



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

Nuclear Safety Institute

Турбулентность и её моделирование

А.С. Филиппов

8-495-955-22-19, phil@ibrae.ac.ru

Москва

2016

Литература: рекомендуемая, цитируемая

1. И.О. Хинце, Турбулентность. М., Наука, 1963 (физические основы)
2. D.C. Wilcox, Turbulence modeling on CFD. 1992 (и более поздние издания; модели турбулентности: k - ω , k - ε , ...)
3. S.B. Pope, Turbulent flows (основы, модели)
4. ANSYS Fluent 6.3, 12.2-16.2: User's guide (6.3), Theory guide (12.1.4-16.2)
5. А.Ю. Снегирёв. Численное моделирование турбулентных течений. СПб. 2009
6. М. Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа. М., Мир, 1986
7. П.Г. Фрик. Турбулентность: модели и подходы. 2010 г.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика (т. X)
9. А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. М., Наука, 1963
10. И.А. Белов, С.А. Исаев. Моделирование турбулентных течений. СПб. 2001
11. К.Н. Волков, В.Н. Емельянов, Моделирование крупных вихрей в расчётах турбулентных течений, М., Физматлит, 2008

Время от времени появляются новые малотиражные курсы лекций, издания вузов etc.

- Как счесть деревья? - смеясь, сказал Степан Аркадьич ...
- Сочесть пески, лучи планет хотя и мог бы ум высокий...
- Ну да, а ум высокий Рябинина может. И ни один купец не купит не считая ...

Л.Н.Толстой. Анна Каренина

Варианты классификации:

Турбулентность как гидродинамическое явление

Примеры:

**– возникновение и развитие (вниз по течению)
турбулентности в стационарных потоках**

Обтекание тел (цилиндр), струи, погран. слой

Физика потока жидкости, конфигурация и устойчивость

Состояние вещества: кинетика, термодинамика и др.	Внешние границы потока	Состояние потока: (не)устойчивость
<p><u>Сжимаемость</u></p> <p>$u_{\max} - u_{\min} \ll c$: несжимаемая</p> <p>$u_{\max} - u_{\min} < c$: дозвуковая</p> <p>$u_{\max} - u_{\min} \geq c$: (сверх)звуковая</p> <p>- Волны, скачки уплотнения, ...</p>	<p><u>"Пристеночный"</u></p> <p><u>поток</u> : обтекание, поток в канале, в системе границ или каналов etc.</p>	<p><u>Рэля-Тэйлора:</u></p> <p>Архимедова сила, "опрокидывание" жидкости (крит. Рэля, если температура)</p>
<p><u>Многофазность: граница раздела</u></p> <p>- одна фаза;</p> <p>- две и более фаз – межфазный обмен: импульс, масса, тепло ...</p>	<p><u>Большой объём</u> (свобод. конвекция, струи, ...): границы не формируют поток</p>	<p><u>Кельвина-Гельмгольца :</u></p> <p>Тангенциальный разрыв – неустойчив</p>
<p><u>Силовые поля:</u> гравитация – понятно ..., МГД – сложно, пропускаем ...</p>		<p><u>Аналогичные ...</u> (канал, вращ. цилин.)</p>

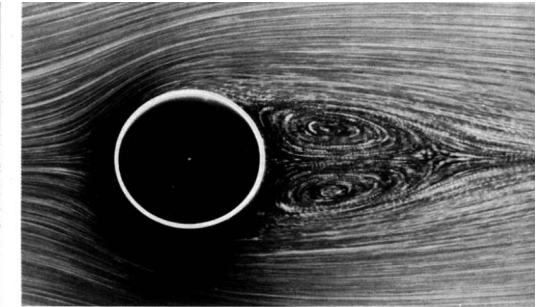
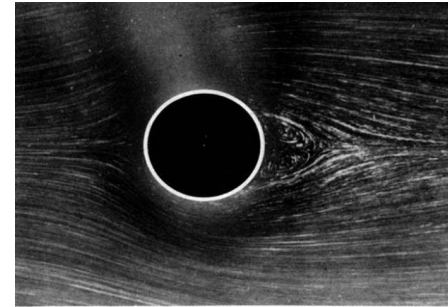
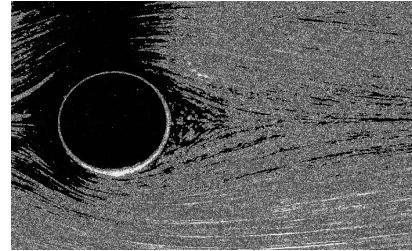
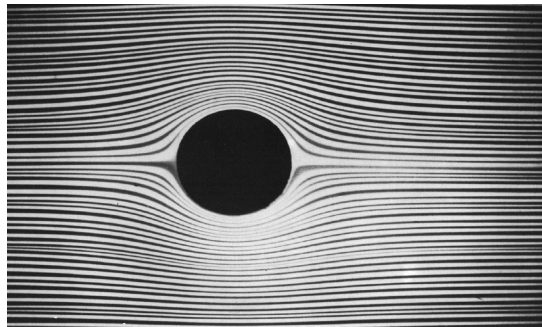
Все три фактора существенны, встречаются в разных комбинациях. Состояние (устойчивость) потока в общем определяется соотношением дестабилизирующих факторов и стабилизирующих (объёмные силы, инерция, вязкость ... : Re , Ra , ...)

Неустойчивость – новое состояние течения (не вещества ...).

Турбулентность потока – развитая неустойчивость. "Развитая" означает установление новой структуры потока, часто допускающей упрощённые описания

"Структуризация" потока при росте скорости (энергия, импульс)

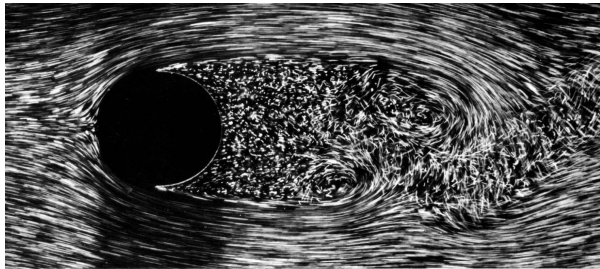
Обтекание: от потенциального течения – к ламинарному (см. Ван-Дайк)



41. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 13,1$. 42. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 26$.

$Re_c = 1$ → $Re_c = 26$

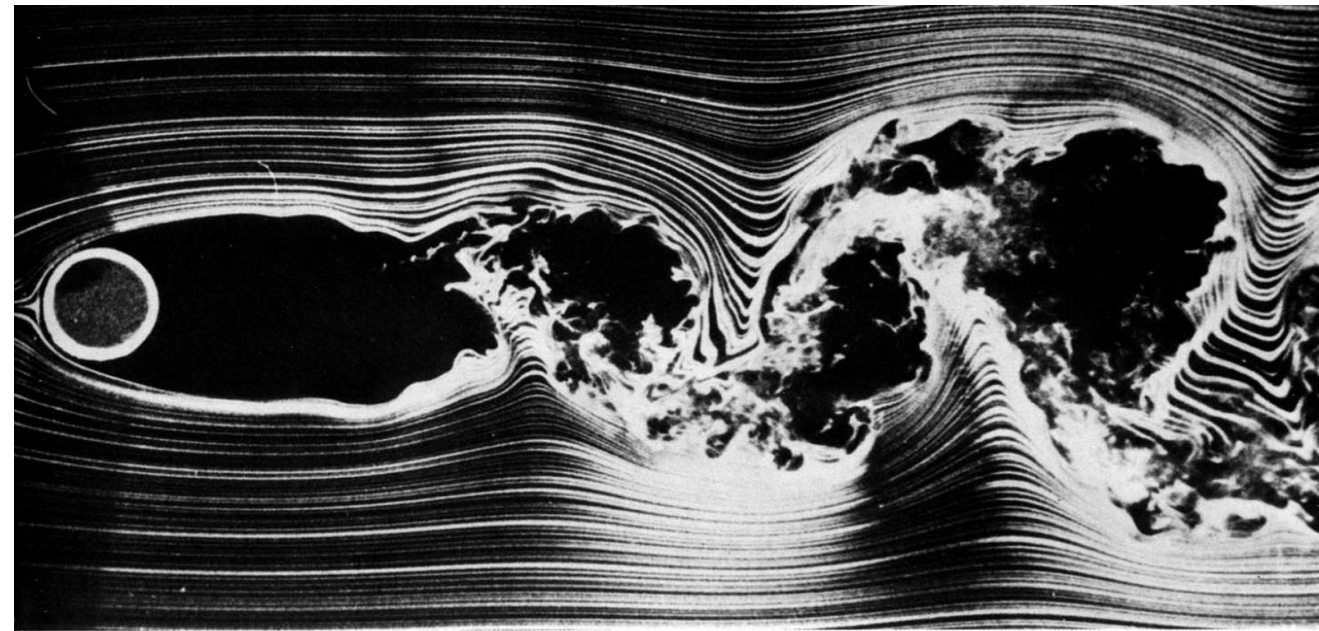
И – к турбулентному –



47. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 2000$. При таком числе Рейнольдса можно уже по-настоящему говорить о пограничном слое. В передней части этот слой ламинарен, затем он отрывается и разрушается, превращаясь в турбулентный след. Точки отрыва, пролигающиеся вперед по мере возрастания числа Рейнольдса, здесь уже достигли своего предельного положения в направлении вверх по потоку, находящегося вне радиуса сечения максимальной толщины. Визуализация осуществляется с помощью воздушных пузырьков в воде. Фото ONERA. [Werlé, Gallon, 1972]

$Re_c = 2000$

$Re_c = 10\ 000$



48. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 10\ 000$. При скорости, в пять раз превышающей скорость потока на предыдущем снимке, картина течения не претерпевает серьезных изменений. Коэффициент сопротивления, следовательно, остается почти по-

стоянным в диапазоне чисел Рейнольдса, охватываемом этими двумя снимками. Этот коэффициент снижается позднее, когда, как показано на фото 57, пограничный слой становится турбулентным уже в месте отрыва. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

Развитие турбулентности в потоке – результат неустойчивости

От ламинарного – к турбулентному:
развитие турбулентности в затопленной
струе вниз по потоку



