \cong 2(3-l)dt. \quad (3.14)$$

Перейдем к рассмотрению задачи о переносе в регулярно-неоднородной среде с большим количеством трещин, $M \gg 1$. На временах $t \leq t_b$ помимо основной трещины в процессе переноса участвуют только соседние к ней. Поэтому качественно дисперсия ведет здесь себя так же, как на соответствующих временах в рассмотренном только что случае двух трещин. Следовательно, далее мы можем сосредоточиться на временах $t \gg t_b$. Анализ удобно провести отдельно для системы плоскопараллельных пластин ($l=1$) и прямых цилиндров ($l=2$).

$$M \gg 1, \quad t \gg t_b, \quad l=1$$

Парциальный объем сильно проницаемой среды при $t \gg t_b$ можно записать в виде

$$A_l(t) = am(t), \quad (3.15)$$

где $m(t)$ – количество трещин, вовлечённых в процесс переноса к моменту t . Далее для краткости будем называть $m(t)$ числом активных трещин. Подставляя (3.15) в (3.5), а затем (3.5) в (3.4), получаем выражение для дисперсии при $t \gg t_b$:

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \int \left(\frac{Dam(t')}{\sqrt{4dt'}} + d \right) dt'. \quad (3.16)$$

Число активных трещин даётся очевидными оценками

$$\begin{aligned} m(t) &\sim \frac{\sqrt{4dt}}{b} && \text{при } t < M^2 t_b, \\ m(t) &= M && \text{при } t > M^2 t_b. \end{aligned} \quad (3.17)$$

После подстановки (3.17) в (3.16) приходим к заключению о наличии трех последовательно сменяющих друг друга режимов переноса примеси. В каком режиме протекает процесс, зависит от того, какой из членов в скобках под интегралом в (3.16) доминирует и каким из выражений (3.17) определяется величина $m(t)$.

Первый режим реализуется, когда число активных трещин растёт, оставаясь меньше максимального значения M :

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \left(\frac{a}{b}\right)Dt \quad \text{при } t_b \ll t \ll M^2 t_b. \quad (3.18)$$

Это режим ослабленной классической диффузии с эффективным коэффициентом $D_{ef} = (a/b)D$, удовлетворяющим неравенству

$$d \ll D_{ef} \ll D \quad (3.19)$$

Второй режим протекает, когда число активных трещин достигло максимального, а вклад слабо проницаемой среды в величину дисперсии (см. второе слагаемое в скобках в (3.16)) по-прежнему остается пренебрежимо малым:

$$\sigma^{(M)}(t) \sim MD\sqrt{tt_1} \quad \text{при } M^2 t_b \ll t \ll M^2 t_2 \quad (3.20)$$

Этот режим соответствует усиленной (множитель M) степенной субдиффузии.

Наконец третий, самый поздний режим наступает, когда вклад слабо проницаемой среды становится преобладающим:

$$\sigma^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при } t \gg M^2 t_2. \quad (3.21)$$

Это режим медленной классической диффузии.

$$M \gg 1, \quad t \gg t_b, \quad l = 2$$

В связи с тем, что при $l = 2$ теперь $A_{II} \sim 4dt$, формула для дисперсии (3.16) модифицируется следующим образом:

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \int_0^t \left(\frac{DSm(t')}{4dt} + d \right) dt'. \quad (3.22)$$

Рассмотрим отдельно две конфигурации периодической системы M параллельных друг другу цилиндрических трещин. Первая из них соответствует линейной цепочке цилиндров, когда их оси лежат в одной плоскости (см. Рис. 3.1), а вторая – объемной периодической системе цилиндрических трещин (см. Рис. 3.2).

Плоская периодическая цепочка M трещин



Рис. 3.1. Поперечное сечение плоской системы цилиндрических трещин.

Число активных трещин для этой конфигурации, как и в случае $l = 1$, описывается (3.17). Подставляя (3.17) в (3.22) и действуя, как при $l = 1$, находим режимы переноса. Их систематика зависит от соотношения между двумя характерными временами t_2 и Mt_b .

Если

$$t_2 \gg Mt_b, \quad (3.23)$$

реализуется три режима.

Сначала это ослабленный (множитель \sqrt{S}/b) степенной субдиффузионный режим,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \frac{\sqrt{S}}{b} D \sqrt{tt_1} \quad \text{при } t_b \ll t \ll M^2 t_b, \quad (3.24)$$

затем усиленный (множитель M) логарифмический субдиффузионный режим,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim MDt_1 \ln \frac{t}{t_b} \quad \text{при } M^2 t_b \ll t \ll Mt_2 \quad (3.25)$$

и, наконец, последним реализуется режим медленной классической диффузии,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при } t \gg Mt_2. \quad (3.26)$$

Если же, наоборот,

$$t_2 \ll Mt_b, \quad (3.27)$$

то при $t > t_b$ режимов всего два – ослабленный степенной (субдиффузионный) и режим медленной классической диффузии:

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \frac{\sqrt{S}}{b} D \sqrt{tt_1} \quad \text{при } t_b \ll t \ll t_2^2 / t_b \quad (3.28)$$

$$\sigma^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при } t \gg t_2^2 / t_b \quad (3.29)$$

(28)

Объёмная периодическая система M трещин

Число активных трещин для этой конфигурации даётся оценками

$$m_t \sim \frac{4dt}{b^2} \quad \text{при } t < Mt_b, \quad (3.30)$$

$$m_t = M \quad \text{при } t > Mt_b.$$

Поступая, как в предыдущих случаях, находим три режима: ослабленная (множитель S/b^2) классическая диффузия,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim \frac{S}{b^2} Dt \quad \text{при } t_b \ll t \ll Mt_b \quad (3.31)$$

усиленная (множитель M) логарифмическая субдиффузия,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim MDt_1 \ln\left(\frac{t}{Mt_b}\right) \quad \text{при } Mt_b \ll t \ll Mt_2 \quad (3.32)$$

и медленная классическая диффузия,

$$\sigma^{(M)}(t) \sim dt \quad \text{при } t \gg Mt_2 \quad (3.33)$$

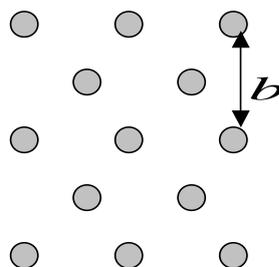


Рис. 3.2. Поперечное сечение объемной системы трещин

Подведём **итоги** рассмотрения задачи о переносе примеси в периодической системе трещин. Если расстояние между трещинами b таково, что переход к режиму медленной (определяемой свойствами матрицы) классической диффузии произойдет раньше, чем область локализации примеси достигнет соседней трещины ($t_2 \ll t_b$), то перенос происходит как у одиночной трещины. В противоположном случае $t_2 \gg t_b$ влияние трещин на перенос примеси коллективизируется, и тогда при конечном числе трещин $M \gg 1$ в дополнение к режиму субдиффузии, который был найден для одиночной трещины, возникают дополнительные промежуточные режимы. Среди них, в зависимости от конфигурации и соотношения между параметрами задачи, могут быть ослабленная классическая диффузия и усиленная степенная или логарифмическая субдиффузия. Самым поздним режимом, как и для одиночной трещины, является медленная классическая диффузия.

Если количество трещин бесконечно ($M \rightarrow \infty$), то для системы плоскопараллельных слоев и объемной системы прямых цилиндров конечным режимом становится ослабленная присутствием матрицы классическая диффузия. Для плоской же системы прямых цилиндров, как и для $M \neq \infty$, самым поздним режимом является медленная классическая диффузия.

IV Адвекция

Другим важным механизмом переноса примеси в геологических формациях является адвекция обусловленная инфильтрацией влаги. Поле скоростей инфильтрации, в первую очередь, определяются структурой каналов, образованных трещинами либо порами.

Начнем анализ с простого случая регулярно-неоднородной среды. Рассмотрим плоско-параллельный слой (который, как и выше будем называть трещиной). Будем считать, что трещина с апертурой a не ограничена в плоскости (x, y) , заполнена жидкостью, и окружена слабопроницаемой пористой матрицей. Жидкость внутри трещины течет со скоростью V вдоль оси Ox . Растворенная примесь переносится течением, а также диффундирует с коэффициентом диффузии D внутри трещины. Внутри пористой матрицы жидкость неподвижна, и примесь переносится только по механизму диффузии с коэффициентом d . Как и ранее, рассматриваем случай $D \gg d$. В начальный момент примесь сосредоточена в трещине, так что размер облака примеси в начальный момент меньше a . Начало координат поместим внутри облака примеси.

Начнем с **качественного рассмотрения**. Как и в модели Дыхне, на временах $t < t_0$ примесь полностью сосредоточена в трещине, и ее перенос описывается классическим режимом адвекции-диффузии. На временах $t \gg t_0$, с ростом времени размер области занимаемой примесью растет в поперечном направлении по диффузионному закону как \sqrt{dt} . И при $t \gg t_1$ (см. предыдущую лекцию), доля времени, которое частица проводит в быстрой среде есть $\tau(t) \approx \frac{a}{\sqrt{dt}}$. Ввиду анизотропии задачи, теперь мы можем рассмотреть среднее смещение частиц в продольном направлении, которое (в пренебрежении диффузией) в среднем описывается зависимостью

$$R \sim \int_0^t V \tau(t') dt' \sim \frac{Va}{\sqrt{d}} \sqrt{t}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) видно, что фронт облака примеси движется в диффузионном режиме, с эффективным коэффициентом диффузии

$$D_{eff} = V^2 t_1. \quad (4.2)$$

Перейдем к **количественному описанию** задачи (см. Рис 2.1 раздела II).

В среде I уравнение для концентрации примеси C :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} - D \Delta C = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение для концентрации примеси в среде II, а также начальные и граничные условия те же, что и модели Дыхне.

Переходя к представлению Фурье-Лапласа, получаем решение

$$C = \frac{N_0}{a} \left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} + ikV + Dk^2 \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Временно опустим слагаемое Dk^2 (его вклад обсудим позже).

Интегрирование по dk с учетом $x > 0$ определяется полюсом $k = \frac{i}{V} \left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} \right)$ в верхней полуплоскости. С учетом замены $t' = t - \frac{x}{V}$ и введенного коэффициента D_{eff} , получаем

$$C = \frac{N_0}{iVa} \int \exp \left(pt' - x \sqrt{\frac{p}{D_{eff}}} \right) \frac{dp}{2\pi i}. \quad (4.5)$$

В выражении (4.5) удобно выделить параметр

$$\alpha = \sqrt{\frac{x^2}{D_{eff} t'}}. \quad (4.6)$$

Делая замену $p \rightarrow s = pt'$ приходим к выражению

$$C = \frac{N_0}{iVa t'} \int \exp \left(s - \alpha \sqrt{s} \right) \frac{ds}{2\pi i}. \quad (4.7)$$

Рассмотрим два предельных случая $\alpha \ll 1$, $\alpha \gg 1$.

1) $\alpha \gg 1$. Как следует из (4.6), это соответствует далеким расстояниям. Ввиду наличия большого параметра воспользуемся методом перевала (с перевальной точкой $s_0 = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2$). В итоге получим зависимость

$$C \sim \exp \left(-\frac{x^2}{4D_{eff} t'} \right). \quad (4.8)$$

В этом случае положение переднего фронта облака частиц (за которым концентрация частиц будет экспоненциально убывать) определяется условием

$$\frac{x^2}{D_{eff}(t-x/V)} \approx 1, \quad (4.9)$$

Откуда следует

$$R \approx Vt, \quad t \ll t_1, \quad (4.10)$$

$$R \approx \sqrt{D_{eff}t}, \quad t \gg t_1. \quad (4.11)$$

Учет Dk^2 в выражении (4.4) приводит к дополнительному расплыванию со скоростью $R' \sim Dt$ и в случае, когда $D \ll D_{eff}$ вкладом этого процесса можно пренебречь.

Из (4.10) и (4.11) следует, что возможны два режима движения фронта. На малых временах $t \ll t_1$ фронт движется с постоянной (почти) скоростью $R \approx Vt$, а при больших временах $t \gg t_1$ движение фронта аналогично движению фронта при диффузионном расплывании облака, $R \approx \sqrt{D_{eff}t}$.

2) При $\alpha \ll 1$ для вычисления интеграла можно разложить экспоненту и оставить первый член разложения. В итоге, получим

$$C \approx \frac{x}{\sqrt{D_{eff}t}}, \quad x \ll \sqrt{D_{eff}t}. \quad (4.12)$$

Таким образом, профиль концентрации – это горб, движущийся со скоростью, определяемой уравнениями (4.10), (4.11), а позади него имеется степенной шлейф (Рис. 4.1.).

Данный режим носит название режима *квазидиффузии*.