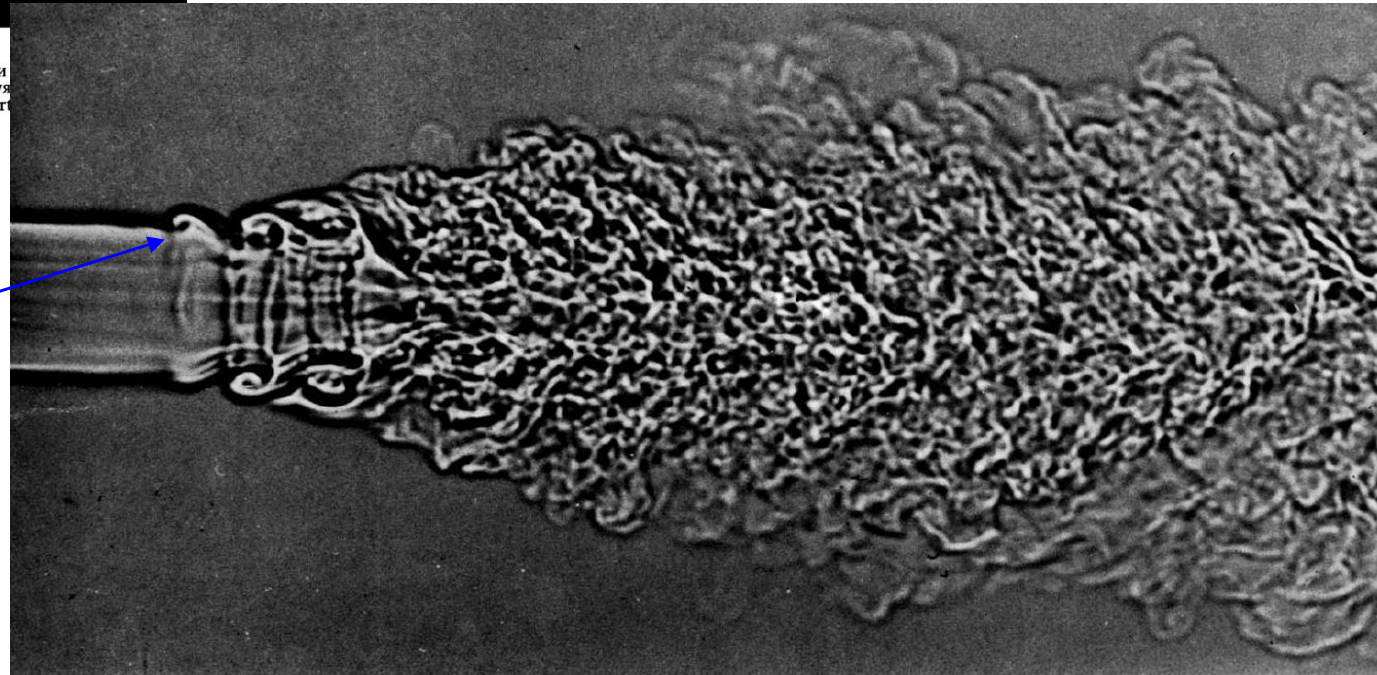
102. Неустойчивость осесимметричной струи. Ламинарный поток воздуха вытекает из круглой трубы при числе Рейнольдса 10 000 и визуализируется с помощью дымовой проволоки. Во внешней области струи развиваются осесимметричные колебания, затем эта область струи превращается в вихревые кольца, после чего струя становится турбулентной. Фото Robert san Nagib

$Re_{tube} = 10\ 000$

Развитие неустойчивости на
границе струи

Физический механизм —
неустойчивость
тангенциального разрыва

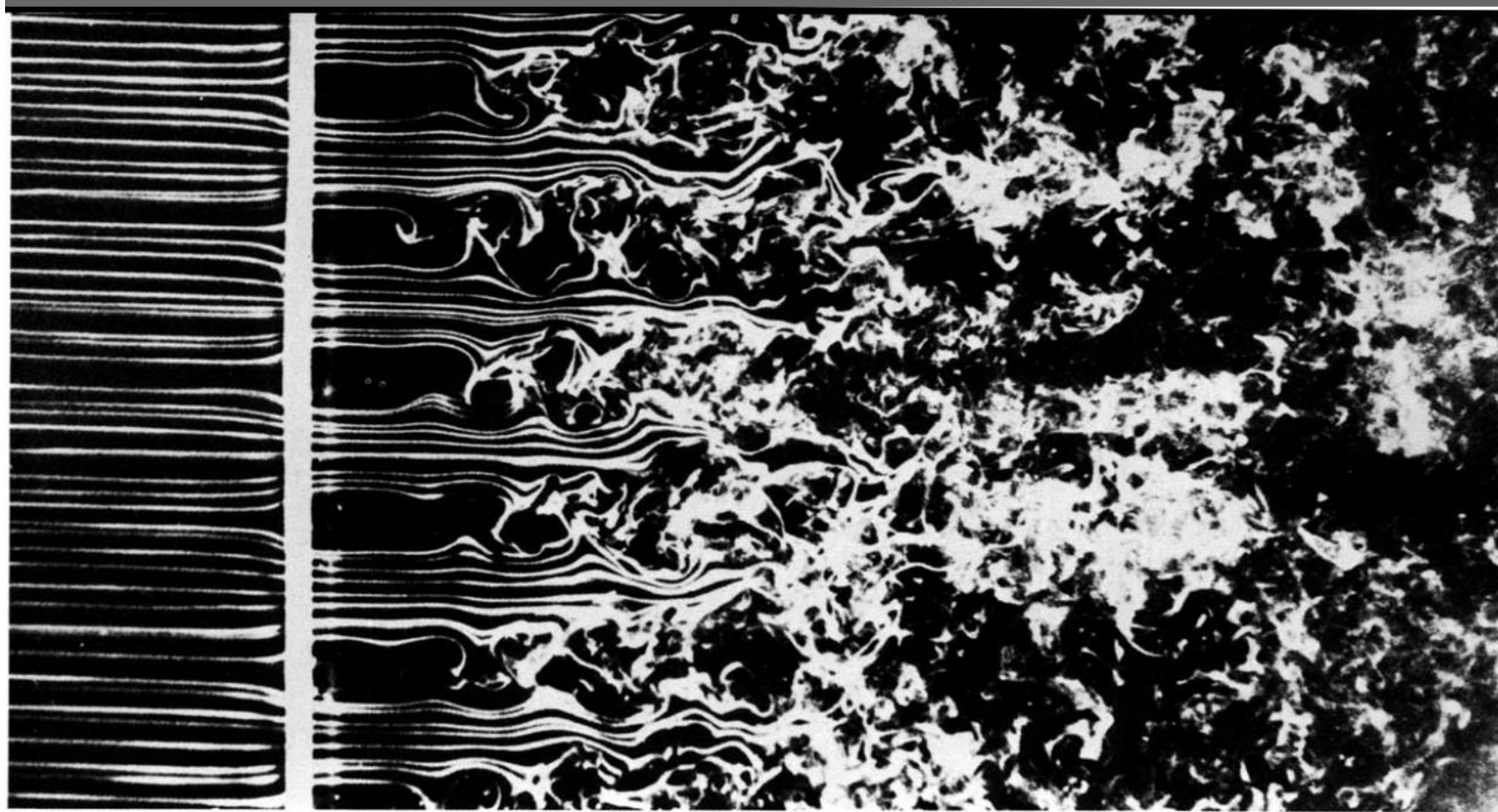
$Re_{tube} = 30\ 000$



117. Неустойчивость круглой струи. Эта теневая фотография демонстрирует струю углекислого газа диаметром 1/4 дюйма, вытекающую в воздух при скорости 127 фут/с. Когда струя вытекает из сопла при числе Рейнольдса, равном примерно 30 000, она ламинарна. На расстоянии одного диаметра вниз по потоку струя обнаруживает неустойчивость, после чего происходит образование вихревых колец и переход к турбулентности. Фото Fred Landis, Ascher H. Shapiro

Развитие турбулентности и "развитая турбулентность"

От ламинарного – к турбулентному: развитие вниз по потоку – перемешивающая решётка – множественные струи



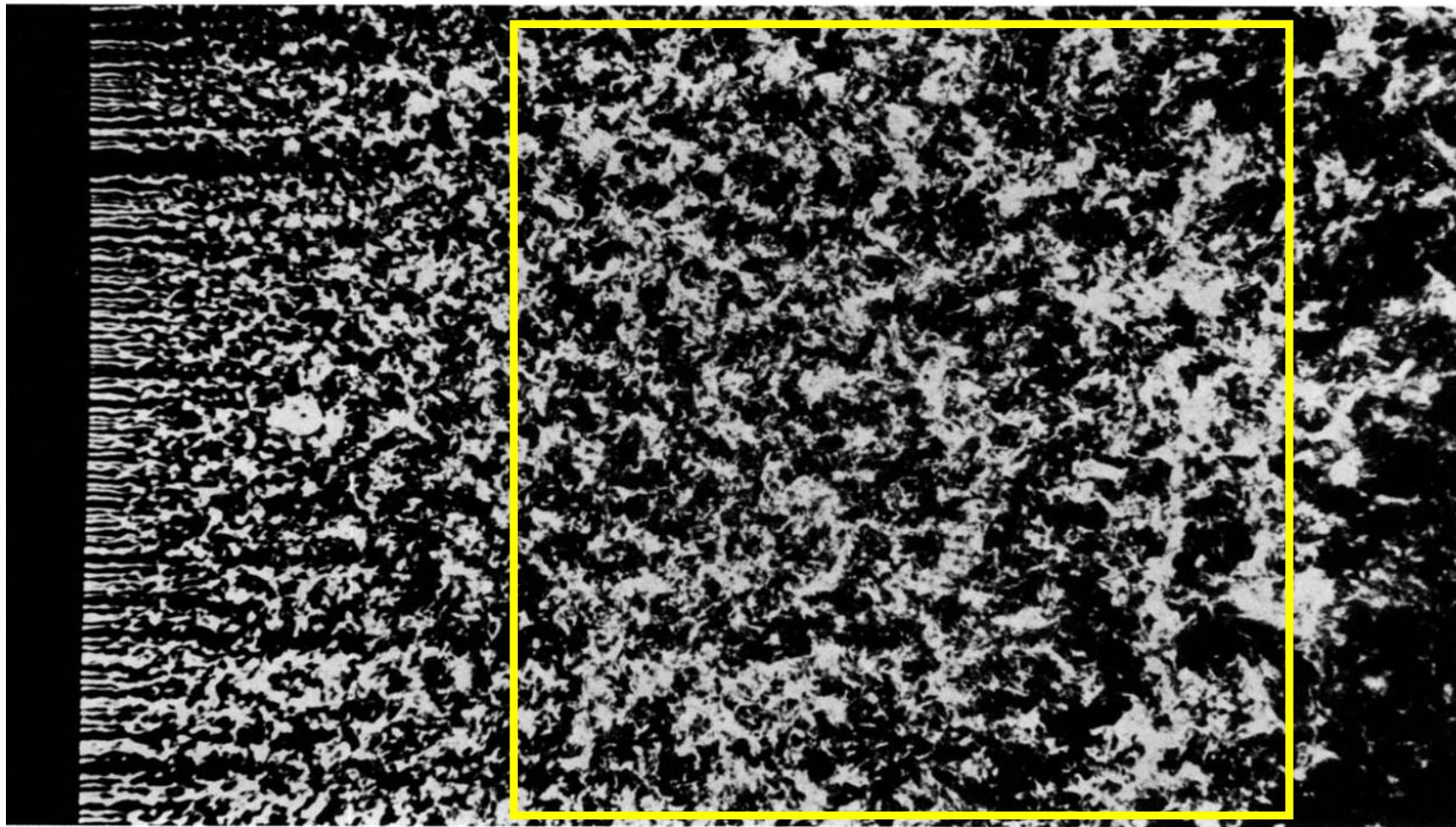
Длина
установления

152. Порождение турбулентности решеткой. Дымовые проволочки демонстрируют прохождение однородного ламинарного потока через пластинку толщиной 1/16 дюйма с квадратными перфорациями размером 3/4 дюйма. Число Рейнольдса, рас-

считанное по однойюймовому размеру ячейки решетки, равно 1500. Неустойчивость сдвиговых слоев приводит к развитию турбулентности вниз по потоку. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

Развитие турбулентности и "развитая турбулентность"

Однородная, изотропная турбулентность – излюбленный объект теоретических изысканий и прямого численного моделирования турбулентности (Direct Numerical Simulation)

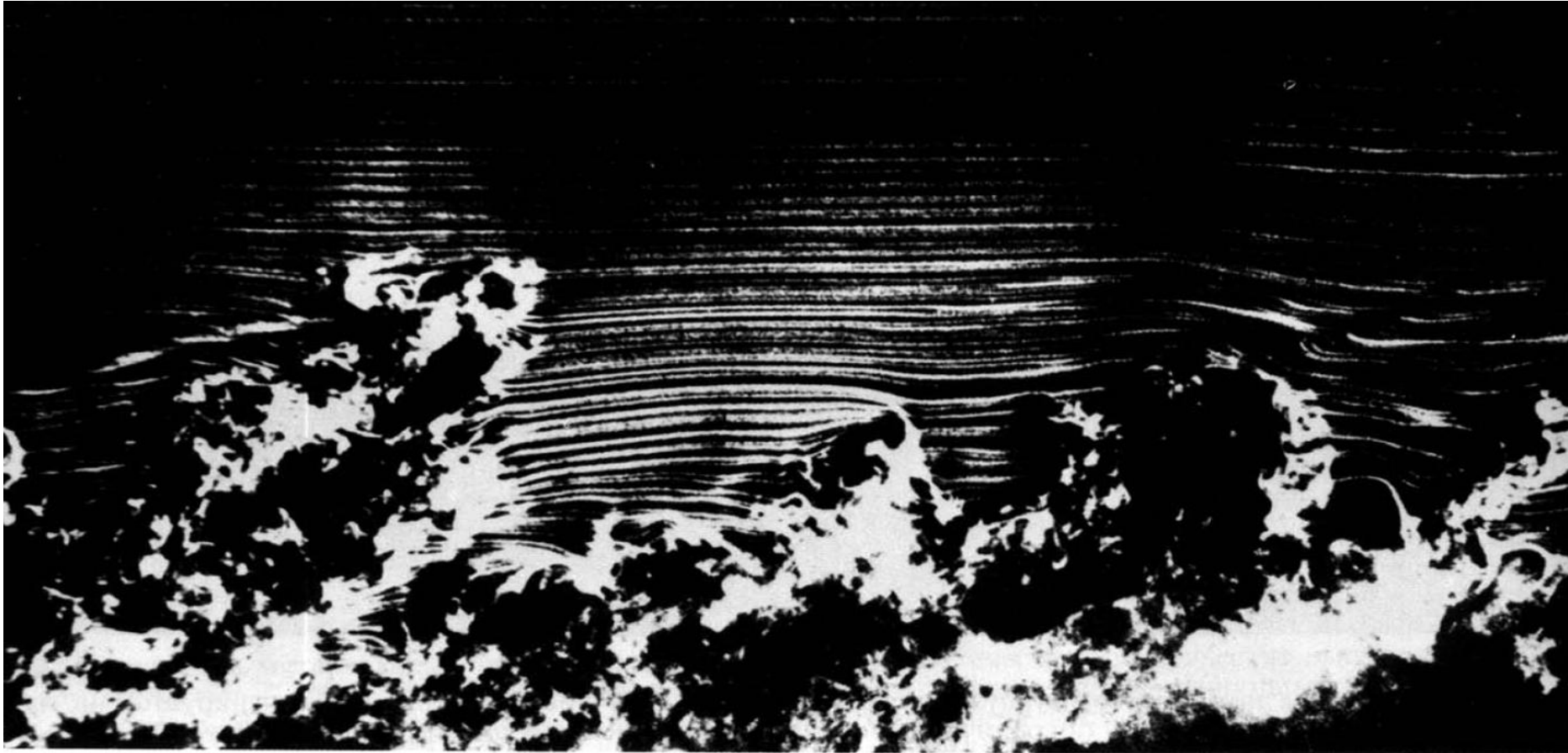


153. Однородная турбулентность за решеткой. За решеткой более частой, чем на предыдущем снимке, сливающиеся неустойчивые следы быстро образуют однородное поле. По мере затухания

вниз по потоку это поле становится полезным приближением идеализированной модели изотропной турбулентности. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

Локализованная и перемежающаяся турбулентность

Турбулентный погран. слой – камень преткновения LES моделей турбулентности – *неоднородная, неизотропная турбулентность*



157. Турбулентный пограничный слой, вид сбоку. Здесь турбулентный пограничный слой развивается естественным образом на плоской пластинке длиной 3,3 м, подвешенной в аэродинамической трубе. Линии меченых частиц, идущие от дымовой проволоки, поставленной вблизи острой перед-

ней кромки, освещаются вертикальным световым ножом. Число Рейнольдса, рассчитанное по толщине потери импульса, равно 3500. Хорошо видна перемежающаяся структура слоя в его внешней части. Фото Thomas Corke, Y. Guezennec, Hassan Nagib

Турбулентность: (ан)изотропия, (не)однородность

Пристеночная турбулентность, анизотропия структуры потока у стенки:

- Поток в круглой трубе и щели – $Re > 2300$... (неустойчивость, метастабильность при гладких стенках – до $Re = 50000$)
- Конвекция в большом объёме с простыми границами (плоские ...)

Свободная турбулентность (частично может быть однородной и изотропной):

- Вихревая дорожка за цилиндром – переходит в "турбулентный след" при росте скорости потока – взаимодействие вихрей, "спектр заполняется" ...;
- Затопленные струи; перемешивающие решётки ("много струй");
- Конвективные струи: термики, шлейфы (факелы) – аналогично ...;
- Конвекция Рэлея-Бенара (Р-Т неустойчивость) – "много термиков";

Развитие и вырождение турбулентности во времени и пространстве

Постепенность установления турб., в ряде случаев – "неразвитость" :

- постепенность при росте скорости потока, во времени и вдоль по потоку – "развитие" (примеры: струя, диффузор, ...);
- обычно и при сложных границах – «перемежаемость» (см. у Хинце);
- затухание при уменьшении источника энергии потока – "вырождение";

Практически все течения, рассматриваемые в статистической теории, относятся к развитой изотропной турбулентности. Отдельное рассмотрение – для пристеночной турбулентности.

Турбулентность – главное в гидродинамике турбулентного потока

- Как гидродинамическая неустойчивость турбулентность возникает “почти всегда” в теплообменных аппаратах АЭС, где силы в потоке достаточно велики для “срыва” ламинарного в турбулентный поток;
- Во многом определяет картину течения и характеристики потока;
- Влияет на перенос и приграничный обмен: импульс, энергия, масса;
- С трудом поддаётся количественному описанию, зависит от условий (границы, скорости в потоке, объёмные силы, ...);
- В вычислительной гидродинамике (ВГД: CFD) детали турбулентного потока в практически важных случаях не могут быть определены ;
- Всё вместе – потребовало *моделей* турбулентности, причём, нескольких (даже – многих);

Для проведения и понимания результатов гидродинамических расчётов необходимы знание и опыт работы с моделями турбулентности

Турбулентность – гидродинамическое (не микро-) явление. Её описание – в рамках МСС, причём – не детальное, модельное

- Полагается, что уравнения Навье-Стокса (УНС) описывают турбулентное течение вязкой жидкости ($s_{ik} \sim \nabla_i u_k$), **существует минимальный масштаб δ пульсаций в турбулентности и $\delta \gg \lambda$** , длины пробега молекул, то же – частота столкновений – нет необходимости уточнять или вводить новые уравнения (хотя линейность закона трения – слабое место УНС при сильной турбулентности ...)
- Предположение о выполнимости УНС позволяет также рассчитывать на успех применения **анализа размерностей**.
- Но УНС не могут быть решены аналитически, а только численно. Причём, решения могут не быть корректными по Адамару (существование аттрактора Лоренца: динамический хаос) – неточность растёт во времени.
- Современная CFD не способна в практически важных случаях разрешать масштаб δ (DNS: только исследовательские расчёты, малые Re, малые размеры области). Поэтому почти всегда –
- **Количественное описание турб. – лишь статистическое (усреднённое).** Гидродинамика турбулентности – это "Статистическая гидромеханика" и –
- Уравнения ГД дополняются уравнениями **моделей турбулентности**. Методология CFD модифицируется, включая эти модели, т.е. дополнительные уравнения. – Каковы они? – в теории и на практике ...?

Цели, задачи, план семестрового курса

- **Общая характеристика турбулентных течений** (ТТ), ориентированная на модели турбулентности (дополнение, но не дублирование лекций П.С.К.)
 - **Происхождение моделей Т.** – чтобы было понятно, с чем работает CFD
 - **CFD (computational fluid dynamics)** – что это такое? (Далее – в применении к слабосжимаемым ТТ – газодинамика не затрагивается)
 - **Сетка, сеточные примитивы** (ясное понимание простых вещей!)
 - **Базовые возможности, структура меню etc. CFD кода** (на примере FLUENT);
 - **Как решаются уравнения НС в CFD-кодах** – схема двух основных подходов;
 - **Граничные условия. Пристеночные функции** – как моделируется пристеночная турбулентность?
 - Особенности **свободно-конвективных течений**;
 - **Решение задач**: простые примеры турбулентных течений :
 - а)напорные (труба, обратная ступенька, труба с уступом и теплообменом)
 - б)свободно-конвективные (РБК, вертикальная стенка, ...)
-
- **Зачётная работа** – решение задачи кодом FLUENT

*Книга по математике начинается словами
"Мы знаем ..."*

И.Ильф, Записные книжки

Общие сведения о подходах

- **Уравнения гидродинамики**
- **Предположения при статистическом моделировании турбулентности**

Уравнения движения жидкости (для сжимаемой – и ур-е энергии)

- Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

- Ур-е движения – Навье-Стокса :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\mu_2 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u_j}_{\text{линейный з-н сопротивления, пост. вязкость}} + G_i$$

- **Несжимаемая жидкость:**

линейный з-н сопротивления, пост. вязкость

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + g_i$$

- Граничные условия ...