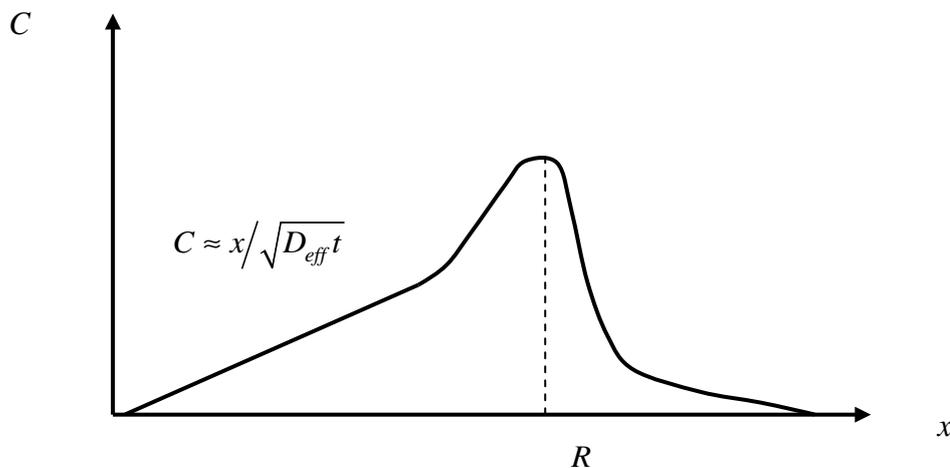


Рис. 4.1. Схематическое изображение распределения концентрации при режиме квазидиффузии

Задача. Найти скорость движения фронта облака примеси, если область I представляет собой бесконечный цилиндр.

V Перенос в слоистой среде

Рассмотрим слоистую среду, состоящей из слоев толщины a , так что в каждом слое имеет место течение вдоль слоя с постоянной скоростью. Будем считать, что скорость внутри слоев направлена вдоль некоторой оси, но направление скорости от слоя к слою (вдоль оси или в обратном направлении) меняется **случайным образом**. Считаем, что модуль скорости везде один и тот же V .

Растворенные в жидкости частицы примеси могут переноситься течением вдоль слоя, а также диффундировать с коэффициентом D в поперечном направлении. Диффузией вдоль слоя пренебрегаем по сравнению с адвекцией.

Будем интересоваться смещением частиц вдоль оси Ox (направление осей – см. Рис. 5.1)

$$X(t) = \int_0^t v(t') dt'. \quad (5.1)$$

Здесь скорость частицы $v(t)$ в момент времени t зависит от слоя, в котором частица находится в данный момент, поэтому это же выражение можно переписать в виде

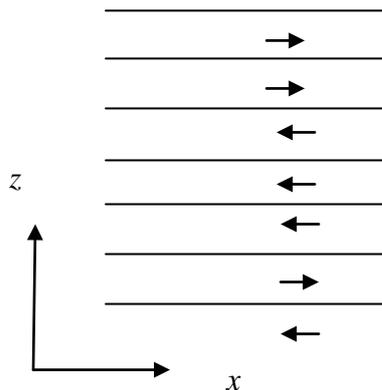


Рис. 5.1

$$X(t) = \int_0^t v(Z(t')) dt', \quad (5.2)$$

где $Z(t)$ - координата частицы в момент t .

Нас интересует средние характеристики движения частицы. Заметим, что на движение частицы вдоль Ox оказывают влияние два случайных фактора: ее случайная траектория вдоль оси Oz и случайное распределение скоростей по слоям. Поэтому необходимо провести усреднение в два этапа:

- 1) по случайному распределению скорости $V(z)$;
- 2) по случайно распределенным траекториям $Z(t)$.

Данные усреднения *независимы*, поэтому мы должны их разделить. Перепишем (5.2) тождественно:

$$X(t) = \int_0^t \int v(z) \delta(z - Z(t')) dz dt'. \quad (5.3)$$

где $Z(t)$ описывает случайную траекторию частицы. Ниже усреднение по ансамблю распределения скоростей мы будем обозначать как $\langle \dots \rangle$, а усреднение по траекториям $\overline{\dots}$.

Начнем с усреднения по траекториям. Поскольку миграция вдоль Oz происходит вследствие диффузии ($V(z)$ никак на это движение не влияет), то в момент t' положение частицы определяется хорошо известным одномерным гауссовым распределением

$$P(Z(t'), t') = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt'}} \exp\left(-\frac{(Z(t'))^2}{4Dt'}\right), \quad (5.4)$$

при условии, что $Z(t'=0) = 0$.

Среднее от функции, очевидно, есть $\overline{f(Z(t'))} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(Z(t')) P(Z(t'), t') dZ(t')$.

В нашем случае усреднение дельта-функции приводит к выражению

$$\overline{\delta(z - Z(t'))} = \int \delta(z - Z(t')) \frac{\exp\left(-\frac{(Z(t'))^2}{4Dt'}\right)}{\sqrt{4\pi Dt'}} dZ(t') = \frac{\exp\left(-\frac{(z)^2}{4Dt'}\right)}{\sqrt{4\pi Dt'}} \quad (5.5)$$

В итоге из (5.3) и (5.5) получаем

$$\overline{X(t)} = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} v(z) \frac{\exp\left(-\frac{(Z)^2}{4Dt'}\right)}{\sqrt{4\pi Dt'}} dz dt'. \quad (5.6)$$

Теперь усредним по возможным реализациям поля скоростей. Будем рассматривать времена, когда корень из дисперсии частиц вдоль оси Oz существенно превосходит толщину слоя a . Тогда свойства случайного поля скоростей можно описать соотношениями

$$\langle v(z) \rangle = 0, \quad (5.7)$$

$$\langle v(z)v(z') \rangle = V^2 a \delta(z - z'). \quad (5.8)$$

Исходя из первого соотношения, получаем для среднего смещения

$$\langle \overline{X(t)} \rangle = 0 \quad (5.9)$$

Рассмотрим дисперсию.

$$\langle \overline{(X(t))^2} \rangle = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_0^t dt'' \int_{-\infty}^{+\infty} dz'' \langle v(z')v(z'') \rangle \overline{\delta(z' - Z(t'))\delta(z'' - Z(t''))} \quad (5.10)$$

Здесь усреднение $\langle v(z')v(z'') \rangle$ по свойствам среды, а усреднение $\overline{\delta(z' - Z(t'))\delta(z'' - Z(t''))}$ - по случайным траекториям частиц.

При усреднении по траекториям важно, что $\overline{\delta\delta} \neq \overline{\delta\delta}$, поскольку мы усредняем по траекториям одной частицы в различные моменты времени. В этом случае вероятность есть

$$\begin{aligned} P(Z(t''), t'' | 0, 0) P(Z(t'), t' | Z(t''), t'') = \\ = \frac{\exp\left(-\frac{(Z(t''))^2}{4Dt''}\right)}{\sqrt{4\pi Dt''}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(Z(t') - Z(t''))^2}{4D|t'' - t'|}\right)}{\sqrt{4\pi D|t'' - t'|}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В итоге

$$\overline{\delta(z' - Z(t'))\delta(z'' - Z(t''))} = \frac{\exp\left(-\frac{(z'')^2}{4Dt''}\right)}{\sqrt{4\pi Dt''}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(z' - z'')^2}{4D|t'' - t'|}\right)}{\sqrt{4\pi D|t'' - t'|}}. \quad (5.12)$$

Учитывая выражения для коррелятора скорости, и интегрируя по dz' и dz'' , получаем

$$\left\langle (X(t))^2 \right\rangle = V^2 a \int_0^t \int_0^t \frac{dt'' dt'}{\sqrt{4\pi D |t' - t''|}} \approx \frac{V^2 a}{\sqrt{D}} t^{\frac{3}{2}} \quad (5.13)$$

Получаем, что размер облака примеси растет в направлении Ox быстрее чем \sqrt{t} . Данный режим называется *супердиффузией*:

$$R \sim t^{\frac{3}{4}}. \quad (5.14)$$

Качественная интерпретация данного результата.

По-прежнему рассматривается случай, когда скорости имеют только x компоненту, одинаковы по абсолютной величине и случайно распределены по слоям одинаковой толщины, так что средняя скорость при усреднении по всей координате z равна нулю.

Если бы частица оставалась в пределах одного слоя, ее смещение за время t было бы равно $X = Vt$. При блуждании частицы вдоль z она попадает в разные слои и ее результирующее смещение определяется числом нескомпенсированных слоев δN порядка $\delta N \sim \sqrt{N}$. В итоге $X \sim Vt \frac{\delta N}{N} \sim \frac{Vt}{\sqrt{N}}$. Учитывая, что за время t число пройденных частицей слоев порядка $N \sim \frac{\sqrt{Dt}}{a}$, приходим к формуле $X \sim \frac{\sqrt{a} V t}{(Dt)^{\frac{1}{4}}} \sim t^{\frac{3}{4}}$, что совпадает с выражением, полученным выше.

Стоит отметить, что в литературе авторами данной модели считаются Matheron & Marsily (1980), хотя за 10 лет до этого, эта же модель была разработана А. М. Дыхне и Ю. А. Дрейзиным (1972) для описания аномального переноса частиц в замагниченной плазме.

Если бы распределение скоростей по слоям было бы не хаотично, а **строго чередовалось**, то число нескомпенсированных слоев в каждый момент времени при блуждании частицы было бы $\delta N \sim 1$. Откуда следует, что нескомпенсированное

смещение $X \sim Vt \frac{\delta N}{N} \sim \frac{Vt}{N} \sim Vt \frac{a}{\sqrt{Dt}} = \frac{aV}{\sqrt{D}} \sqrt{t}$, то есть классический режим диффузии с эффективным коэффициентом

$$D_{eff} \approx \frac{a^2 V^2}{D}. \quad (5.15)$$

Задача. Получить данный результат путем прямых вычислений, положив, что скорость по оси Oz распределена строго периодически (например, $v(z) = V \cos\left(\frac{2\pi}{a} z\right)$).

VI Сильно контрастные среды с фрактальными свойствами

Итак, как следует из предыдущего материала, два фактора играют важную роль при определении режима переноса: физический механизм переноса (диффузия или адвекция) и структурные особенности неоднородной среды. В общем случае неоднородные среды с точки зрения распределения неоднородностей можно разбить на три группы: 1) статистически однородные среды (это среды, в которых можно ввести средние значения пористости, скорости инфильтрации и коэффициент дисперсии, значения которых не зависят от масштаба усреднения), 2) регулярно неоднородные среды (рассмотренные выше), и 3) так называемые самоподобные среды, или среды с фрактальными свойствами. Наличие фрактальных свойств часто является предпосылкой для возникновения аномальных режимов переноса. Но прежде чем рассматривать данные режимы, ознакомимся со свойствами этих особенных сред.

Немного истории. В середине прошлого века известный физик Льюис Ричардсон задался вопросом, почему в справочниках Испании и португалии указывается разная длина Испано-Португальской границы (в Португальских справочниках указывалась длина приблизительно в 1200 км, а в Испанских ~ 800 км). Он решил сам исследовать этот вопрос. Для этого он брал циркуль с раствором l и высчитывал количество отрезков N_l данной длины, уместящихся на кривой, описывающей границу. Длину кривой L он вычислял по формуле

$$L = N_l \cdot l \quad (6.1)$$

Он обнаружил, что по мере уменьшения l длина кривых возрастала! Более того, он вывел следующую зависимость:

$$\ln L = A - B \ln l \quad (6.2)$$

где A и B - константы, и определил B для ряда случаев. Например, для Испано-Португальской границы $B \approx 0,25$. Для других кривых на карте эта величина оказывалась другой (например, для побережья Норвегии $B \approx 0,52$). Интерпретацию данному факту дал Бенуа Мандельброт, который ввел в физику понятие фрактала.

Мандельброт дал следующее определение фракталу:

Фракталом называется структура (объект), состоящая из частей, которые в некотором смысле подобны целому.

Пример – снежинка Коха, которая строится следующим образом.

Для ее построения берется равносторонний треугольник. Каждая сторона разбивается на три равные части и средняя часть заменяется двумя отрезками равной

длины. Данная процедура повторяется для каждого вновь образующегося отрезка. В итоге мы получим непрерывную кривую, которая не имеет касательной ни в одной точке, которая обладает указанными двумя свойствами:

- 1) с каким бы увеличением мы ни рассматривали эту кривую, мы будем видеть, что она состоит из отдельных частей;
- 2) рассматривая элементы все более мелкого масштаба, мы увидим, что они повторяют более крупные фрагменты.

Можно дать альтернативное определение фракталу:

Фракталами являются геометрические объекты – линии, поверхности, пространственные тела, имеющие существенно изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия.

Снежинка Коха является примером строго самоподобного фрактала – форма мелкомасштабных фрагментов строго повторяет форму крупномасштабных. Такие фракталы называются регулярными.

Если в процедуру построения фрактала внести элемент случайности (например, при построении снежинки Коха заменять не центральный отрезок, а один из трех с равной вероятностью), то возникает случайный фрактал. Такие фракталы самоподобны только после усреднения по различным реализациям.

При построении фрактала мы можем в какой-то момент остановиться. Тем самым мы определим минимальный масштаб l_{min} , так что на масштабах $l < l_{min}$ основное свойство фракталов – самоподобие – пропадает. Действительно, при $l < l_{min}$ элементом фигуры является просто отрезок. Заметим, что на размерах больше размеров снежинки, то есть некоторого l_{max}) свойство самоподобия также нарушается.

Для фрактальных объектов, встречающихся в природе, свойство самоподобия реализуется именно в ограниченном интервале $l_{min} < l < l_{max}$.

Фракталы характеризуются размерностью (Хаусдорф 1919), которая вводится следующим образом.

Рассмотрим евклидово пространство с топологической размерностью d_T . Помести в него наш геометрический объект и будем покрывать его элементы d_T -мерными кубиками, причем длина ребра любого кубика δ_i не превышает некоторого значения δ : $\delta_i < \delta$. Введем параметр d и рассмотрим сумму

$$l_d(\delta) = \sum_i \delta_i^d \quad (6.3)$$

по всем кубикам, покрывающим наш геометрический объект. Определим нижнюю грань этой суммы по всевозможным покрытиям:

$$L_d(\delta) = \inf l_d(\delta) \quad (6.4)$$

после чего устремим δ к нулю.