ρ – плотность, p – давление, u_i – компоненты скорости, g_i – плотность внешних сил, μ – динамическая вязкость, тензор напряжений: $\sigma_{ik} = -1/3 p \delta_{ik} + s_{ik}$

Замечание: интерпретация слагаемых общего балансного закона

В эйлеровой системе отсчёта – неподвижная система координат, «сетка» контрольных объёмов etc., «сквозь» которую движется сплошная среда – жидкость, твёрдое деформируемое тело, газ ...

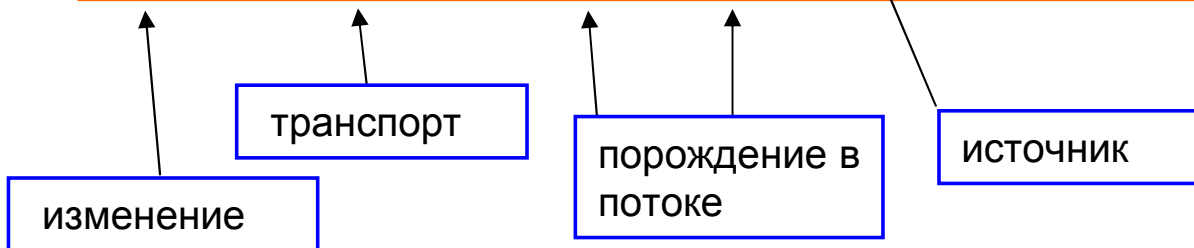
Примеры

- Уравнение неразрывности – баланс массы «в точке»

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

- Ур-е движения – Навье-Стокса – баланс импульса

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\mu_2 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u_j + G_i$$



Замечание. Уравнения – для ед. объёма, параметры состояния отнесены к ед. массы и везде умножены на плотность.

Почему "модель" турбулентности в детерминистическом описании?

- Что понимается под термином "модель" в описании турбулентного движения с помощью УНС и модели турбулентности? Это –

дополнительные предположения о турбулентном течении, позволяющие рассчитать его средние характеристики по УНС же, но с добавлением источниковых и др. слагаемых или иных "модельных" модификаций

- Задача разработки модели – задать вид модификации УНС, имеющей заданную точность, допускающей экспериментальную проверку; (вид уравнений, способ вычисления коэфф-тов и др.)

Существенно при построении большинства моделей турбулентности :

- Рассматривается установившееся течение – становление турбулентности во времени не рассматривается – структура потока в среднем неизменна (см. также "эргодичность" турб. потока ...)
- "Пространственная структура турбулентного потока" далее понимается в смысле структуры, средней *во времени* для каждой точке потока

Предположения всех статистических моделей турбулентности

Опыты с турбулентными течениями позволяют заключить, что –

- **Существует "среднее" течение** : в установившемся турб. течении нет полного хаоса – есть средние значения и (средние) отклонения от них;
- **Эргодичность** – для вычисления средних по результатам измерений

$$\langle \theta(x, t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, t_0) \omega(\theta) d\theta \quad \Leftrightarrow \quad \langle \theta(x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \theta(x, t + \tau) d\tau, \quad T \gg \tau_{correl}$$

- **Существуют min, max масштабы турбулентного течения** : пространственные масштабы ($\delta \ll R$) и масштабы времени t, T (масштаб усреднения) – δ и t можно установить по анализу пульсаций ... :

$$R \sim (\text{размер сечения}), \quad \delta \sim (v^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad t \sim \delta/u, \quad T \sim R/U$$

- **Квазипериодичность, существование "спектра пульсаций"** величины $f(x, t)$ $\Phi(k, t)$, $F(x, \omega)$ в турбулентном течении (существуют масштабы в пространстве и времени)

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, t) e^{ikx} dk, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$$

- **Замечание.** Спектр только приближённо непрерывен! – даже в **развитой турбулентности** с (псевдо)заполненным спектром пульсаций

Подходы к численному моделированию турбулентности

- **DNS – direct numerical simulation** – "безмодельное" численное решение УНС, свободное от предположений, но *удовлетворяющее физическим критериям пригодности расчётных сеток* и требованиям к качеству схем аппроксимации (важно, т.к. под "DNS" разные авторы могут понимать разные его реализации). Этот критерий в DNS – оценка мин. допустимого размера сетки: $N \sim Re^{9/4}$ (Фрик)
- **RANS – Reynolds averaged Navier-Stokes (1883)** – осреднение УНС (см.ниже);
Замечание: о различии между "**Усреднением**" (получение средних) и "**Осреднением**" (формулировка в терминах средних величин)
- **"Алгебраические модели"** – частный, простейший случай RANS;
- **LES – Large eddies simulation** (версии: **VLES, DES etc.**) – если осреднение Рейнольдса проводить с учётом распределения пульсаций по частотам, не включая те, что разрешаются сеточным разбиением, то получится заготовка для LES-модели. (Детали – см. обширную литературу ...)
- **"Transitional" модели** – расширения RANS для перемежающейся турбулен.

Нет универсальной и "точной" для всех случаев модели турбулентности

Схема построения RANS модели турбулентности

- **Reynolds Averaged Navier-Stokes** – Осреднение уравнения Навье-Стокса, сведение влияния турбулентности на движение (импульс) к источнику – тензорный объект r_{ik} . Аналогично – для уравнений переноса скаляра (температура, концентрация).
- **"Проблема замыкания"** – как определить компоненты тензора напряжений Рейнольдса r_{ik} ? – Предположения: простая и повсеместно используемая – **гипотеза Буссинеска** и её аналоги – введение "**турбулентной вязкости**". (Замечание – гипотеза Буссинеска и её недостатки разглядываются и критикуются уже десятки лет, но альтернативной работоспособной в CFD модели пока нет ...)
- **Как определить эту турб. вязкость?** (А) "Алгебраически". (Б) Ввести для неё **ещё уравнение**. Выражается через турбулентную кин. энергию – характеристику потока: Уравнение для ТКЭ. Ещё – диссипация ТКЭ. Уравнение для диссипации ТКЭ: $\mu_T \sim \rho k^2/\varepsilon \sim \rho k/\omega$ – относительно короткое "**замыкание**" модели.
- В итоге – семейство **двухпараметрических RANS моделей**: k-ε, k-ω и др.

Этим ограничивается введение в CFD модели турбулентности (основанные на RANS). К этому далее – важные факты из теории и практики CFD на примерах решения типовых задач. Остальное – см. в литературе.

*Всё встряхни, пригладь, оправь,
Ни морщинки не оставь ...*

(Стихотворение из детства)

RANS-модели – Reynolds averaged Navier-Stokes

Рейнольдсово осреднение транспортных уравнений: импульса, энергии, концентрации

**Вместо сложного решения более простых уравнений N.-S.
получим простое решение более сложных уравнений RANS**

Замечание. Рассмотрение – для режимов слабой сжимаемости.

В других случаях – осреднение по Фавру – для энергии, температуры, скорости, берутся несколько другие определения средних величин, чем для давления и плотности. Результат – тот же ...

Зачем нужны осреднённые уравнения, RANS etc.?

- Возможные способы решения практической задачи гидродинамики:

(1) Получение (численно) решения в деталях (*пример*) и его усреднение (по пространству, по времени), т.к. обычно нужно не $\sim 10^{12}$ чисел, а несколько интегралов и пространственных/временных зависимостей.

– Возможно **только в простейших случаях**, представляющих "академический интерес" как тестовые примеры или способ исследования турбулентности (т.е., таких решений УНС). Тем не менее – может быть поставлено целью ...

(2) Получение сразу осреднённого решения – этого обычно достаточно.

Но – Решения какого уравнения? И – Все ли нужные детали учтены ?

Это достигается посредством построения модели (статистической) –

- Таким образом: вместо "усреднения" – "осреднение" – мелкие детали строения потока учтены "в среднем" в самом уравнении (r_{ik});

- Как проявляются эти детали, что остаётся при осреднении? – вопрос конкретный, решается "по месту" – с **многими моделями турбулентности**

Важнейшая роль – проверкам методики и получаемых результатов: "V&V" – "верификация и валидация" – что достойно отдельного обсуждения

Рейнольдсово осреднение: RANS_1

- **Случайная величина** в точке, $\theta(x,t)$: задана плотностью вероятности $\omega(\theta(x,t))$

- **Усреднение ("по ансамблю")** $\theta(x,t)$:

$$\theta^m \equiv \bar{\theta} \equiv \langle \theta(x,t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,t) \omega(\theta) d\theta$$

(операция получения среднего)

- **Правила усреднения**: действие оператора усреднения в разных случаях –

Дано: $a = \bar{a} + \alpha$, $b = \bar{b} + \beta$ $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = 0$ Имеем $\langle a \rangle = \langle \bar{a} + \alpha \rangle = \bar{a}$ и т.д.:

$$\langle \langle a \rangle \rangle = \langle \langle a \rangle + \alpha \rangle = \langle a \rangle \quad \langle c\alpha \rangle = c \langle \alpha \rangle \quad \langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle, \quad \langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle \alpha\beta \rangle$$

Предельный переход и дифференцирование:

$$\left\langle \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial t}, \quad \left\langle \frac{\partial a}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial x_k}$$

- **Двухточечное среднее функции**:

$$\langle f(\theta_1(x_1, t), \theta_2(x_2, t), t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t) \omega(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

- **2-точечный момент (корреляция)**:

$$M_{12} = \langle \theta_1 \theta_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1 \theta_2 \omega(\theta_1(x_1, t), \theta_2(x_2, t)) d\theta_1 d\theta_2$$

- **Центральный 2-момент**:

$$m_{12} = \langle (\theta_1 - \theta_1^m)(\theta_2 - \theta_2^m) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\theta_1 - \theta_1^m)(\theta_2 - \theta_2^m) \omega(\theta_1(x_1, t), \theta_2(x_2, t)) d\theta_1 d\theta_2$$

Рейнольдсово осреднение: RANS_2

- Средние и пульсационные составляющие:

$$u_i = \langle u_i \rangle + v_i = U_i + v_i, \quad p = \langle p \rangle + \beta = P + \beta, \quad \rho = \langle \rho \rangle + \gamma, \quad G_i = g_i + f_i$$

- Осреднение уравнения неразрывности (слагаемое с γ – мало ...)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial(\langle \rho \rangle U_i + \gamma U_i + \langle \rho \rangle v_i + \gamma v_i)}{\partial x_i} \right\rangle = \\ &= \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial x_i} + \left\langle \frac{\partial \gamma U_i}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \langle \rho \rangle v_i}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma v_i}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

- Осреднение уравнения импульса – подстановка :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)(U_k + v_k)}{\partial x_k} &= \\ = -\frac{\partial(P + \beta)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (U_i + v_i) + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial(U_j + v_j)}{\partial x_j} + g_i + f_i \end{aligned}$$

Рейнольдсово осреднение: RANS_3

раскладывается:

$$u_i = \langle u_i \rangle + v_i = U_i + v_i, \quad p = \langle p \rangle + \beta = P + \beta, \quad \rho = \langle \rho \rangle + \gamma, \quad G_i = g_i + f_i$$

• Осреднение уравнения импульса – правая часть:

$$\left\langle -\frac{\partial(P + \beta)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (U_i + v_i) + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial(U_j + v_j)}{\partial x_j} + g_i + f_i \right\rangle =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + g_i$$

• Осреднение уравнения импульса – левая часть:

$$\left\langle \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)(U_k + v_k)}{\partial x_k} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i U_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \gamma v_k \rangle U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle U_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \gamma v_i v_k \rangle}{\partial x_k}$$

• Порядок величины пульсаций плотности

связанных с пульсациями *давления*:

$$\frac{\gamma}{\langle \rho \rangle} \sim \frac{\beta}{\langle p \rangle} \sim \frac{\beta}{\langle \rho \rangle c^2} \sim \frac{\langle \rho \rangle v^2}{\langle \rho \rangle c^2} = \frac{v^2}{c^2} = \eta^2 \frac{U^2}{c^2}, \quad \eta = v/U$$

Порядок величины турбулентных слагаемых с пульсацией плотности ?

Рейнольдсово осреднение: RANS_4

- Пять слагаемых с пульсациями, только в одно **не** входит $\gamma \sim \rho \eta^2 (U^2/c^2)$:

$$\frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle}{\partial t}, \frac{\partial \langle \gamma v_k \rangle U_i}{\partial x_k}, \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle U_k}{\partial x_k}, \frac{\partial \langle \gamma v_i v_k \rangle}{\partial x_k}, \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k}$$

- **Интенсивность турбулентности** – по определению: $\eta = \nu/U$. Обычно $\eta < 0,1$, т.е. $\gamma \ll \rho$ при $M < 1$, и существенно только одно слагаемое из этих пяти.

- **Уравнение Рейнольдса (RANS):**

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i U_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} + g_i$$

- **Далее будет говориться в основном о несжимаемой жидкости:**

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i U_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} + g_i \equiv - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial r_{ik}}{\partial x_k} + g_i$$

- **Тензор напряжений Рейнольдса (ТНР):**
(корреляции компонент пульсаций скорости)

$$r_{ik} = - \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle$$

Резюме – что получено?

Напомним последовательность предпосылок и действий. Сказано, что :

- Уравнение Навье-Стокса описывает всю гидродинамику ньютоновской жидкости, включая детали турбулентного течения;
- Турбулентность допускает описание в среднем, и средние параметры как правило интересны;
- Не надо получать средние значения из точных решений, надо получить уравнение для средних значений.

В результате осреднения получено уравнение RANS:

- “Reynolds averaged Navier-Stokes” отличается от Navier-Stokes дополнительным слагаемым, в котором, надо полагать, и содержатся особенности, связанные с турбулентностью – всё у нас готово?
- Нет, новые слагаемые неизвестны, это – **макет модели** турбулентности. Необходимо её «**замыкание**» – выражения для компонент ТНР;
- Действуя далее в этом направлении, следует осреднить и уравнения переноса других величин – их отличия от исходного уравнения будут интерпретированы так же – как слагаемые, описывающие турб. эффект. Проблема замыкания стоит и для этих осреднённых уравнений.
- «Замыкающие соотношения» получены из аналогий и анализа, на которые полезно взглянуть ...

RANS и другие уравнения: проблема замыкания модели осреднения

- Нужны выражения для компонент ТНР (тензор напряжений Рейнольдса) – и это уже за пределами формализма.
- Естественно разложить тензор напряжений на шаровую и девиаторную составляющие: турбулентные «давление» и «касательные напряжения»:

$$-\langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle = r_{ik} = \frac{1}{3} r_{jj} \delta_{ik} + \left(-\frac{1}{3} r_{jj} \delta_{ik} + r_{ik} \right) \equiv -\frac{1}{3} \langle \rho \rangle 2\kappa \delta_{ik} + \tau_{ik}, \quad \kappa = \frac{1}{2} r_{ik} = \frac{1}{2} \langle v_i v_i \rangle$$

«Давление» - это и турбулентная кинетич. энергия, о ней позже. Касательные напряжения в ламинарном потоке ответственны за вязкое трение, откуда –

- Простая формально и прозрачная физически : гипотеза Буссинеска (1877г., до Рейнольдса) о турбулентной вязкости:

$$\tau_{ik} = 2\mu_{ij}^T \dot{e}_{jk} \rightarrow = \mu \dot{e}_{jk}$$

У Буссинеска μ_T не зависело от коорд., что неправильно, т.к. это не вязкость. Как правило (в приложениях) ТВ – скалярная функция координат: $\mu_T(x)$. С формальной точки зрения – ТВ должна быть тензором 4-го ранга $\mu_{ijkl}(x)$. В обобщениях теории ТВ берётся тензором 2-го ранга ... Итак –

Надо найти функцию $\mu_T(x)$ (в обобщениях – компоненты тензора $\mu_{ik}(x)$...). К ней же можно свести и определение турбулентного переноса других величин.

Осреднение уравнений конвективной диффузии: тепло и концентрация _1

- Энтальпия (теплосодержание):

$$h(T) = H / \rho = \int_{T_{REF}}^T \rho C(T) dT \equiv \rho C(T_M)(T - T_{REF})$$

- Средние и пульсационные составляющие:

$$u_i = U_i + v_i, \quad T = \langle T \rangle + \theta$$

- Уравнение для энтальпии – осреднение:

$$\left\langle \frac{\partial \rho C(\langle T \rangle + \theta)}{\partial t} + \frac{\partial \rho C(U_k + v_k)(\langle T \rangle + \theta)}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \frac{\partial (\langle T \rangle + \theta)}{\partial x_i} + S_H \right\rangle$$

- Слабая зависимость $C(T)$ от температуры на итерации – ур-е для T :

$$\rho C_m \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle T \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_k \theta \rangle}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} + S_H$$

- Уравнение для концентрации (парциальной плотности):

– транспорт и диффузия:

(FLUENT – ур-е для $\rho \langle \alpha \rangle$)

$\langle \alpha \rangle$ – массовая доля)

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle \alpha \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_k \alpha \rangle}{\partial x_k} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial x_i} D \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x_i} + S_\alpha$$

Осреднение уравнений конвективной диффузии: тепло и концентрация _2

- **Замыкание уравнения транспорта скаляра** – по аналогии с гипотезой Буссинеска предполагается пропорциональность дополнительного потока тепла градиенту температуры или масс. доли (аналог переноса импульса):

$$\langle v_k \theta \rangle = \frac{\lambda_T}{\rho C} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} = \kappa_T \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i}$$

где λ_T = турбулентный коэфф. теплопроводности,
 κ_T – коэфф. температуропроводности

- Вводятся турбулентные аналоги **чисел Прандтля и Шмидта** :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} , \quad Sc = \frac{\nu}{D} \quad - \quad \text{известны ... Вводятся:}$$

$$Pr_T = \frac{\nu_T}{\kappa_T} , \quad Sc_T = \frac{\nu_T}{D_T}$$

- Кинетические коэффициенты вычисляются:

$$\kappa_T = \frac{\nu_T}{Pr_T} , \quad D_T = \frac{\nu_T}{Sc_T}$$

- Сами Pr_T и Sc_T – как в газе (подлежит проверке!) :

$$Pr_T \approx Sc_T = 0,7 - 0,85 - 0,9 - \dots$$

**Из турбулентной вязкости – все коэффициенты турбулентного переноса!
Следствие "аналогии Рейнольдса" – турбулентной «диффузии»**

Газокинетическая аналогия в турбулентной вязкости и т.п.

- **Длина пути смешения** – газокинетическая аналогия для турбулентной вязкости (в несж. жидкости) – "mixing length" (используется и в RANS-моделях ...)

Аналог – трение в газе (дрейф молекул и "дрейф пульсаций" – см. у Хинце):

$$\tau_{ik} = \mu_T \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\mu_T = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle v_{MIX} l_{MIX}$$

где l_{MIX} – "длина пути смешения" (пробега), v_{MIX} – средняя скорость движения пульсаций – газокинетический аналог гипотезы Буссинеска

- **Турбулентная кинетическая энергия (ТКЭ) коррелирует с v_{MIX}** :

$$\kappa = \frac{1}{2} \langle v_i v_i \rangle \approx v_{MIX}^2$$

$$\mu_T \sim \langle \rho \rangle \kappa^{1/2} l_{MIX}$$

– эксперименты показывают, что пульсации v_i и v_k имеют один порядок ... Несмотря на поверхностность газокинетической аналогии, она даёт полезную феноменологию – соотношение между величинами κ , μ_T и введённой l_{MIX} .

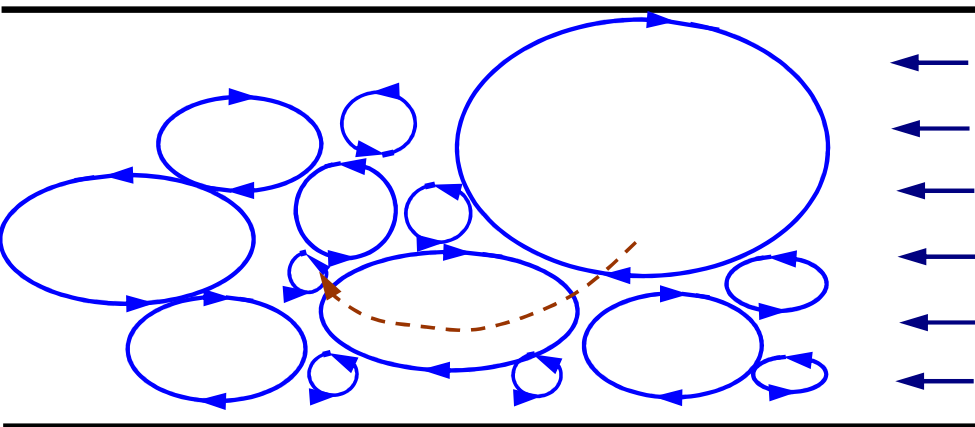
Уравнение для κ выводится. Для замыкания потребуется связь с l_{MIX}

- Масштаб скорости: т.н. "скорость трения" (u_{FR}):
(используется для обезразмеривания)

$$u_{FR} = \left(\frac{\tau}{\langle \rho \rangle} \right)^{1/2} \approx v_{MIX}$$

Классификация RANS-моделей

- Алгебраические модели (непосредственное введение турб. вязкости)
исторически – первые, использовали понятие длины пути смешения (Прандтль)
- Модели, основанные на уравнении для кин. энергии турбулентности: ТКЭ
 - **1-параметрические** – одно уравнение в част. производных (ЧДУ)
В качестве неизвестного параметра – ТКЭ или турб. вязкость, остальное – в настроечных константах модели;
 - **2-параметрические (и более)** – два ЧДУ (и к ним – дополнительные) :
 - 2 : Параметры: ТКЭ и её диссипация, феноменологически связанные с l_{MIX}
 - Дополнительно могут быть: перемежаемость и др. (transitional модели)
 - **RSM модели** – аппроксимация каждой компоненты ТНР. Линейная или нелинейная по скорости деформаций (при этом но теплопроводность и диффузия обычно описываются через скалярные коэффициенты).