Если d мало, то δ_i^d будут стремиться к нулю очень медленно (действительно, при $d=0$ имеем $\delta_i^d = 1$ не зависимо от δ_i). А так как число кубиков при этом стремится к бесконечности, то и сумма $L_d(\delta) \rightarrow \infty$.

Наоборот, если d велико, то $\delta_i^d \rightarrow 0$ очень быстро. В этом случае $L_d(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Следовательно, существует промежуточное критическое значение d_x , так что

$$\begin{aligned} d < d_x & \quad L_d(\delta) \Big|_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \\ d > d_x & \quad L_d(\delta) \Big|_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Число d_x называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича.

Для обычных геометрических объектов d_T и d_x совпадают. Пример: квадрат на плоскости.

Сложность использования данной размерности состоит в том, что надо перебирать все возможные покрытия со всеми возможными $\delta_i < \delta$. Проще пользоваться емкостью d_C , которая вводится следующим образом.

Рассмотрим покрытие нашего геометрического множества d_T -мерными кубиками, но теперь все кубики одного размера δ . Пусть $N(\delta)$ - минимальное число кубиков, покрывающих множество. Если с убыванием δ ($\delta \rightarrow 0$) $N(\delta)$ растет как

$$N(\delta) \sim \delta^{-d_C}, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (6.6)$$

то d_C называется емкостью нашего геометрического множества.

Из (6.6) следует

$$d_C = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} \quad (6.7)$$

Размерности d_C и d_x равны практически всегда.

При применении определения d_C к физическим объектам необходимо учитывать, что существует δ_{min} , ниже которого свойство самоподобия нарушается. В этом случае d_C в диапазоне $\delta_{min} < \delta < \delta_{max}$ определяются из зависимости $\ln N(\delta)$ от $\ln \delta$.

Примеры.

Снежинка Коха. На n -том шаге построения размер покрытия $\delta = L\left(\frac{1}{3}\right)^n$, а число покрытий $N(\delta) = 4^n$. В итоге

$$d_C = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln \left(L \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26 \quad (6.8)$$

Интересно, что фрактальная размерность снежинки Коха приблизительно равна фрактальной размерности Испано-Португальской границы.

Еще примеры.

Канторова пыль. Строится из отрезка последовательным делением его на три части и выбрасыванием среднего интервала. $d_C = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$.

Ковер Серпинского. Берется квадрат. Делением стороны квадрата на три части, разбивается на 9 более мелких квадратов. Центральный выбрасывается. И т.д. $d_C = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,89$.

Губка Менгера. Та же процедура, что и с квадратом, но для куба. $d_C = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,72$.

Выше рассмотрены регулярные фракталы. Фрактальные объекты, встречающиеся в природе – случайные фракталы.

Рассмотрим, что получается при **пересечении** двух фракталов. В куб с ребром L поместим фрактал с размерностью d_1 и покроем его (фрактал) кубиками с ребром l .

Количество таких кубиков будет $N_1 \approx \left(\frac{L}{l}\right)^{d_1}$. Всего кубиков в большом кубе $N_0(l) = \left(\frac{L}{l}\right)^d$

, где d - размерность пространства. Вероятность того, что случайный кубик покрывает первый фрактал, есть $P_1 = \frac{N_1}{N_0} \approx \left(\frac{L}{l}\right)^{d_1-d}$. Аналогично, для второго фрактала в кубе

$P_2 = \frac{N_2}{N_0} \approx \left(\frac{L}{l}\right)^{d_2-d}$. Пересечение двух фракталов определяется кубиками,

принадлежащими как первому, так и второму фракталам. Вероятность того, что случайный кубик принадлежит пересечению фракталов, есть $P_{\cap} = P_1 \cdot P_2$:

$$P_{\cap} = \left(\frac{L}{l}\right)^{d_1+d_2-2d}. \quad (6.9)$$

С другой стороны, пересечение есть также фрактальное множество со своей размерностью

d_{\cap} , для которого $P_{\cap} = \left(\frac{L}{l}\right)^{d_{\cap}-d}$. Сравнивая полученные выражения, получаем

$$d_{\cap} = d_1 + d_2 - d \quad (6.10)$$

Для пересечения фрактала в трехмерном объеме плоскостью имеем $d_{\cap} = d_1 - 1$.

VII Перколяционные среды

Перенос примеси в геологических средах происходит по каналам полностью или частично заполненным водой. Каналы складываются из отдельных («элементарных») дефектов породы: пор либо трещин. Основной макроскопически средней величиной, описывающей совокупность этих дефектов, является пористость:

$$\varphi = \frac{V_{pores}}{V_{\Sigma}} \quad (7.1)$$

Если φ мало, то отдельные поры не связаны друг с другом, и среда непроницаема. В случае большой φ ($\varphi < 1$) – поры хорошо связаны друг с другом, образуют каналы, по которым может просачиваться жидкость, и переноситься примесь.

Существует φ_{thresh} пороговое значение. В области

$$\frac{|\varphi - \varphi_{thresh}|}{\varphi_{thresh}} \ll 1 \quad (7.2)$$

среда обладает особыми свойствами с точки зрения переноса. Причина этого заключается в том, что в данном диапазоне каналы, по которым происходит перенос являются фракталами. Данные свойства описываются теорией перколяции или протекания (percolation – (англ.) протекание).

История вопроса. В 1957 году Бродбент и Хаммерсли занимались усовершенствованием масок для шахтеров (противогазов). Основной элемент маски – угольный фильтр. Поры в угле образуют некий лабиринт из каналов. По мере просачивания по этим каналам воздух очищается – вредные примеси оседают на стенках. Если поры большие и их много, то газ проходит по каналам легко, примеси слабо задерживаются и маска неэффективна. В обратном пределе (поры малы и их мало) каналы плохо проходимы, и дышать через такую маску будет тяжело.

Бродбент и Хаммерсли впервые установили, что вблизи порога протекания свойства среды не описываются классическими закономерностями. Например, проницаемость не пропорциональна пористости φ .

Теорию протекания стали строить исходя из следующего модельного опыта. Бралась металлическая сетка 137x137 узлов (см. Рис. 7.1). К бокам приваривались два электрода, к которым прикладывалось напряжение, и измерялся ток. После этого случайным образом выбирались узлы и перерезались проволочки, соединяющие данный

узел с остальными. Состояние такой системы характеризовалось величиной x , которое равнялось отношению количества оставшихся в решетке узлов к полному их числу:

$$x = \frac{N_{int}}{N_{\Sigma}} \quad (7.3)$$

Первый вопрос: при каком x_* ток прекратится вообще. Было получено, что для разных экспериментов x_* несколько различаются, то есть x_* - случайная величина. Но все они лежат вблизи

$$x_* \approx x_{thresh} \approx 0,59 \quad (7.4)$$

Распределение x_* имеет вид колокола (см. Рис. 7.2), причем, чем с большим числом узлов бралась сетка, тем это распределение было уже.

Среднее значение $x_{thresh} \approx 0,59$ случайной величины x_* называется порогом протекания.

В рассмотренном выше эксперименте исследовалась задача узлов. Аналогично может быть рассмотрена задача целых связей. Также формулируются задачи протекания для треугольных, гексагональных сеток. Качественно результаты одинаковые, но число x_{thresh} , конечно, различается.

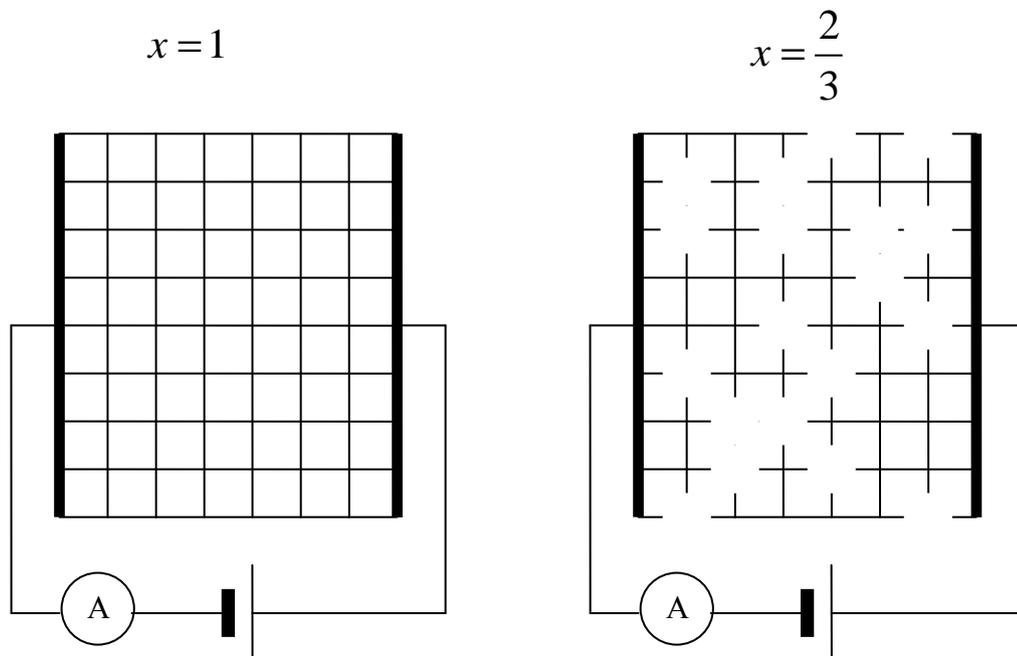


Рис. 7.1

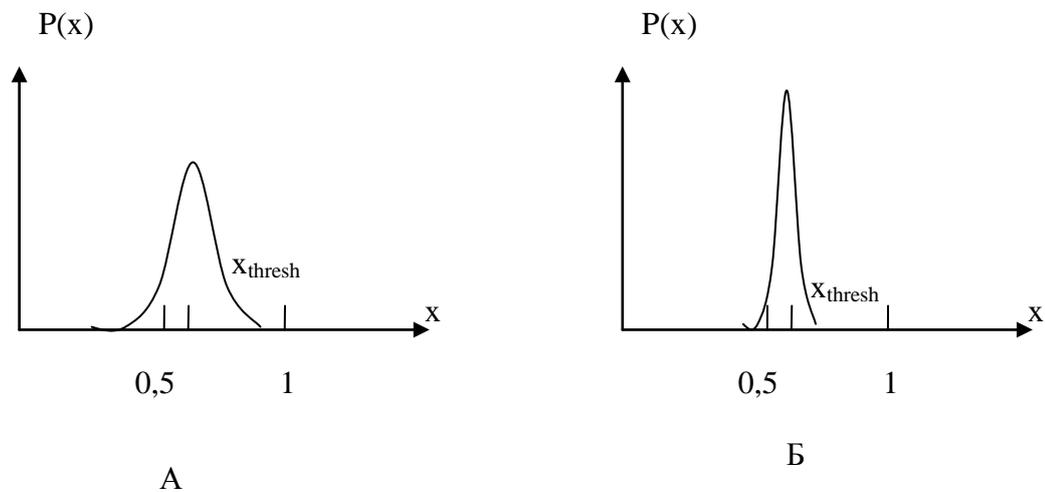


Рис. 7.2

В дальнейшем рассматривать задачу связей, так как связи более похожи на трещины, которые формируют пути просачивания.

Итак, смотрим ту же прямоугольную решетку, но теперь случайным образом убираем связи. Если доля целых связей $x < x_{thresh}$, то мы увидим приблизительно такую картинку:

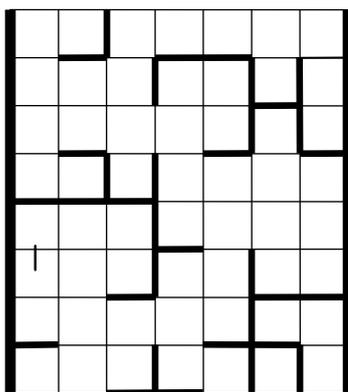


Рис. 7.3 Целые связи изображены толстыми линиями.

Группы связей будут формировать кластеры, так что

- 1) внутри кластера мы можем перейти из одной точки в любую другую, принадлежащую этому же кластеру;
- 2) переход между кластерами невозможен.

Было обнаружено, что эти кластеры представляют собой *случайные фракталы*, с определенной фрактальной размерностью D_f . Последнее означает, что количество связей N , объединенных в один кластер, растет с линейным размером данного кластера R как

$$N(R) \sim R^{D_f} \quad (7.5)$$

Очевидно, в двумерном случае $1 < D_f < 2$.

Эти кластеры имеют определенное распределение по размерам R : $n(R)$. Причем существует критический размер ξ , зависящий от средней концентрации связей x , такой, что при $R < \xi$ распределение кластеров по размерам имеет степенной вид:

$$n(R) \sim R^{-\tau}, \quad (7.6)$$

а кластеров с размерами $R > \xi$ экспоненциально мало.

Величина ξ называется *корреляционным радиусом* (или корреляционной длиной) перколяционной среды.

Этот корреляционный радиус зависит от концентрации целых связей, точнее, от близости данной концентрации к пороговому значению, также степенным образом:

$$\xi \sim a \cdot (x_{thresh} - x)^{-\nu}, \quad (7.7)$$

где a - размер одной связи.