Каскадная передача энергии

...
 Вот пес без хвоста,
 Который за шиворот треплет кота,
 Который пугает и ловит синицу,
 ...
 Которая в темном чулане хранится в доме,
 Который построил Джек.

The House that Jack built, Пересказ С.Я.Маршака

RANS модели, основанные на уравнении для турбулентной кинетической энергии (ТКЭ)

0. ТКЭ и её диссипация: их существование и роль.

1. Уравнение для ТКЭ – **вывод** уравнения:

$\langle \text{уравнение для } K \rangle$ – уравнение для $\langle K \rangle$ = уравнение для $\langle k \rangle$

2. Уравнения для *диссипации* ТКЭ – **ввод** уравнения ...

3. Двухпараметрические модели турбулентности k - ε и k - ω

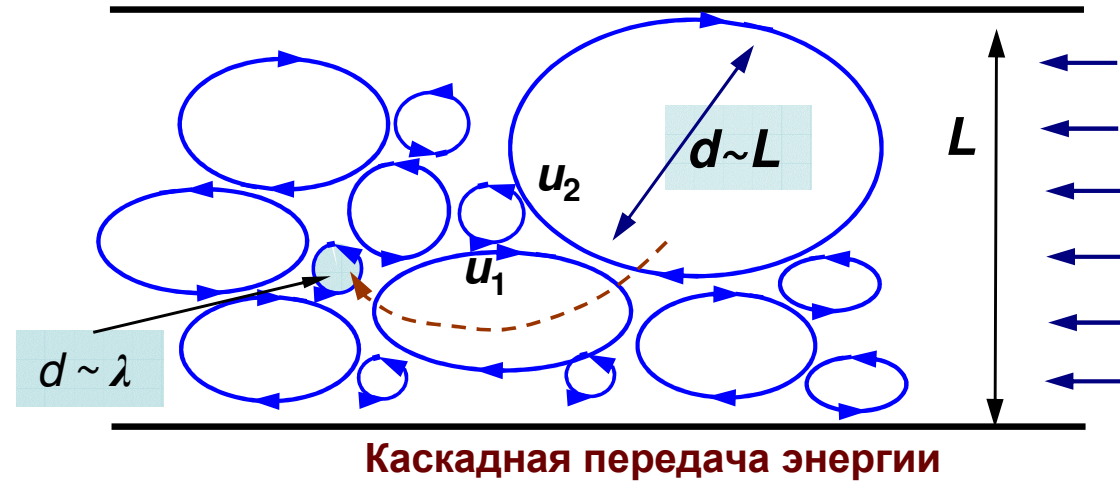
Отступление: структура турбулентности и турб. кин. энергия потока

- Чем выделена турбулентная кин. энергия в общей энергии движения?
- Формально (и на этом основана процедура вывода уравнения) ТКЭ выделена как *средняя* кин. энергия – Как это связано с турбулентностью?
- Для уточнения приведём некоторые основные представления о ТТ
- ТТ является следствием неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в потоке – трение искажает линии тока, и оно не может тормозить развитие неустойчивости – образуются вихри. Вихрь сохраняет свой момент импульса и в определённых пределах это *устойчивый элемент структуры потока*.
- На краях больших вихрей образуются меньшие вихри, они порождают ещё меньшие. Образуется «каскад» вихрей, возникающих и распадающихся. Распределение их средних размеров характеризуется "спектром": зависимостью количества вихрей от их размеров или энергии от волнового числа вихря.
- Энергия поступает извне – «*подпитка*» турбулентности. В стационарном потоке вся подпитка диссипирует – переходит в тепло. Этот переход в турб. потоке – путём передачи кин. энергии от больших к меньшим вихрям – "*каскад*", и *диссипации* ε вследствие трения. Диссипация – в малых вихрях, которые не порождают меньших.
- Таким образом –
- Значительная часть энергии движения потока существует в виде вихрей;
- Вихревое движение необратимо и тем выделено. Его энергия – это ТКЭ.

Структура турбулентности, масштабы, трансформация ТКЭ

• Каскад Ричардсона и существование конечного микромасштаба турбулентности

Большие вихри порождают малые и, как в шестернях, линейная скорость $|u|$ конечна. Трение на границе вихря порождает новый. Вязкие потери в объеме вихря $\sim V/A \sim 1/d$. Сила трения: $|F_{fr}| \sim \mu |u_1|/d$, $|u_1| \sim |u_2|$. При $d \rightarrow 0$ трение неограниченно растёт, вихрь затухает, не успев разогнаться, и масштаб λ конечен, он не может быть $=0$.



Большие вихри передают энергию меньшим в "каскаде" почти без диссипации

• Формально пространственные масштабы есть в преобразовании Фурье, это обратное волновое число k . (Но турбулентный поток не состоит из Фурье-гармоник ...). Спектральная плотность энергии состоит из трёх слагаемых, и в стационарном потоке:

$$F(k) = D(k) - E(k) \quad (\text{см. [П.Г.Фрик]})$$

Приток энергии извне F тратится на диссипацию D , но в разных диапазонах масштабов пульсаций: $F(k)=0$ при больших k и $D(k)=0$ при малых k (см. графики –).

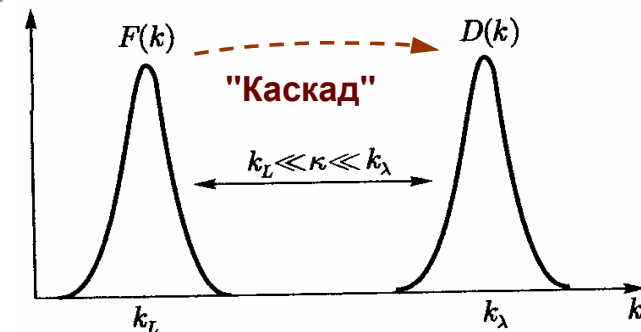


График функции $E(k)$ соответствует $F(k)$ и $D(k)$ согласно уравнению баланса

(Напомним, что через k обозначается также ТКЭ на ед. массы)

Структура турбулентности формирует требования к моделированию

Феноменология трансформации ТКЭ в потоке позволяет сделать выводы, существенные для разработки и применения моделей турбулентности:

- Для анализа динамики турбулентного потока *ТКЭ* и её *диссипация* важны не только как формальные параметры модели, но и как физические величины;
- *Наличие структуры турбулентности* тоже важно, т.к. каскадная передача энергии движения определяет процесс диссипации энергии, вкачиваемой в поток;
- То, что диссипация ТКЭ происходит на самых малых масштабах, определяет *требования к прямому моделированию (DNS)* – до микромасштаба, т.к. диссипация ТКЭ – "обратная сторона" притока энергии – обе важны для динамики;
- *В переносе* (примесей, температуры, ...) микромасштаб, вероятно, не так важен, т.к. перенос вихрями не диффузионный, а "прыжковый": от вихря к вихрю;
- Но *применимость моделей типа LES* ограничена только частью инерционного интервала. LES может быть полезно в моделировании переноса свободной турбулентностью (нужны ещё критерии применимости), но диссипативный интервал не захватывает, в частности – некорректно у стенок в погранслое. Это соответствует многолетней практике применения LES: атмосферные потоки – возможно ..., но часто – "failed" при развитой турбулентности в теплообменных аппаратах;
- Единственная пока возможность для техники – (полу)эмпирические RANS модели;

(Интересный вопрос – почему очень грубые RANS модели неплохо работают?)

Структура турбулентности и пространственные масштабы

- Турбулентный поток – в одной области пространства, но в *пространстве скоростей* выделяют три интервала, на которых происходят *подпитка*, *каскадная* передача энергии от больших к меньшим вихрям и *диссипация*.
- **Пространственные масштабы (размеры вихрей)** коррелируют с процессами в турбулентном потоке. Выделяют *интервалы* масштабов (см. у П.Фрика):
 - **внешний** L : масштаб сечения потока, на котором действует сила в потоке
 - **инерционный** l_T : на котором происходит каскадная передача движения
 - **диссипативный** λ : *микромасштаб, колмогоровская длина*, на котором в основном происходит диссипация (ε – запомним) энергии движения.
- В развитой турбулентности: $\lambda \ll l_T \ll L$ – инерционный интервал «широкий» (Масштаб l_T при осреднении соответствует и некоторым другим определениям ...)
- **Классификация пространственного разрешения моделей турбулентности:**
 - **RANS**: масштаб сечения потока $\sim L$, на котором "закачка энергии" в поток;
 - **LES**: до масштаба $l_T < L$ и $l_T \ll L$, но при развитой турбулентности $l_T \gg \lambda$;
 - **DNS**: до *микромасштаба* λ – все неоднородности типа вихрей в потоке.

Размерные оценки в мелкомасштабной турбулентности (см. [Фрик])

Предположения теории Колмогорова и анализ размерностей. Масштабы: $\lambda, l \ll L$

- Статист. свойства на масштабах $l \ll L$ не зависят от способа возбуждения турбулентности и определяются: скоростью диссипации ε , кинематической вязкостью ν и длиной l .
- Статист. свойства в *инерционном* интервале $\lambda \ll l \ll L$ универсальны и зависят только от скорости диссипации энергии ε и масштаба l (не зависят от вязкости);
- **Скорость диссипации энергии** ε для данного течения в любой момент времени и в любой точке пространства **одна** и та же. Величина ε определяется энергией, вводимой в поток за ед. времени на единицу массы, передаваемой *до диссипативных масштабов* (замечание – здесь не учитываются флуктуации ε , связанные с перемежаемостью – см. у П.Фрика);

Пользуясь этими гипотезами, можно составить размерные комбинации между немногими характеристиками турбулентности, которые остаются в предположении универсальности.

- **Закон Колмогорова-Обухова для пульсаций скорости** δu_l – одна безразмерная комбинация существенных в инерционном интервале величин $\delta u_l, \varepsilon, l$:

$$\delta u_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$$

- **Энергетический спектр изотропной турбулентности** (з-н Колмогорова, з-н «пяти третей») Энергия в инерционном интервале зависит от пульсаций скорости (ТКЭ) и диссипации:

$$E(k) \sim C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

Размерные оценки и возможности уточнённых подходов

- Оценка микромасштаба турбулентности λ . Исходя из 1-го предположения, этот масштаб может зависеть только от ε и вязкости ν . Подбором размерности –

$$\lambda \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \quad \text{– это т.н. "колмогоровский масштаб"}$$

- Оценка через макропараметры L , среднюю скорость U , и число Рейнольдса $R=Re$:

$$\lambda \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \sim (\nu^3 L / U^3)^{1/4} \sim (\nu^3 L^4 / U^3 L^3)^{1/4} \sim LR^{-3/4}$$

- Если оценить количество возбуждённых степеней свободы в потоке как $(L/\lambda)^3$ (в каждой точке возможен микровихрь), то оценка минимального размера кубической сетки для прямого моделирования (DNS) всей структуры турбулентного потока:

$$N \sim (L / LR^{-3/4})^3 \sim R^{9/4} \quad \text{– что при } R=Re \sim 10^4 \text{ даёт } N \sim 10^9 .$$

Таким образом, DNS как универсальный метод анализа турбулентных течений, видимо, никогда не войдёт в инженерную практику – область применения (числа Re) ограничена, издержки нереально велики, как и требования к квалификации (к достоверности расчёта).

DNS в *научных исследованиях* применяется уже давно как заменитель эксперимента: для вычисления неизмеримых величин в турбулентности, влияния частиц и др.

LES частично описывает структуру потока на масштабах $< L$, но *надо смотреть, нужно ли это*: в свободной турбулентности – полезно, но в теплообменных аппаратах границы потока существенны, точность LES в основном объёме часто избыточна, у границ же она недостаточна, и здесь всё равно используются RANS подходы – *каковы цена/качество?*

Резюме и введение: уравнение для ТКЭ в RANS-модели _1

- **Механическая (кинетическая) энергия турбулентного движения** – ключевое понятие. Её эволюция в потоке – каскад Ричардсона и механизм диссипации – то немногое, что наглядно в ТТ. Кин. энергия пульсационного движения может быть выделена аналогично теплу –
- **Необратимость перехода энергии поступательного движения в мелкомасштабное вращательное и тепло: порождение ТКЭ, её диссипация.** Ещё более наглядный показатель необратимости (но не энергетический) –
- **Интеграл от завихрённости – энстрофия** (получается из уравнения для КЭ) – «пульсационный» аналог энтропии в малом объёме V :

$$\Omega(V(x)) = \frac{1}{2} \int_V |\text{rot } \vec{u}|^2 dV$$

$$\Omega(k) \sim k^2 E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{1/3} \quad (\kappa \text{ – волновое число!})$$

Ω растёт от больших к малым вихрям, и дробление потока – энстрофия;

- В двухпараметрических RANS-моделях **ур-я генерации, транспорта и диссипации ТКЭ, т.е. величин k , ε или т.п. существенны для замыкания;**
- Уравнение для ТКЭ потока есть следствие уравнения движения. Кин. энергия формально учтена в полном уравнении энергии. Но средняя кин. энергия, т.е. ТКЭ – это отдельная характеристика. Она вычленяется из уравнения для полной энергии – см. далее.

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _2: план получения

В RANS-модели **уравнения для ТКЭ и диссипации ТКЭ** есть во всех 2-х параметрических моделях и их расширениях.

Получение уравнения для ТКЭ – последовательность :

- Полная, тепловая и кинетическая энергия потока: *кинетическая* (энергия макроскопического движения) и *внутренняя* (потенциальная+тепловая):

$$E = I + K = E_p + E_T + K$$

- **Изменение энергии** – транспорт, работа *внутренних* сил, представленных тензором напряжений σ_{ik} , внешние источники – приток тепла и работа внешних сил $=S_e$ ($\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}/3 + s_{ik}$):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u_k E}{\partial x_i} = -\frac{\partial u_k p}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i s_{ik}}{\partial x_k} + S_e$$

- Можно выделить уравнения: а) для энтальпии (тепло); б) для всей внутренней энергии; в) для *полной кинетической энергии (КЭ) потока*
- Вводится средняя КЭ (СКЭ), связанная со средней скоростью, и ТКЭ: КЭ пульсаций (как в RANS). Уравнение для КЭ разделяется на уравнения СКЭ и ТКЭ

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _3: полная КЭ

- Кинетическая энергия потока:

$$K = \frac{\rho u_k u_k}{2}$$

Тождество:

$$2\left(\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial \rho u_i u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_k \rho u_i u_i}{\partial x_k}\right) = 2u_i \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k u_i}{\partial x_k}\right)$$

- Уравнение для кинетической энергии может быть получено из уравнения импульса его свёрткой с вектором скорости

и подстановкой из того тождества :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial s_{ki}}{\partial x_k}$$

- Оно описывает всю кинетическую энергию потока. Подставим определяющее соотношение для тензора вязких напряжений:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_k p}{\partial x_k} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right)$$

- Для несжимаемой жидкости уравнение полной КЭ примет вид –

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_k p}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _4: КЭ пульсаций

- Уравнение для к.э. среднего движения – так же: свёртка RANS с U_i :

(вязкость постоянна)

$$\frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} = - \frac{\partial P U_i}{\partial x_i} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}$$

Вычтем из ур-я для полной КЭ, остаток будет описывать эволюцию ТКЭ

- Аппроксимация слагаемых: введём пульсационные составляющие:

$$u_i = U_i + v_i, \quad p = P + \beta, \quad K = \langle K \rangle + \kappa$$

- Осреднение уравнения полной кинетической энергии K :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho (U_k + v_k) (U_k + v_k) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \rho (U_k + v_k) (U_i + v_i) (U_i + v_i) \right\rangle = \\ & = \left\langle - \frac{\partial (U_k + v_k) (P + \beta)}{\partial x_k} + \mu (U_i + v_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial (U_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (U_k + v_k)}{\partial x_i} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

- K становится *средней* кинетической турбулентной энергией.

• Преобразование левой части:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho (U_k + v_k)(U_k + v_k) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \rho (U_k + v_k)(U_i + v_i)(U_i + v_i) \right\rangle = \\
 & = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\rho}{2} \langle U_k U_k \rangle + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\rho}{2} \langle v_k v_k \rangle + \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\rho}{2} (U_k U_i U_i + v_k v_i v_i + U_k v_i v_i + 2v_k v_i U_i) \right\rangle = \\
 & = \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \rho U_k U_i U_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho U_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho v_k v_i U_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\
 & = \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \left(\frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k \rho k}{\partial x_k} + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle \right)
 \end{aligned}$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _6: осреднение

- Преобразование правой части (полагаем вязкость постоянной):

$$\begin{aligned}
 & \left\langle -\frac{\partial(U_k + v_k)(P + \beta)}{\partial x_k} + \mu(U_i + v_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(U_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(U_k + v_k)}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle + \mu U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \mu \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle = \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i v_i}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_k}
 \end{aligned}$$

- Здесь учтено, что

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _7: отделение ТКЭ

- После преобразования – осреднённое уравнение для всей к.э. $K = \langle K \rangle + k$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial U_k \rho k}{\partial x_k} + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\ & = - \frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \end{aligned}$$

- Вычитаем из него почленно уравнение для средней к.э. потока $\langle K \rangle$:

$$\frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} = - \frac{\partial P U_i}{\partial x_i} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}$$

- Получим "осреднённое уравнение" или "уравнение для средней" ТКЭ:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial U_k \rho k}{\partial x_k} - U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\rho}{2} \left\langle \frac{\partial v_k v_i v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\ & = - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _8: преобразование

- С учётом соотношения (r_{ik} – тензор напряжений Рейнольдса):

$$-U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} + \left\langle \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle -U_i \frac{\partial \rho v_k v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \rho v_k v_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\rangle = - \left\langle r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\rangle$$

- Получим уравнение для турбулентной кин. энергии κ :

$$\frac{\partial \rho \kappa}{\partial t} + \frac{\partial U_k \rho \kappa}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left(\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} - \frac{\rho}{2} \left\langle \frac{\partial v_k v_i v_i}{\partial x_k} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle \right)$$

- или

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \kappa}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \langle \rho v_k v_i v_i \rangle - \langle v_k \beta \rangle \right)$$

изменение

порождение
поток

молекулярная
"диффузия"

"диффузия"

транспорт

диссипация в
потоке

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _9: интерпретация

- **Физическая интерпретация и преобразование** «диффузионного» транспорта ТКЭ пульсациями: малость (DNS-расчёты) пульсаций давления β ; приведение к виду переноса ТКЭ потоком – и полагается пропорциональность градиенту :

$$\frac{1}{2}\langle \rho v_k v_i v_i \rangle + \langle v_k \beta \rangle \approx \frac{1}{2}\langle \rho v_k v_i v_i \rangle \approx \langle \rho v_k \rangle \frac{1}{2}\langle v_i v_i \rangle = \langle \rho v_k \rangle \kappa \equiv -\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_k}$$

- **Определим скорость диссипации ТКЭ ε :**

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \nu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle$$

- **Итак, уравнение для ТКЭ :**

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \kappa}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} \right)$$

изменение

порождение
потоком

"диффузия"

транспорт

диссипация

(ср. с осреднённым уравнением RANS)

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _10: резюме

Физический смысл достигнутого: "энергетическое" замыкание модели турб.

- Кин. энергия потока – неинтересна, если *точно* известны скорости. Но известны лишь средние, и ТКЭ – "мера турбулизации" – выступает на первый план в *осреднённом* описании. Уравнение для неё получено –
- **Выделение** энергии пульсаций из полной кинетической энергии: **ур-е ТКЭ**;
- **"Каскад"**: передача энергии движения от крупных к мелким вихрям, диссипация – генерация ТКЭ **к** за счёт подпитки извне, перекачка в мелкие вихри, **диссипация** ε ;

Это необходимые элементы описания в терминах энергии: (κ) k , ε (или ω)

- **"Скорость диссипации ТКЭ"**: ε и $\omega = \varepsilon/k$ (*относительная* скор. диссипации);
- k и ε (или ω) – функции координат: "пространство скоростей" в каждой точке (частице) потока, оно им формируется и переносится ...
- Интерпретация ω (А.Н.Колмогоров): это – сред. частота пульсаций, она связана с вихревым движением, ω^2 – средняя кин. энергия вихря.

Нужно ещё одно уравнение. Для скорости диссипации ТКЭ

- Физический смысл **скорости диссипации ТКЭ** понятен – есть генерация и транспорт ТКЭ – есть и переход в тепло (исчезновение) ТКЭ. Сток ТКЭ связан с ТКЭ, но не вполне определён – нужно ещё уравнение – какое?
- Уравнение, видимо, должно быть аналогичным уравнению для ТКЭ, т.е. –
- Ещё раз – из чего состоит уравнение транспорта потоком:

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \kappa}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_k}$$

изменение

транспорт

порождение потоком

диссипация

диффузия

Другие источники: плавучесть, ...