С ростом x по мере приближения к пороговому значению, корреляционный радиус увеличивается и при $x = x_{thresh}$ он обращается в бесконечность. То есть с вероятностью единица появляется бесконечно большой кластер, по которому начинает протекать ток.

Говорят, что при $x = x_{thresh}$ появляется перколяционный кластер, обеспечивающий связь между бесконечно удаленными точками. Очевидно, он имеет ту же фрактальную размерность D_f .

Это справедливо для среды бесконечных размеров. Если среда конечных размеров L , то в соответствии с соотношением

$$L \sim \xi, \quad (7.8)$$

имеем пороговое значение для протекания

$$\tilde{x}_{thresh} \approx x_{thresh} - \left(\frac{a}{L}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \quad (7.9)$$

Что происходит при дальнейшем увеличении x ?

Бесконечный кластер начинает усложняться.

В самой точке $x = x_{thresh}$ он представлял собой разветвленную линию, у которой существовали такие связи, что, сделав надрез одной связи, мы разбивали бесконечный кластер на две несвязанных половинки (red bonds).

При $x > x_{thresh}$ бесконечный кластер представляет собой сетку с множеством отростков, причем размер ячейки этой сетки имеет масштаб корреляционной длины ξ . Внутри этих ячеек существуют отдельные кластеры размерами меньше ξ , с прежней фрактальной размерностью и распределением по размерам.

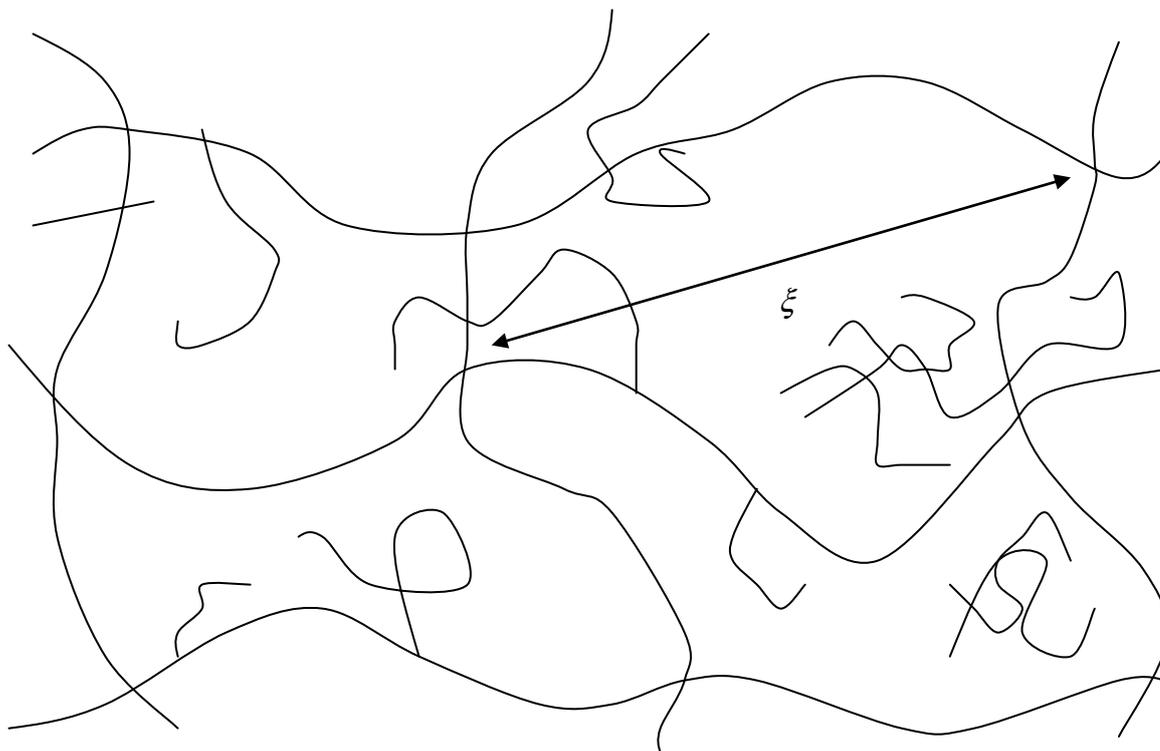


Рис. 7.4

Дальнейшее увеличение концентрации связей x приводят к уменьшению размера ячеек бесконечного кластера, причем по тому же самому закону

$$\xi \sim a \cdot (x - x_{thresh})^{-\nu}. \quad (7.10)$$

Когда корреляционный радиус становится порядка a , среда обретает свойства обычной классической среды.

Но уже при конечном, пускай и большом, ξ , наша среда обладает обычными свойствами, если мы будем интересоваться масштабами больше ξ : результат усреднения свойств среды не будет зависеть от масштаба. То есть среда становится *статистически однородной*.

На бесконечный перколяционный кластер (∞ ПК) можно посмотреть еще и с другой стороны. Повторим процедуру построения ∞ ПК. Мы задаем в пространстве сетку связей (узлов). Случайным образом убираем связи, так что вероятность того, что связь не разорванная определяется числом x . Соседние целые связи формируют ∞ ПК, и по этим связям мы можем перебираться из одной точки ∞ ПК к другой. Вероятность того, что случайно выбранная связь принадлежит ∞ ПК, P_∞ , испытывает переход.:

При $x < x_{thresh}$ $P_\infty = 0$.

При $x > x_{thresh}$ $P_\infty > 0$, и растет с ростом $x - x_{thresh}$:

$$P_\infty \sim (x - x_{thresh})^\beta \quad (7.11)$$

Данный переход аналогичен фазовому переходу второго рода, а P_∞ имеет смысл параметра порядка.

Введенные в формулах (7.6), (7.7) и (7.11) величины τ, ν и β носят название критических индексов, и вместе с D_f определяют поведение системы. Но данные четыре величины не являются независимыми! Действительно, на масштабах $r < \xi$ число связей, принадлежащих ∞ ПК определяется формулой (7.5): $N(r) \sim R^{D_f}$. На масштабах $r > \xi$, ∞ ПК уже не является фрактальным, так что количество связей ему принадлежащих описывается формулой $N(r) \sim N(\xi) \frac{V}{\xi^d}$ (где d - размерность вмещающего пространства), чему соответствует плотность связей $\frac{N(r)}{V} \sim \frac{N(\xi)}{\xi^d} \sim \xi^{D_f - d}$. Учитывая, что P_∞ есть ни что иное, как плотность связей, принадлежащих ∞ ПК, и воспользовавшись формулами (7.10) и (7.11), приходим к соотношению

$$D_f = d - \frac{\beta}{\nu}. \quad (7.12)$$

Структура перколяционного кластера обладает рядом особенностей. В нем можно выделить остов (backbone) и тупики (dead ends). Остов связывает удаленные концы перколяционного кластера. Тупики прикрепляются к остову каждый только в одном месте.

Если мы рассмотрим блуждания частиц по перколяционному кластеру, то на далекие расстояния частицы переносятся по остову, а тупики служат ловушками: частица уходит в тупик, блуждает в нем, но пока она не вернется в остов, в то же самое место, откуда пришла, ее дальнейшее передвижение ограничено размерами тупика. И та и другая части кластера являются фрактальными объектами. Фрактальная размерность тупиков больше и, очевидно, равна фрактальной размерности всего кластера.

В трехмерном случае расчеты дают следующие величины размерностей

$$D_{bb} \approx 1,75,$$

$$D_{de} \approx 2,5.$$

Вычисление критических индексов. Достоинство науки о перколяции заключается и в том, что свойства перколяционных кластеров, которые описываются критическими индексами не зависят от типа решетки (узлов, либо связей, треугольной, квадратной либо гексагональной) на которой строится конкретная модель. Они универсальны и зависят лишь от размерности пространства. Недостатком же является то, что вычислить эти индексы можно лишь в небольшом числе случаев.

Примером такого случая является перколяция на решетке Бете или дереве Келли (два названия одной модели). Дерево Келли строится следующим образом. Из исходного узла выходят z связей. Совокупность полученных узлов называется первой химической оболочкой. Далее из каждого узла первой химической оболочки выпускаются еще $z-1$ связь. Эти выпущенные связи порождают *новые* узлы. Продолжая процесс, получим, что число узлов решетки растет экспоненциально с числом шагов l :

$$Z(l) = z(z-1)^{l-1} = \frac{z}{z-1} \exp(l \cdot \ln(z-1)) \quad (7.13)$$

Поэтому можно сказать, что это решетка в бесконечномерном пространстве (для конечной размерности d , $Z(l) \sim l$). Если же теперь каждая связь является целой лишь с некоторой вероятностью p , то мы имеем перколяционную модель, с помощью которой можно описывать перенос частиц в этой системе (по целым связям).

Свяжем параметры, описывающие дерево Келли с обычными декартовыми координатами. Если мы выберем две точки, разделенные l шагами, то расстояние между этими точками, с учетом того, что направление каждого шага произвольно, будет описываться выражением

$$r^2 \approx a^2 l \quad (7.14)$$

где a есть длина одного шага.

Найдем порог протекания. *Среднее* число целых связей (или доступных узлов) на l -том шаге есть

$$N(l) = zp \cdot \underbrace{(z-1)p \cdots}_{l-1} = zp [(z-1)p]^{l-1} \quad (7.15)$$

Если с ростом l $N(l)$ стремится к бесконечности, то протекание есть, в обратном случае, $N(l) \rightarrow 0$, протекания гнет. Таким образом, порог протекания есть

$$p_{thresh} = \frac{1}{z-1} \quad (7.16)$$

Вычислим индекс ν , определяющий поведение корреляционного радиуса. Предварительно найдем ξ_l - корреляционный радиус в зависимости от l . Оценим его как средний размер кластера (в единицах l).

$$\xi_l = \langle l \rangle = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} l \langle N(l) \rangle}{\sum_{l=1}^{\infty} \langle N(l) \rangle} \quad (7.17)$$

Здесь $N(l)$ есть среднее число целых связей на l -той оболочке. Если вероятность целой связи есть p , то справедлива (7.15). Выразим $N(l)$ через p_{thresh} :

$$N(l) = pz \left(\frac{p}{p_{thresh}} \right)^{l-1} \quad (7.18)$$

Тогда входящие в (7.17) выражения принимают вид

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle N(l) \rangle = pz \frac{1}{1 - \frac{p}{p_{thresh}}} \quad (7.19)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} l \langle N(l) \rangle = pz \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{p_{thresh}} \right)^2} \quad (7.20)$$

В итоге получаем

$$\xi_l = \frac{p_{thresh}}{p_{thresh} - p} \quad (7.21)$$

Откуда с учетом (7.14) следует

$$\xi \sim \sqrt{\frac{P_{thresh}}{P_{thresh} - p}}, \quad (7.22)$$

и, следовательно, $\nu = \frac{1}{2}$

К сожалению, в подавляющем большинстве не существует точных аналитических методов для вычисления критических индексов, и для этого используют численные методы. Значения наиболее важных индексов ν и β представлены в таблице для двумерного и трехмерного случая.

Таблица

	$d = 2$	$d = 3$
ν	4/3	$\approx 0,88$
β	5/36	$\approx 0,41$

Свойство поля скоростей инфильтрации в перколяционных средах.

Перколяционные кластеры, по которым происходит перенос, являются фрактальными объектами, что и определяет их свойства. Как установлено выше, число кубиков с ребром длиной l , покрывающих фрактальное множество с линейным размером L , есть

$$N_C(l, L) \approx \left(\frac{L}{l}\right)^{d_C}, \quad (7.23)$$

и оно растет с убыванием l . Посмотрим на это соотношение с другой стороны. Зафиксируем теперь l и будем увеличивать L . Число кубиков, покрывающих фрактал, будет расти. Общее число кубиков, покрывающих пространство, содержащее фрактал,

$N_0 = \left(\frac{L}{l}\right)^d$ будет также расти. Если рассмотреть «плотность» нашего фрактала (то есть

число элементов фрактала в единице объема) как $\rho = \frac{N_C}{N_0}$, то она по мере роста L будет

убывать:

$$\rho \sim \left(\frac{L}{l}\right)^{d_C - d} \quad (7.24)$$

Но плотность, это величина, которая характеризует усредненные свойства среды. Отсюда следует, что для фрактальных объектов усредненные свойства не постоянны, и зависят от масштаба усреднения.

В данном случае для плотности справедливо соотношение скейлинга, то есть степенное соотношение

$$\rho \sim \frac{1}{L^{d-d_c}} \quad (7.25)$$

Если мы измерим плотность на масштабе L ($L \rightarrow \rho$), то на масштабе $L' = \lambda L$ значение плотности будет определяться соотношением

$$\rho' = \lambda^\alpha \rho, \quad \alpha = d_c - d. \quad (7.26)$$

Такие же соотношения будут справедливы во фрактальных средах и для других величин и являются следствием самоподобия среды).

Рассмотрим поле скоростей инфильтрации $\vec{V}(\vec{r})$ в среде, пути просачивания в которой (трещины) образуют фрактальную структуру. В общем случае

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{u} + \vec{v}(\vec{r}) \quad (7.27)$$

где $\vec{u} = \langle \vec{V}(\vec{r}) \rangle$, $\langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle = 0$.

Нас интересует корреляционная функция скорости, которая в силу однородности и изотропии пространства есть функция $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$:

$$\langle \vec{v}(\vec{r}_1) \vec{v}(\vec{r}_2) \rangle = f(r) \quad (7.28)$$

Соотношения скейлинга дают, что при переходе от масштабов r к $r' = \lambda r$ корреляционная функция преобразуется как

$$\langle \vec{v}(\vec{r}'_1) \vec{v}(\vec{r}'_2) \rangle = \lambda^\beta \langle \vec{v}(\vec{r}_1) \vec{v}(\vec{r}_2) \rangle \quad (7.29)$$

где β - индекс, характеризующий поле скоростей.

Данное соотношение будет удовлетворяться, если корреляционная функция имеет вид

$$\langle \vec{v}(\vec{r}_1) \vec{v}(\vec{r}_2) \rangle \sim r^\beta \quad (7.30)$$

Такой вид коррелятора будет использован нами в дальнейшем.

Замечание. В задачах инфильтрации влаги в геологических средах $\beta < 0$. А для поля скоростей в задачах турбулентности $\beta > 0$.

Рассмотрим поведение средней скорости течения, введенное в предыдущих лекциях для сред с фрактальными свойствами.

На масштабах $R < \xi$ поле скоростей сильно флуктуирует, так что корреляции флуктуации степенным образом убывают с расстоянием

$$K^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \langle V_i(\vec{r}_1) V_j(\vec{r}_2) \rangle \sim V^2 \left(\frac{a}{r} \right)^{2h}, \quad r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad (7.31)$$

Если мы усредним данную величину на масштабах порядка либо больше ξ , то получим (ввиду того что функция под интегралом убывает очень медленно, интеграл определяется ее значением на верхнем пределе):

$$\frac{\iint_{\xi^3, \xi^3} K^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2}{\xi^3 \cdot \xi^3} \sim V^2 \left(\frac{a}{\xi} \right)^{2h} \quad (7.32)$$

Но для статистически однородной среды характерная средняя амплитуда флуктуации по порядку величины равна средней скорости течения u , откуда следует порядок величины для средней скорости

$$u \sim V \left(\frac{a}{\xi} \right)^h \quad (7.33)$$

Видно, что средняя скорость убывает с ростом ξ .

VIII Диффузия на фрактале

Перейдем к анализу характеристик переноса по объектам с фрактальной структурой. Начнем с диффузии.

Рассмотрим блуждания, при которой частица совершает скачки конечной длины за конечное время (то есть по механизму диффузии) вдоль кластера с некой фрактальной размерностью. Мы хотим охарактеризовать это блуждание одним индексом γ , так что

$$R = \sqrt{\langle r^2 \rangle} \sim t^\gamma \quad (8.1)$$

В литературе иногда пользуются величиной d_w : $d_w = \frac{1}{\gamma}$.

Способы нахождения γ разные, но в основном – это численный расчет. Аналитически можно посчитать лишь в некоторых простых случаях, например, для регулярных фракталов. В качестве примера возьмем салфетку Серпинского (это не перколяционный кластер!) с фрактальной размерностью $D_f = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ (строится как и ковер Серпинского, но из треугольников).

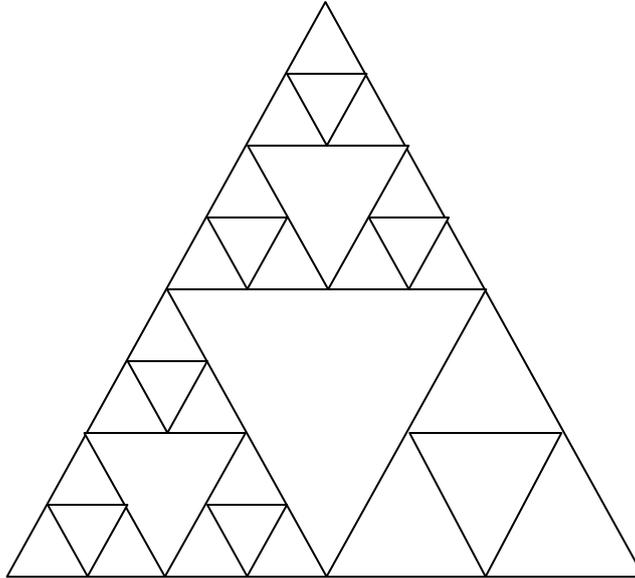


Рис. 8.1. Салфетка серпинского.

Поместим частицу в вершину и рассмотрим ее блуждание по данному фракталу. Наша цель – определить зависимость

$$R \sim t^{\frac{1}{d_w}}. \quad (8.2)$$

Воспользуемся самоподобием кластера в пространстве и будем считать, что таким же свойством самоподобия обладает режим переноса частицы во времени. Тогда, в соответствии с формулой (8.2), увеличивая (уменьшая) пространственный масштаб в λ раз, мы получим, что соответствующее время увеличится (уменьшится) в λ^{d_w} раз.

Рассмотрим один треугольник с ребром L (Рис. 8.2, слева). Отвлекаясь от его внутренней структуры, считаем, что частица доберется из точки P в одну из точек O за время T , так что

$$L^{d_w} \sim T \quad (8.3)$$

(13)

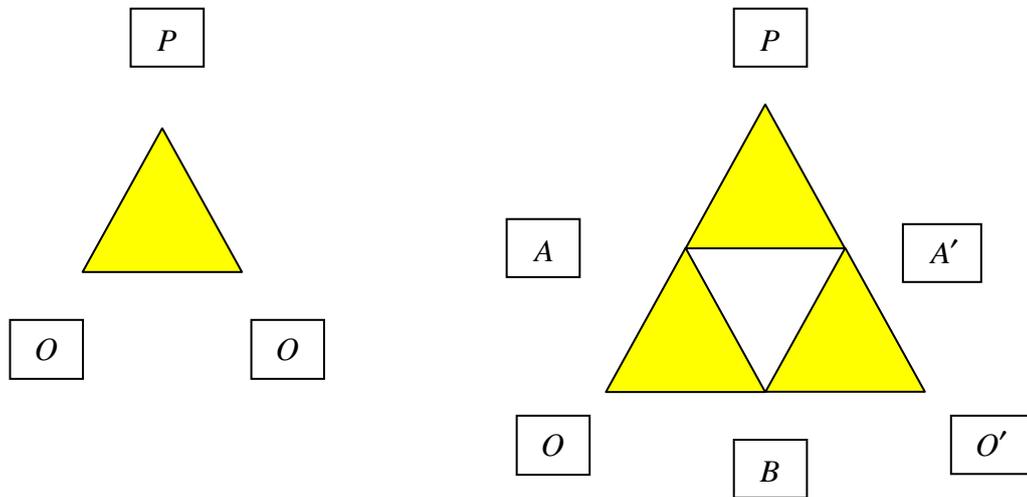


Рис. 8.2

Увеличим масштаб картинки в два раза и учтем, что наш новый треугольник состоит из трех старых. Внутреннюю структуру старых треугольников мы по-прежнему не разрешаем. Вычислим *среднее* время, за которое частица доберется из точки P в одну из точек O (то есть на расстояние $2L$).

Имеют место следующие этапы движения:

1) $P \rightarrow A \rightarrow O$.

Соответствующее время будет

$$T' = T + T_A \quad (8.4)$$

где T_A есть время перехода из точек A, A' в точки O, O' .

2) Для вычисления времени T_A нам нужно найти *среднее* время для *всех возможных* траекторий из точек A, A' в точки O, O' .

Возможные траектории следующие

- А) $A \rightarrow O$; соответствующее время $\tau_1 = T$;
- Б) $A \rightarrow B \rightarrow O$; соответствующее время $\tau_2 = T + T_B$;
- В) $A \rightarrow A' \rightarrow O'$; соответствующее время $\tau_3 = T_A + T$;
- Г) $A \rightarrow P \rightarrow O$; соответствующее время $\tau_4 = T + T'$;

В итоге получаем соотношение

$$T_A = \frac{1}{4}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4), \text{ или } T_A = \frac{1}{4}(T + T + T_B + T + T_A + T + T') = T + \frac{1}{4}(T_B + T_A + T').$$

$$T_A = T + \frac{1}{4}(T_B + T_A + T') \quad (8.5)$$

3) Для вычисления времени T_B рассмотрим возможные переходы $B \rightarrow O$.

- А) Прямой переход $B \rightarrow O$, соответствующее время $\tau_1 = T$;
- Б) переход $B \rightarrow A \rightarrow O$; соответствующее время $\tau_2 = T + T_A$.

В итоге

$$T_B = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) = T + \frac{1}{2}T_A \quad (8.6)$$

Решая совместно полученные соотношения (8.4)-(8.6), получаем

$$T' = 5T \quad (8.7)$$

И учитывая $L' = 2L$, для общего соотношения $L'^{d_w} = T'$ находим

$$d_w \approx \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,32 > 2 \quad (8.8)$$

Таким образом, перенос частиц происходит в режиме субдиффузии.

Численные расчеты подтверждают эту величину.

Соотношение Эйнштейна

Представляет интерес провести расчет режима переноса во фрактальной среде, обусловленного механизмом диффузии, с помощью соотношения Эйнштейна.

Соотношение Эйнштейна связывает коэффициент диффузии D с подвижностью частиц в среде b :

$$D = bk_b T \quad (8.9)$$

где T это температура, а k_b - константа Больцмана.

Рассмотрим фрактальный кластер заполненный частицами. Коэффициент диффузии частиц D , определяемый из условия, что поток частиц $j = -D\nabla C$, или, что эквивалентно, $R^2 \sim Dt$, уже не является константой, а меняется со временем. Здесь R есть размер характерное расстояние, пройденное частицей за время t . Исходя из этого, коэффициент диффузии D можно определить как

$$D = \frac{R^2}{t} . \quad (8.10)$$

Если процесс описывается неклассической закономерностью

$$R^{d_w} \sim t \quad (8.11)$$

где $d_w \neq 2$, то из (8.10) и (8.11) получим

$$D \sim R^{2-d_w} . \quad (8.12)$$

Пусть теперь к частицам приложена некая постоянная сила (например, частицы заряжены, и в среде есть постоянной электрическое поле). Вычислим подвижность частиц b .

Заметим, что подвижность b однозначно связана с проводимостью соотношением

$$\sigma = e^2 nb \quad (8.13)$$

где e заряд частиц, а n их плотность. Поэтому, если мы будем знать зависимость проводимости от пространственного масштаба, на котором рассматривается процесс, то мы сможем с помощью сэ определить d_w . Заметим, что если элементы перколяционного кластера заполнены зарядами однородно, то общее количество заряда M в пространстве масштабом R будет

$$M \sim R^{D_f} \quad (8.14)$$

Где D_f есть размерность фрактального кластера. Соответственно плотность n , входящая в (8.13) определится условием

$$n = \frac{M}{R^d} \sim R^{D_f-d} . \quad (8.15)$$

Займемся вычислением проводимости. Для начала вычислим сопротивление r между двумя «точками» кластера разделенными расстоянием R . По определению

$$rI = \Delta\varphi = ER, \quad (8.16)$$

где I - это ток, текущий между этими точками, $\Delta\varphi$ и E - разность потенциалов и поле, соответственно.

Предположим, что сопротивление кластера описывается некоторым скейлингом

$$r \sim R^\xi \quad (8.17)$$

Выражая ток через проводимость в соотношении (8.16), получаем

$$rI \sim R^\xi I \sim R^\xi \sigma ER^{d-1} \sim RE \quad (8.18)$$

Приходим к скейлингу для проводимости

$$\sigma \sim R^{2-d-\xi} \quad (8.19)$$

Учитывая теперь (8.9), (8.12), (8.13), (8.15) и (8.19), получаем

$$R^{2-d-\xi} \sim R^{D_f-d} R^{2-d_w}, \quad (8.20)$$

откуда

$$d_w = D_f + \xi. \quad (8.21)$$

Вычислим d_w для салфетки Серпинского. Найдем скейлинг для сопротивления. Пусть на масштабе R сопротивление между верхней вершиной треугольника и одной из вершин основания есть r . Найдем сопротивление r' для увеличенного в 2 раза треугольника. Из симметричной картинке видно, что

$$r' = r + (r \parallel 2r) = r + \frac{2}{3}r = \frac{5}{3}r \quad (8.22)$$

Из скейлинга $r \sim R^\xi$ получаем

$$\xi = \frac{\ln 5/3}{\ln 2} \quad (8.23)$$

Учитывая (8.21), а также что для салфетки Серпинского $D_f = \frac{\ln 3}{\ln 2}$, получаем

$$d_w = \frac{\ln \frac{5}{3} + \ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 5}{\ln 3}, \quad (8.24)$$

что совпадает с результатом (8.8).

IX Перенос в перколяционных средах. Диффузия

Для случайных фракталов (в частности, перколяционных кластеров) такой простой процедуры не существует.

Вернемся к перколяционному кластеру. Как показали расчеты (численные эксперименты) перечисленные выше показатели D_f, τ, ν, d_w НЕ ЗАВИСЯТ от типа решеточной модели среды (модель узлов, модель связей, квадратная решетка, треугольная, ...). Они зависят только от размерности пространства, а в остальном они универсальны. При изменении типа решетки меняется только пороговое значение протекания x_{thresh}

В частности для d_w в результате численного эксперимента диффузии частицы по перколяционному кластеру были получены значения

$$d_w \approx 2,87 \text{ в двумерном случае, и } d_w \approx 3,88 \text{ в трехмерном случае.}$$

Пользуясь этим благоприятным обстоятельством, было предложено вообще отказаться от решеточной модели и рассматривать проблему «перколяции в непрерывном пространстве» (continuum percolation problem).

Имеются разные подходы формирования перколяционной среды в этом случае. Например, набрасывание проводящих шаров в непроводящем пространстве. Причем шары могут как перекрываться, так и не перекрываться, могут быть одного размера, либо разных размеров.

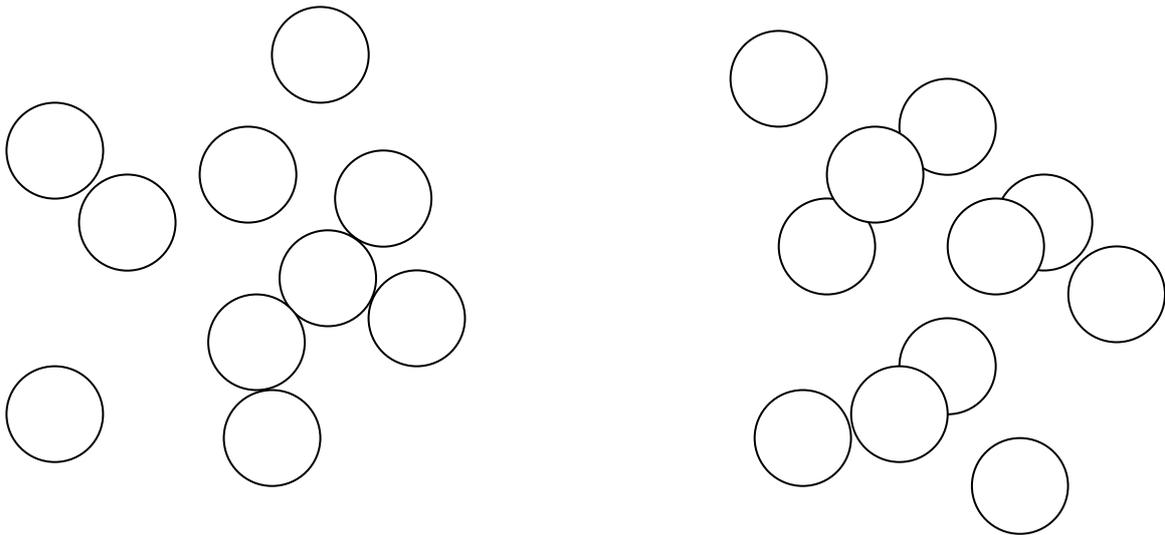


Рис. 9.1

Существуют модели, в которых, наоборот, из проводящей среды выбрасываются области (те же шары) – «модель швейцарского сыра». Кроме того, в

качестве элементарных объектов можно брать не только шары, имитирующие поры, но и диски, имитирующие трещины.

В этих моделях перколяционный порог определяют через критический объем, занятый дефектами φ_{resh} . Например, для порога перколяции в модели проводящих шаров-пор одного радиуса $\varphi_{resh} \approx 0,295$.

Наконец рассмотрим, какой режим переноса реализуется при случайном блуждании частиц по перколяционному кластеру на масштабах $R \gg \xi$.

Если при $R < \xi$ мы имеем самоподобие, то при $R > \xi$ уже можно усреднять свойства среды по объему $V \geq \xi^3$, и результат усреднения не будет зависеть от объема усреднения. Таким образом, в этом случае среда является статистически однородной. Но для такой среды режим миграции описывается классическим диффузионным законом

$$R \sim \sqrt{\tilde{D}t} \quad (9.1)$$

Для которого необходимо определить эффективный коэффициент диффузии \tilde{D} .

На малых временах, когда среднеквадратичное смещение частицы меньше ξ , $R < \xi$, режим переноса описывается субдиффузионной зависимостью $R \sim t^{\frac{1}{d_w}}$.

На больших временах, когда $R > \xi$, имеем $R \sim \sqrt{\tilde{D}t}$.

Значит, существует критическое время t_* , когда один режим переходит в другой. Этому соответствуют расстояния $R \approx \xi$.

Из субдиффузионного закона, имеем $t_* \sim \xi^{d_w}$, из закона классической диффузии, $\tilde{D} \approx \frac{\xi^2}{t_*}$.

В итоге получаем

$$\tilde{D} \sim \xi^{2-d_w} \quad (9.2)$$

Поскольку $d_w > 2$, то с ростом ξ эффективный коэффициент диффузии убывает.

Таким образом, при конечном радиусе корреляции имеют место два режима: 1) на малых временах – субдиффузия, 2) на больших временах – перенормированная классическая диффузия.

Х Перенос в перколяционных средах. Адвекция

Случайная адвекция во фрактальных средах. Полеты Леви.

Рассмотрим закономерности переноса во фрактальных средах, обусловленные адвекцией в поле скоростей инфильтрации по системе каналов.

В общем случае поле скоростей инфильтрации характеризуется корреляционной функцией

$$\langle V_i(\vec{r}_1, t_1) V_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle \quad (10.1)$$

Мы будем рассматривать стационарный случай для изотропной и пространственно однородной среды. Как следует из результатов предыдущей лекции, корреляционная функция может быть представлена в виде

$$\langle V_i(\vec{r}_1, t_1) V_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle \propto V^2 \left(\frac{a}{r} \right)^{2h} \quad (10.2)$$

где $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Величина средней скорости $\bar{u} = \langle \vec{V} \rangle$ имеет порядок $u \sim V \left(\frac{a}{\xi} \right)^h$, и на масштабах меньших корреляционной длины ξ ею можно пренебречь, так что будем считать

$$u = \langle \vec{V} \rangle \approx 0 \quad (10.3)$$

Как мы знаем, в этом случае режим переноса определяется среднеквадратичным смещением частиц (вторым моментом пространственного распределения концентрации) $\langle r^2 \rangle$. Будем вычислять данную величину следующим образом. Рассмотрим движение отдельной частицы. Ее смещение определяется формулой

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{V}(t_1) dt_1 \quad (10.4)$$

С учетом (3) выражение для среднеквадратичного смещения имеет вид

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \left\langle \int_0^t \vec{V}(t_1) dt_1 \int_0^t \vec{V}(t_2) dt_2 \right\rangle = \\ &= \int_0^t \int_0^t \langle \vec{V}(t_1) \vec{V}(t_2) \rangle dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (10.5)$$

Таким образом, среднеквадратичное смещение частицы определяется корреляциями скорости одной и той же частицы в различные моменты времени.

В случае стационарной, однородной картины течения коррелятор скорости для одной частицы

$$K(t_1, t_2) = \langle \vec{V}(t_1) \vec{V}(t_2) \rangle \quad (10.6)$$

зависит только от разности времен t_1 и t_2 , которую мы обозначим за τ :

$$\tau = t_1 - t_2 \quad (10.7)$$

Сделаем замену в выражении (10.5):

$$(t_1, t_2) \rightarrow (t', \tau) \quad (10.8)$$

где

$$\begin{aligned} t' &= t_2 \\ \tau &= t_1 - t_2 \end{aligned} \quad (10.9)$$

В итоге выражение (10.5) примет вид

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^t \int_{-t'}^{t-t'} K(\tau) d\tau dt' \quad (10.10)$$

Изменим в данном интеграле порядок интегрирования: $d\tau dt' \rightarrow dt' d\tau$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^t \int_{-t'}^{t-t'} K(\tau) d\tau dt' = \int_0^t \int_0^{t-\tau} K(\tau) dt' d\tau + \int_{-t}^0 \int_0^t K(\tau) dt' d\tau \quad (10.11)$$

и проинтегрируем по dt'

$$\int_0^t \int_0^{t-\tau} K(\tau) dt' d\tau + \int_{-t}^0 \int_0^t K(\tau) dt' d\tau = \int_0^t K(\tau)(t-\tau) d\tau + \int_{-t}^0 K(\tau)(t+\tau) d\tau \quad (10.12)$$

Учтем, что $K(-\tau) = K(\tau)$. В итоге получим

$$\langle r^2(t) \rangle = 2 \int_0^t (t-\tau) K(\tau) d\tau \quad (10.13)$$

Пример. Рассмотрим миграцию частиц, определяемую короткими скачками, так что коррелятор скорости убывает со временем экспоненциально:

$$K(\tau) \cong V^2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad (10.14)$$

Интегрирование дает

$$\langle r^2(t) \rangle = 2 \int_0^t (t-\tau) V^2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) d\tau \approx 2V^2 \tau_0 t \quad (10.15)$$

Последнее равенство означает, что перенос происходит в режиме классической диффузии

$$\langle r^2(t) \rangle \approx Dt \quad (10.16)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = 2V^2\tau_0 \quad (10.17)$$

Если ввести длину свободного пробега $\lambda = V\tau_0$, то коэффициент диффузии можно представить в «твердотельном»

$$D \sim \frac{\lambda^2}{\tau_0}$$

либо «газокинетическом» виде

$$D \sim \lambda V$$

Чтобы охарактеризовать движение частицы во фрактальной среде, нам надо связать корреляторы скорости $K(\tau)$ и $\langle V_i(\vec{r}_1)V_j(\vec{r}_2) \rangle$. Имея в виду, что нас главным образом интересует характер миграции (а не строго вычисленная величина смещения), будем рассуждать следующим образом.

Пусть в результате решения задачи мы получили, что корень из среднеквадратичного смещения $R = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ имеет следующую зависимость от времени

$$R \sim t^\alpha \quad (10.18)$$

Тогда для коррелятора частицы мы можем написать

$$K(\tau) \sim \langle V(R(\tau))V(0) \rangle \propto \frac{1}{R^{2h}} \sim \frac{1}{\tau^{2h\alpha}} \quad (10.19)$$

при $\tau > \tau_0$, где τ_0 - характерное время, на котором становятся существенны эффекты самоподобия среды. Воспользуемся этой качественной формулой для вычисления (13):

$$R^2 \sim \int_{\tau_0}^t (t-\tau) K(\tau) d\tau \quad (10.20)$$

Выражение (22) представимо в виде суммы двух интегралов:

$$R^2 = I_1 + I_2, \quad I_1 \sim t \int_{\tau_0}^t \frac{d\tau}{\tau^{2h\alpha}}, \quad I_2 \sim \int_{\tau_0}^t \tau \frac{d\tau}{\tau^{2h\alpha}} \quad (10.21)$$

Значения этих интегралов существенно зависят от значения комбинации $2h\alpha$.

Рассмотрим возможные случаи.

1) $2h\alpha > 2$. Подынтегральные выражения в обоих слагаемых очень быстро убывают, так что интегралы определяются нижним пределом, и, следовательно, в обоих случаях равны константе:

$$I_1 \sim t,$$

$$I_2 \sim \text{const}.$$

В итоге

$$R^2 \sim t \quad (10.22)$$

2) $1 < 2h\alpha < 2$. В этом случае для I_1 справедливо прежнее выражение, а для слагаемого I_2 интеграл убывает уже сравнительно медленно, так что его значение определяется значением функции на верхнем пределе.

$$I_2 \sim t^{2-2h\alpha}.$$

В итоге смещение частицы определяется суммой двух слагаемых

$$R^2 \sim t + t^{2-2h\alpha} \quad (10.23)$$

Но в силу $2h\alpha < 1$ имеем $2 - 2h\alpha = 1 - (2h\alpha - 1) < 1$, и на больших временах второе слагаемое растет медленнее первого. Следовательно, перенос определяется первым слагаемым, и по-прежнему справедливо (10.22).

3) $2h\alpha < 1$. В этом случае оба интеграла определяются верхним пределом, так что в итоге мы получаем

$$R^2 \sim t^{2-2h\alpha} \quad (10.24)$$

Полученные формулы еще не совсем определяют режим переноса, так как не известно α . И здесь надо вспомнить, что, согласно исходному предположению, α вводилось как показатель степени в формуле $R \sim t^\alpha$.

Учитывая это, при $2h\alpha > 1$, получаем $\alpha = 1/2$, и, следовательно, этот режим справедлив при $h > 1$.

Если же $2h\alpha < 1$, то $R \sim t^{1-h\alpha}$, и из условия $\alpha = 1 - h\alpha$ следует

$$\alpha = \frac{1}{1+h} > \frac{1}{2} \quad (10.25)$$

Итак, суммируя, получаем

$$R \sim t^{1/2}, \quad h > 1, \quad (10.26)$$

$$R \sim t^{1/(1+h)}, \quad h < 1 \quad (10.27)$$

Полезно проанализировать полученные режимы переноса с точки зрения величины случайных скачков совершаемых частицей в процессе миграции.

Частица совершает последовательность прыжков некоторой длины A каждый за время $\tau(A)$ в случайном направлении. С учетом корреляционных свойств поля скоростей, средняя скорость, с которой частица совершает прыжок длиной $r > a$, определяется оценкой

$$V(r) \sim V \left(\frac{a}{r} \right)^h. \quad (10.28)$$

Тогда соответствующее время прыжка будет

$$\tau(A) \approx \int_a^A \frac{dr}{V(r)} \sim \int_a^A \frac{r^h dr}{Va^h} \sim \frac{A^{1+h}}{Va^h}. \quad (10.29)$$

Пусть \bar{A} есть некая средняя длина прыжка, зависящая в общем случае от R . Тогда число скачков будет

$$N \approx \frac{t}{\tau(\bar{A})} \sim \frac{Va^h}{\bar{A}^{1+h}} t. \quad (10.30)$$

Соответственно, смещение частицы есть

$$R^2 \approx \bar{A}^2 N \sim Va^h \bar{A}^{1-h} t \quad (10.31)$$

В случае, если $\bar{A} \sim a$, то есть средняя длина прыжка порядка нижнего интервала фрактальности, то

$$R^2 \sim Dt, \text{ где } D \approx Va. \quad (10.32)$$

Этот случай реализуется при $h > 1$.

В случае длинных скачков $\bar{A} \sim R$, имеем

$$R^2 \sim Va^h R^{1-h} t, \quad (10.33)$$

откуда

$$R \sim (Va^h t)^{\frac{1}{1+h}}, \quad (10.34)$$

что справедливо при $h < 1$.

Режим, при котором справедливо выражение (37), называется «полетами Леви».

Влияние ловушек на режим переноса. Рассмотрим одновременное влияние на режим переноса частиц длинных коррелированных скачков и наличия в среде ловушек.

При $h > 1$ движение частицы определяется короткими скачками, причем, теперь время, затрачиваемое частицей на движение, составляет лишь часть общего времени, а остальную долю времени частица проводит в ловушках. Обычно время, приходящееся на прыжки, определяется некой степенной зависимостью

$$\tau(t) \sim t^\gamma. \quad (10.35)$$

Например, в модели Дыхне для плоской трещины $\gamma = 1/2$:

$$\tau(t) \sim \frac{a}{\sqrt{dt}}. \quad (10.36)$$

Для цилиндра $\gamma = 1$:

$$\tau(t) \sim \frac{a^2}{dt} \quad (10.37)$$

Для фрактальной среды в общем случае $0 < \gamma < 1$.

В итоге при $h > 1$ получаем

$$R \sim t^{\frac{1-\gamma}{2}} \quad (10.38)$$

что соответствует режиму субдиффузии.

Для $h < 1$ имеем

$$R \sim t^{\frac{1-\gamma}{1+h}}, \quad (10.39)$$

и возможны как супер- так и субдиффузионный режим переноса.

XI Статистически однородные резко контрастные среды

Перейдем теперь к третьему типу сред, а именно, рассмотрим статистически однородные резко контрастные среды. Под СтОдРКС будем понимать насыщенные среды, в которых перенос происходит по системам пор (либо трещин) двух сортов: 1) хорошо проницаемой системе, по которой происходит инфильтрация жидкости и, следовательно, адвекция растворенной примеси, и 2) слабопроницаемой системе пор, в которой скорость течения настолько мала, что ею можно пренебречь, но имеет место диффузия растворенной примеси. Пример такой среды изображен на Рис. 11.1

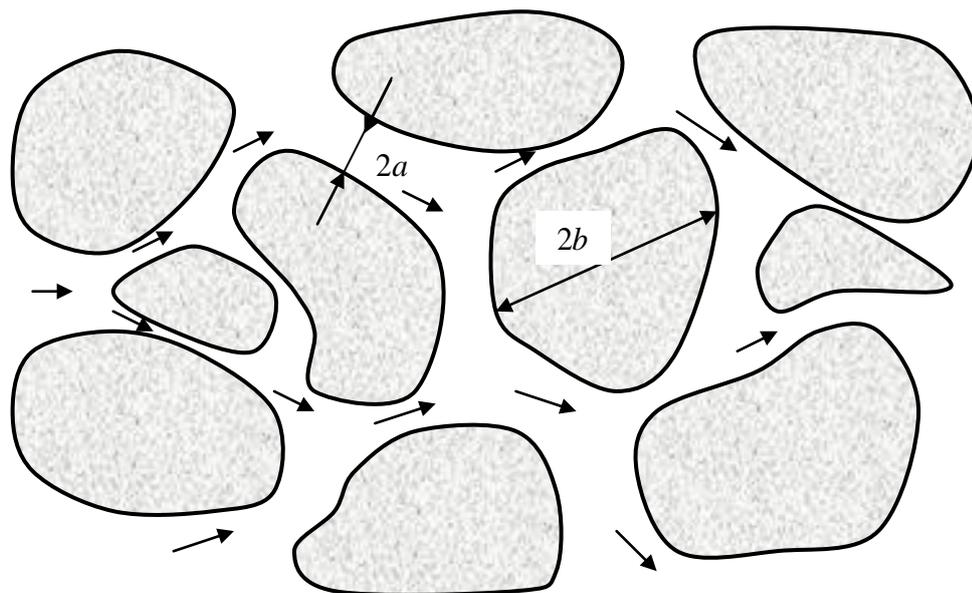


Рис. 1.1. Статистически однородная резко контрастная среда. Хорошо проницаемая система – это совокупность каналов, образованных крупными порами, либо трещинами.

Серые области, разделяющие каналы, содержат мелкие поры.

В отличие от рассмотренных ранее сред, здесь мы могли бы выбрать хороший объем усреднения (так как слабопроницаемые «блоки» приблизительно одного размера) и ввести единую проницаемость, среднюю пористость, коэффициент диффузии (дисперсии). Но оказывается, что в силу того, что процесс проникновения примеси в блоки (их иногда еще называют «застойные зоны») достаточно медленный (по сравнению с адвективным переносом по «быстрой» системе) он оказывает существенное влияние на результирующий режим переноса. В дальнейшем, для удобства будем называть «быструю» область совокупностью трещин.

Таким образом, модель учитывает следующие процессы:

- 1 Адвекцию в системе трещин с некой локальной скоростью $v(\vec{r})$;
2. Диффузию в растворе внутри трещин;
3. Диффузию внутрь блоков по пространству насыщенных влагой мелких пор.

Коэффициент диффузии в растворе d_m .

Тогда уравнение для концентрации примеси внутри трещин \hat{c} есть обычное уравнение адвекции-диффузии

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}\hat{c} - d_m \nabla \hat{c}) = 0 \quad (11.1)$$

После усреднения по объему V_Σ , включающему трещины и достаточно большое число блоков, для величины

$$c = V_\Sigma^{-1} \int_{V_\Sigma} \hat{c} d^3r \quad (11.2)$$

Мы получим уравнение (последовательный вывод данной формулы достаточно сложен, интересующиеся могут посмотреть его, например, в [])

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(\vec{u}c - D\nabla c) = -Q. \quad (11.3)$$

Здесь \vec{u} есть средняя скорость инфильтрации, D есть коэффициент дисперсии примеси в среде, включающий как молекулярную диффузию, так и гидродинамическую дисперсию. Для случая, $ub \gg 1$, можно пользоваться оценкой $D \approx ub$. Член в правой части Q описывает обмен примесью между трещинами и пористыми блоками. Для его определения мы должны описать поток примеси из пространства трещин внутрь (или, наоборот, из) блоков.

Сразу заметим, что поскольку само уравнение получено в результате усреднения на масштабах много больших размеров блоков, то оно справедливо на временах, когда размер облака примеси также существенно превышает данные масштабы. Поэтому при расчете потока примеси в блок мы можем приближенно считать, что концентрация вокруг одного блока приблизительно постоянна (в пространстве, но не во времени). Поэтому выражение для Q в самом общем виде должно иметь вид

$$Q(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t L(t-t') c(\vec{r}, t') dt' \quad (11.4)$$

где $L(t)$ есть так называемая функция памяти.

В дальнейшем, как и ранее мы будем интересоваться средним смещением и дисперсией примеси, для чего удобно пользоваться способом, описанным при исследовании модели Дыхне (Лекция II). Для этого в уравнении (11.3) перейдем в представление Фурье и Лапласа. Тогда решение (11.3) с учетом (11.4) и начального условия

$$c(\vec{r}, t = 0) = N_0 \delta(\vec{r}), \quad (11.5)$$

принимает простой вид:

$$c_{p\vec{k}} = N_0 \left(p + \Lambda_p + i\vec{k}\vec{u} + Dk^2 \right)^{-1} \quad (11.6)$$

где Λ_p есть Лаплас образ функции памяти. Точное выражение для $L(t)$ и Λ_p можно получить лишь в простейших случаях (например, когда «блоки» имеют сферическую, цилиндрическую либо плоскую форму). В общем случае, тем не менее, можно получить асимптотические выражения для произвольной формы блоков.

Вычисление асимптотик функции памяти.

Для определения $\Lambda(p)$ вычислим поток примеси на отдельный блок.

Уравнение для концентрации примеси n в поровом растворе внутри блока имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_m \Delta n \quad (11.7)$$

Усредняя уравнение по пространству внутри блока (на масштабах много больше размеров пор, но много меньше b) и учитывая, что для концентрации примеси в растворе \bar{n} применимо приближение равновесной сорбции, получаем уравнение

$$R \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} = d \Delta \bar{n} \quad (11.8)$$

где эффективный коэффициент диффузии d учитывает свойства среды блоков (пористость, искривленность путей миграции).

В начальный момент времени примеси в блоках нет

$$\bar{n}(r, t = 0) = 0 \quad (11.9)$$

Условие на границе блока (с учетом того, что \bar{c} есть концентрация активных частиц, усредненная на масштабах много больших b , имеет вид

$$\bar{n}|_{Bound} = A\bar{c} \quad (11.10)$$

где

$$A = \varphi_b / \varphi_{fr} \quad (11.11)$$

Здесь φ_b есть величина пористости в блоках, а φ_{fr} - удельная доля объема, занимаемого трещинами.

Поток примеси из пространства внутри трещин на один блок определяется выражением

$$q = -d \oint_{S_b} \bar{V} \bar{n} d\bar{S} \quad (11.12)$$

где интегрирование производится по поверхности блока S_b . Вводя объем, приходящийся на один блок V_b , для плотности стоков в уравнении (11.3) имеем

$$Q = \frac{q}{V_b} \quad (11.13)$$

Найдем выражения для $\Lambda(p)$ в двух предельных случаях больших и малых p . Для этого заметим, что режим переноса примеси внутри блока существенно различается на больших и малых временах. Именно, на временах $t \ll t_b$, где

$$t_b = \left(\frac{V_b}{S_b} \right)^2 \frac{1}{\bar{d}} \quad (11.14)$$

примесь, ушедшая в блок, занимает лишь узкий слой вблизи поверхности блока. В этом случае задачу диффузии примеси в блок можно рассматривать как одномерную. Тогда в представлении Лапласа уравнение (11.8) принимает вид

$$\frac{p}{\bar{d}} \bar{n} = \frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial x^2} \quad (11.15)$$

где ось x направлена вглубь блока по нормали к границе с началом на его поверхности. Решение, убывающее при $x \rightarrow \infty$, с учетом граничного условия (11.10) имеет вид

$$\bar{n} = A \bar{c} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\bar{d}}} x\right) \quad (11.16)$$

Подставляя (11.16) в выражение (11.12) и затем в (11.13), получаем

$$Q_{p,\bar{k}} \cong \sqrt{\frac{p}{t_a}} \bar{c}_{p,\bar{k}} \quad (11.17)$$

где введено новое характерное время

$$t_a = \left(\frac{V_b}{S_b A R} \right)^2 \frac{1}{\bar{d}} \quad (11.18)$$

В итоге, замечая, что интервал $t \ll t_b$ соответствует значениям переменной Лапласа $p \gg t_b^{-1}$, для функции $\Lambda(p)$ имеем

$$\Lambda(p) \approx \sqrt{\frac{p}{t_a}}, \text{ при } pt_b \gg 1 \quad (11.19)$$

Перейдем к временам $t \gg t_b$. Удобно выделить в уравнении (11.8) малый параметр. Для этого обезразмерим пространственную координату на величину $\tilde{b} = V_b/S_b$, которая приблизительно равна характерному размеру блока: $\vec{r} \rightarrow \vec{\tilde{r}} = \vec{r}/\tilde{b}$, так что уравнение (11.8) представления Лапласа примет вид

$$\alpha \bar{n} = \tilde{\Delta} \bar{n} \quad (11.20)$$

где $\alpha = pt_b \ll 1$, и абсолютные значения новых координат меняются в интервале порядка единицы. На рассматриваемых временах примесь в блоках распределена практически однородно, причем $\bar{n} \equiv A\bar{c}$ на границе блока, и $\bar{n} < A\bar{c}$ внутри блока. Тогда мы можем представить \bar{n} в виде

$$\bar{n} = A\bar{c} \left(1 - f(\vec{\tilde{r}})\right) \quad (11.21)$$

где $f(\vec{\tilde{r}}) = 0$ на границе блока и $f(\vec{\tilde{r}}) > 0$ внутри блока. Поскольку в уравнении (11.20) имеется малый параметр, будем искать решение в виде ряда теории возмущений. С точностью до членов первого порядка малости имеем $f(\vec{\tilde{r}}) \approx \alpha f_1(\vec{\tilde{r}})$, где f_1 удовлетворяет условиям: $\tilde{\Delta} f_1 = -1$ внутри блока, и $f_1 = 0$ на его границе. Переходя в (11.12) от поверхностного интеграла к объемному, воспользовавшись уравнением (11.20) и выражением (11.21), получаем для плотности стоков следующее соотношение

$$Q \cong \frac{d\alpha A}{V_b b^2} \left\{ \int_{V_b} dV - \alpha \int_{V_b} f_1(\vec{\tilde{r}}) dV \right\} \bar{c} \quad (11.22)$$

откуда для $\Lambda(p)$ получаем

$$\Lambda(p) \approx p \sqrt{\frac{t_b}{t_a}} (1 - Bpt_b), \text{ при } pt_b \ll 1. \quad (11.23)$$

где B - множитель порядка единицы, зависящий от формы блока.

Введенные времена (11.18) и (11.14) имеют следующий смысл. Параметр t_a характеризует время, когда количество примеси, ушедшей в блок, сравнивается с

количеством примеси в трещине, а параметр t_b есть время установления равновесия между примесью в трещинах и блоках. В настоящей работе мы полагаем

$$t_b \gg t_a \quad (11.24)$$

Задача. Найти $\Lambda(p)$ для блоков сферической формы одного размера.

Теперь перейдем к **определению режимов переноса** в такой среде.

Отметим, что наряду с уже введенными временами, режимы переноса зависят также от времени

$$t_u = \frac{4D}{u^2} \quad (11.25)$$

Расчет, аналогичный тому, который был проведен ранее в главе II, дает следующие результаты

На временах $t \ll t_a$, когда действием стоков можно пренебречь, перенос происходит как в классической модели адвекции-диффузии, так что полное число частиц в трещинах

$$N \approx N_0, \quad (11.26)$$

их среднее смещение

$$\langle \vec{r} \rangle \approx \vec{u}t \quad (11.27)$$

а дисперсия зависит от направления. В плоскости перпендикулярной направлению скорости дисперсия растет по классическому закону

$$\sigma_{\perp}^2 \approx Dt \quad (11.28)$$

Дисперсия вдоль средней скорости имеет вид (11.28) только во временном интервале $t \ll (t_a t_u^2)^{1/3}$. В интервале $(t_a t_u^2)^{1/3} \ll t \ll t_a$ дисперсия имеет вид $\sigma_{\parallel}^2 \approx u^2 t^2 \sqrt{t/t_a}$. Однако, такой вид дисперсии вовсе не означает, что перенос происходит по супердиффузионному закону (причем даже более быстрому чем перенос с постоянной скоростью). Это означает, что, позади пика распределения концентрации, не смотря на малые времена, начинает «отрастать» степенной хвост, обусловленный возвращением частиц примеси из блоков в трещины.

В следующем временном, $t_a \ll t \ll t_b$, интервале количество примеси в трещинах начинает убывать

$$N \approx N_0 \sqrt{\frac{t_a}{\pi t}} \quad (11.29)$$

а среднее смещение и продольная дисперсия описываются квазидиффузионными соотношениями

$$\langle r_{\parallel} \rangle \approx \sqrt{D_u t}, \quad \sigma_{\parallel}^2 \approx D_u t \quad (11.30)$$

где $D_u = \pi u^2 t_a$, а поперечная диффузия подчиняется закону субдиффузии

$$\sigma_{\perp}^2 \approx D \sqrt{t_a t}. \quad (11.31)$$

На больших временах $t \gg t_b$ примесь в трещинах и блоках приходит к приближенному равновесию, так что

$$N \approx N_0 \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}, \quad \langle r_{\parallel} \rangle \approx u \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}, \quad \sigma_{\perp}^2 \approx 2D \sqrt{\frac{t_a}{t_b}} \quad (11.32)$$

а вот продольная дисперсия зависит от соотношения характерных времен.

При $t_a \ll \frac{t_u^2}{t_a} \ll t_b$ продольная дисперсия определяется выражением

$$\sigma_{\parallel}^2 \approx 4BD_u t \quad (11.33)$$

в то время как при $t_u^2 \gg t_a t_b$ продольная дисперсия принимает вид

$$\sigma_{\parallel}^2 \approx 2D \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}. \quad (11.34)$$

ХII Перенос примеси в нестационарных течениях

Влияние нестационарности течения на перенос рассмотрим на примере слоистой среды (см. раздел V), когда скорость от слоя к слою меняется регулярным образом [7]. Будем, как и ранее, рассматривать двумерную задачу и считать, что скорость вдоль x меняется во времени с частотой ω :

$$u = u_x = 2v \cos ky \cos \omega t, \quad (12.1)$$

где $k = \frac{2\pi}{a}$, a есть толщина чередующихся слоев.

Рассмотрим несколько иную, чем раньше постановку задачи. Именно, будем считать, что задан некий средний градиент концентрации $g = \nabla C$ вдоль оси x , и рассчитаем, какой поток установится в этом направлении в такой среде.

Обозначим за \tilde{C} точную (не усредненную) концентрацию примеси. Для нее справедливо уравнение

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial y^2}, \quad (12.2)$$

где D есть коэффициент молекулярной диффузии примеси в растворе.

Наша цель – на основе решения этого уравнения вычислить плотность потока частиц примеси \tilde{j}_x , усреднить его и привести к виду

$$\langle \tilde{j}_x \rangle = -D_{eff} \nabla C. \quad (12.3)$$

Представим решение (12.2) в виде

$$\tilde{C} = C_0 + gx + b \cos ky \cos(\omega t + \varphi). \quad (12.4)$$

Подставляя \tilde{C} в уравнение (12.2), после сокращения на $\cos ky$, и собирая подобные члены при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим следующую систему уравнений для определения b и φ

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega}{Dk^2} \\ (\omega \sin \varphi - Dk^2 \cos \varphi) b = 2v g \end{cases} \quad (12.5)$$

Откуда нетрудно выразить амплитуду возмущения скорости:

$$b = \pm \frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + D^2 k^4}} g. \quad (12.6)$$

Вычислим точный флуктуирующий поток. Согласно формуле

$$\tilde{j}_x = u \tilde{C} - D \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}, \quad (12.7)$$

имеем

$$\tilde{j}_x = 2v \cos ky \cos \omega t (C_0 + gx + b \cos ky \cos(\omega t + \varphi)) - Dg \quad (12.8)$$

Усредняя данное выражение сначала по y , а затем по t , с учетом очевидных формул

$$\langle \cos \cos \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \cos \sin \rangle = 0$$

приходим к выражению

$$\langle \tilde{j}_x \rangle = vb \cos \varphi - Da. \quad (12.9)$$

И воспользовавшись (12.6), получаем окончательно

$$\langle \tilde{j}_x \rangle = -D \left(1 + \frac{2v^2 k^2}{\omega^2 + D^2 k^4} \right) \nabla C. \quad (12.10)$$

Таким образом эффективный коэффициент диффузии в этом случае имеет вид

$$D_{eff} = D \left(1 + \frac{2v^2 k^2}{\omega^2 + D^2 k^4} \right). \quad (12.11)$$

В стационарном течении ($\omega = 0$) полученное выражение, с учетом связи k и a переходит в формулу (5.15). При больших частотах эффективный коэффициент стремится к значению коэффициента молекулярной диффузии.

XIII Модель случайных блужданий в непрерывном времени (Continuum Time Random Walks)

Для описания неклассического переноса в литературе часто используется модель, в которой процесс миграции частиц есть последовательность случайных скачков, причем длина скачков и время, приходящееся на один скачек, не являются постоянными величинами. Модель строится следующим способом.

Считается, что частица начинает свое движение из начала координат. На каждом шаге она совершает мгновенный скачек в некоторое положение, причем момент скачка распределен во времени случайным образом, так что вероятность времени ожидания скачка описывается плотностью вероятности $\psi(t)$. В этом случае, вероятность того, что частица совершит скачек в интервале между t и $t + \Delta t$ есть

$$\Delta W(t, t + \Delta t) = \psi(t) \Delta t. \quad (13.1)$$

Скачки независимы, и время ожидания следующего скачка не зависит от предыдущего.

Для вероятности того, что время между скачками будет больше, чем t , справедливо выражение

$$\Psi(t) = \int_t^{\infty} \psi(t') dt'. \quad (13.2)$$

Введем $\psi_n(t)$ - плотность вероятности того, что n -тый скачок происходит в момент времени t . Ясно, что $\psi_1(t) = \psi(t)$. Скачки независимы, откуда следует, что

$$\psi_{n+1}(t) = \int_0^t \psi_n(t') \psi(t-t') dt'. \quad (13.3)$$

Рассмотрим образ Лапласа для функции $\psi(t)$:

$$\hat{\psi}(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) \exp(-pt) dt. \quad (13.4)$$

Образ Лапласа свертки двух функций в (13.3) имеет вид

$$\hat{\psi}_{n+1}(p) = \hat{\psi}_n(p) \hat{\psi}(p) \quad (13.5)$$

что дает

$$\hat{\psi}_n(p) = \hat{\psi}^n(p). \quad (13.6)$$

Аналогично, для величины $\Psi(t)$:

$$\int_0^{\infty} \Psi(t) \exp(-pt) dt = \frac{\Psi(0) - \hat{\psi}(p)}{p}, \quad (13.7)$$

или, учитывая, что $\Psi(0) = 1$, так как это есть вероятность того, что за время от 0 до ∞ скачек обязательно произойдет,

$$\hat{\Psi}(p) = \frac{1 - \hat{\psi}(p)}{p} \quad (13.8)$$

Теперь рассмотрим распределение скачков по длинам. Пусть $\varphi(r)$ есть плотность вероятности того, что за один скачек частица прыгнет на расстояние r . Для вероятности частице за $n+1$ скачок оказаться в точке на расстоянии r от начала координат мы можем написать рекуррентное соотношение

$$\Phi_{n+1}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(r') \varphi(r-r') dr' \quad (13.9)$$

Тогда рассмотрим Фурье образ $\varphi(r)$:

$$\hat{\varphi}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r) \exp(-ikr) dr, \quad (13.10)$$

имеем

$$\hat{\Phi}_n(k) = \hat{\varphi}^n(k). \quad (13.11)$$

Теперь перейдем к ключевой величине. Вычислим плотность вероятности того, что в результате последовательных скачков частица окажется в точке r в момент времени t . Суммируя по всем возможным событиям, для данной величины получаем

$$\Phi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r) \int_0^t \psi_n(t-t') \Psi(t') dt'. \quad (13.12)$$

Формула учитывает, что раз уж частица пришла в точку r в момент времени t , то она там так и останется.

Если взять преобразование Лапласа от этой величины, получим с учетом (13.8)

$$\Phi(r, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r) \frac{\hat{\psi}^n(p)(1 - \hat{\psi}(p))}{p}. \quad (13.13)$$

Переходя в представление Лапласа, с учетом (13.11) приходим к выражению

$$\Phi(r, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}^n(k) \hat{\psi}^n(p) \frac{1 - \hat{\psi}(p)}{p}. \quad (13.14)$$

Этот ряд можно просуммировать (с помощью формулы геометрической прогрессии):

$$\hat{\Phi}(k, p) = \frac{1 - \hat{\psi}(p)}{p(1 - \hat{\phi}(k)\hat{\psi}(p))}. \quad (13.15)$$

Теперь для получения искомой функции $\Phi(r, t)$ остается лишь выполнить обратное Фурье-Лаплас преобразование.

Аналитическое вычисление обратного Фурье-Лаплас преобразования выражения (13.15) представляет большие трудности, поэтому часто для описания режима переноса пользуются моментами данной функции. Например, для образа Лапласа среднего смещения согласно обычным формулам имеем

$$\langle \hat{r}(p) \rangle = -i \frac{\partial}{\partial k} \hat{\Phi}(k, p) \Big|_{k=0}, \quad (13.16)$$

что, с учетом нормировки $\varphi(r)$

$$\hat{\phi}(k=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r) \exp(-ikr) dr \Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r) dr = 1, \quad (13.17)$$

дает

$$\langle \hat{r}(p) \rangle = \frac{\mu_1 \hat{\psi}(p)}{p(1 - \hat{\psi}(p))}. \quad (13.18)$$

Здесь

$$\mu_1 = i \hat{\phi}'(k) \Big|_{k=0} = i \frac{\partial}{\partial k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r) \exp(-ikr) dr = -i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} r \varphi(r) dr = \langle r \rangle \quad (13.19)$$

есть среднее смещение частицы при одном прыжке.

После этого, нужно выполнить обратное преобразование Лапласа величины $\langle \hat{r}(p) \rangle$. Но и в этом случае вычисления представляют собой значительные трудности. Желающие могут попробовать определить режим переноса для модельного распределения плотности вероятности

$$\psi(t) = \begin{cases} A & t \leq t_0 \\ A \left(\frac{t_0}{t} \right)^\alpha & \end{cases}, \quad \text{где } A = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{t_0} \text{ и } 1 < \alpha < 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Физические модели аномального переноса примеси в сильно неоднородных средах. Труды ИБРАЭ под общ. ред. чл.-кор. РАН Л.А. Большова; Вып. 7. ИБРАЭ РАН. – М.: Наука, 2007.
2. D. ben-Avraham, S. Havlin, Diffusion and Reaction in Fractals and Disordered Systems, Cambridge, University Press, 2000.
3. М.В. Isichenko, Percolation, statistical topography and transport in random media, Review of Modern Physics, v. 64 (1992) pp.961-1043.
4. С. В. Божокин, Д.А. Паршин, Фракталы и мультифракталы, - Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
5. J. P. Bouchaud, A. Georges, Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications, Physics Reports 195 (1990) pp. 127-293.
6. M. Sahimi, Flow phenomena in rocks: From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, simulated annealing, Review of Modern Physics v. 64 (1993) pp.961-1043.
7. Я.Б. Зельдович, Точное решение задачи диффузии в периодическом поле скоростей и турбулентная диффузия, Доклады Академии Наук (1982) т. 266, №4, стр. 821-826.