Формулировка дополнительного уравнения – определение оставшегося независимого параметра модели (диссипация) – это **две задачи**:

- 1) В предположении слабой зависимости развитой турбулентности от свойств жидкости – вывод соотношений между параметрами и –
- 2) Ещё уравнение транспортного типа для ε или ω .

Зная диссипацию ТКЭ получим и турб. вязкость – «замыкание»

- О получении выражения (уравнения) для диссипации ТКЭ и других : (Wilcox) ... “drastic surgery” ... – получаемых уравнений моментов etc.
- При получении выражений руководствуемся принципом:
... to avoid modeling the differential equations rather than the physics of turbulence... (см. с.105)

- Ранее было соотношение

$$\mu_T \sim \langle \rho \rangle \kappa^{1/2} l_{MIX}$$

- Есть уравнение для k и в него вошло ε . Анализ размерностей:

If both properties are assumed to be strictly functions of the turbulence independent of natural fluid properties such as molecular viscosity, then **purely dimensional arguments** [Taylor (1935)] show that

$$\mu_T \sim \kappa^2 / \varepsilon, \quad l_{MIX} \sim \kappa^{3/2} / \varepsilon$$

- И переходим к уравнению для ε : конвект. диффузия, источники ...
- Исторически сначала было предложено уравнение для **относительной скорости (мощности) диссипации ТКЭ – относительно k :**

$$\omega = \varepsilon / k$$

k - ω модель турбулентности

- **Уравнение для ω** (исторически 1-я модель Т. – А.Н.Колмогоров, 1941):

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} = -\xi \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \eta \mu_T \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

- получено «из общих соображений»; записано для ω , не для ω^2 (энстрофии); сток ε пропорционален ω^2 : замедление и исчезновение вращения в потоке;
- позже (Wilcox, ...) были добавлены *production term* и молекуляр. вязкость:

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} = \alpha \frac{\omega}{\kappa} r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \xi \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mu + \eta \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

- **порождение (production) ω от основного потока** – диссипация k растёт на малых масштабах – следствие каскадной передачи ТКЭ от больших вихрей
- **молекулярная вязкость** – для постановки гранич. условий у стенки в вязком подслое – где турбулентность нулевая
- **В таком виде – близко к стандартной модели k - ω**
- **Определение коэффициентов модели** – из расчётов модельных задач, DNS-расчётов – отдельная большая задача ...

- Система уравнений с выражениями для источников и коэффициентов:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k$$

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega}$$

G_k , G_ω – источник за счёт градиента средней скорости

Y – dissipation due to turbulence

S_ω , S_k – пользовательские источники

(см. Fluent manual ...)

$k - \varepsilon$ модель турбулентности – уравнение для ε ?

- **Уравнения:** The exact equation for ε is derived by **taking the following moment of the Navier-Stokes equation.**

$$\overline{2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathcal{N}(u_i)]} = 0$$

where $\mathcal{N}(u_i)$ is the Navier-Stokes operator defined in Equation (2.26).

- After a **considerable amount of algebra**, the following equation for ε results:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\mu \left[\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}} + \overline{u'_{k,i} u'_{k,j}} \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2\mu \overline{u'_k u'_{i,j}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \\ & - 2\mu \overline{u'_{i,k} u'_{i,m} u'_{k,m}} - 2\mu \nu \overline{u'_{i,km} u'_{i,km}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \mu \overline{u'_j u'_{i,m} u'_{i,m}} - 2\nu \overline{p'_{,m} u'_{j,m}} \right] \end{aligned}$$

- **Слагаемые:**
- **Production of Dissipation**
- **Dissipation of Dissipation**
- **and the sum of Molecular Diffusion of Dissipation and Turbulent Transport of Dissipation, respectively.**

These correlations are essentially impossible to measure with any degree of accuracy → “drastic surgery” ...

***k*-ε модель турбулентности в Fluent**

Система уравнений вместе с определениями источников и фиксированным набором коэффициентов – это «Standard *k* - ε model»

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon$$

k – здесь уже – ТКЭ;

G_k – источник за счёт градиента средней скорости;

G_b – источник за счёт архимедовых сил (важно для конвективных течений);

S_ε, **S_k** – пользовательские источники;

G_{2ε} и др. – коэффициенты ;

(см. FLUENT manual ...)

...
*Каким ты был, таким ты и остался,
Но ты мне дорог и такой ...*

М. Исаковский, И. Дунаевский, песня из к/ф
"Кубанские казаки"

RANS and CFD: истоки коммерческой вычислительной гидродинамики

Известны неточности RANS-моделей, что не отменяет подхода: CFD

(Wilcox):

1. **flows with sudden changes in mean strain rate;** (ступенька, диффузор ...)
2. **flow over curved surfaces;** (гибы)
3. **flow in ducts with secondary motions;** (канал прямоугольного сечения)
4. **flow in rotating and stratified fluids;** (вращающаяся труба, ...)
5. **three-dimensional flows;** (разные ...)
6. **flows with boundary-layer separation** (отрыв погран. слоя ...)
7. **затопленная осесимметричная струя** (отклонение от симметричности...)

Но – 2-параметрические RANS-модели – это:

“The working horses of the engineering calculations”

-
- **Вычислительная гидродинамика: Computational Fluid Dynamics – CFD**
 - **Первый коммерческий пакет на основе k-ε модели: Phoenix (70-е гг.)**
 - **Руководитель работ – B. Spalding: “The father of CFD”**

Origins

With the advent of fast, digital computers in the 1960s, it became possible to attempt the numerical solution of the **Navier-Stokes** equations, the governing equations of fluid dynamics.

In the early days, the general policy was to write **specific codes for specific tasks**, and universities, research laboratories and industry followed this trend.

The result was a **myriad of special-purpose codes**, with each code almost exclusively operated by the person, or group, who wrote it. Documentation was usually poor, and often non-existent. There was almost always one key, central person, who was the sole source of knowledge of the software.

In 1974, Prof. D. B. Spalding of Imperial College, London founded a spin-off company called **CHAM** (Concentration, Heat And Momentum). Initially, CHAM followed the general trend of special-purpose software, but in 1980 adopted a **single-code policy**, with a central, robust solver, and then concentrated on model development. This new code system, **PHOENICS**, could be regarded as the first, genuinely multi-purpose CFD code, and a model for those that followed.

Exploitation of the **commercial potential** of this concept also began.

For these reasons, Brian Spalding is often referred to as the “**Father of CFD**”



The new era of CFD: led by PHOENICS



Modular design: **central solver** **pre-processor (mesh generator)** **post-processor (graphical display of results)** and modules to link in, as needed for the application.

This strategy is now followed by all the main commercial CFD vendors.

What is CFD?

Universal adage of science and technology

Everyone believes an experiment...except the guy who ran it
And no one believes a calculation...except the guy who made it.

What actually is CFD?

And can it change these beliefs?

Various Definitions

Officially stands for...	Computational Fluid Dynamics	
Is accused of being...	Colourful Fluid Dynamics	
Is often (ab)used as...	Colours For Directors	
Or worse...	Colourful Fantasy Dreams	
Begins to be...	Credible Fluid Dynamics	
But is not always...	Cost-effective Fluid Dynamics	
Could add one more...	Commercial Fluid Dynamics	WHY?

CFD Software Packages

Commercial

FLUENT originally developed by Create Inc., USA, Sheffield Univ., UK and FDI, Chicago, USA
acquired by ANSYS Inc. in 2006

CFX originally developed by AEA Technology, Harwell, UK
acquired by ANSYS Inc. in 2003

STAR-CD } originally developed at Imperial College, London, then by Computational Dynamics Ltd,
STAR-CCM } marketed by the CD-ADAPCO group

PHOENICS originally developed at Imperial College, London, then by CHAM Ltd

Freeware

OpenFOAM originally developed at Imperial College, London, then by Nabla Ltd, but then made freely
available by OpenCFD in 2004. Unique feature: source code access (written in C++)

"Как сделать наши идеи ясными"

Название основополагающего труда Ч.Пирса,
основателя *прагматизма* в философии

Отступление: о сетках и сеточных примитивах

Структурные элементы конечно-разностной (контрольно-объёмной) или конечно-элементной модели расчётной области ([см. отд. файл](#))

1. Дано – система уравнений в частных производных на области Ω
2. Задана схема дискретизации – сведение ч.д.у. к системе алг. ур-ий
3. Область Ω разбивается на дискретные элементы (ячейки) – *сетка*.
Задание гран. условий, моделирование физически сложных задач etc.
требуют детализации сеточного разбиения и формирования минимальных представлений о сетках и методе дискретизации:
4. О методе контрольных объёмов в CFD.

(см. отдельный файл)

*Die erste Kolonne marschiert,
Die zweite Kolonne marschiert ...*

Л.Н. Толстой, Война и мир

Решение основной системы уравнений в CFD-коде

Сжимаемая жидкость, явная схема: density-based solver

- совместно решаются все ур-я, кроме турбулентности (и силовых)

Сжимаемая/несжимаемая – неявная: pressure-based solver –

В цикле по итерациям:

А. Уравнения потока (разные методы)

Б. Остальные уравнения:

- турбулентность
- энергия
- концентрация примеси
- etc.

В. Подстановки вычисленного в уравнения потока (турб. вязкость, ...)

– продолжение/выход из цикла

Уравнения движения (flow equations)

- Общая форма

- Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

- Уравнение Навье-Стокса (постоянная вязкость)

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\beta + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_j + G_i$$

- Несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$) **без источников массы:**

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + g_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

- Граничные условия ...

- Уравнения состояния ...

$$p = p(\rho), p = p(T, \rho), \dots$$

ρ – плотность, p – давление, u_i – компоненты скорости, g_i – плотность внешних сил, μ – динамическая вязкость, тензор напряжений: $\sigma_{ik} = -1/3 p \delta_{ik} + s_{ik}$

Решение уравнений движения в CFD-коде

• Решение для сжимаемой жидкости : плотность через давление подставляется из уравнения состояния, имеем четыре уравнения для 4-х неизвестных, давление входит во все. Решение системы: а)методом расщепления (поочерёдно, по уравнению) или б)совместно ...

• В случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{только скорость}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + G_i$$

– и давление, и скорость

• Вводится уравнение для давления – дивергенция уравнения движения,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + G_i \right) = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} G_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} G_i . \end{aligned}$$

– правая часть

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k}$$

– левая часть

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k}$$

– уравнение для давления

Решение уравнений движения несжимаемой жидкости

1. Метод расщепления (поочерёдное решение уравнений)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial^2 (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k}$$

– Уравнение для давления: решается

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + G_i$$

– Компоненты скорости – определяются

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

– в уравнение непрерывности – скорости подставляются, определяется отличие от $\text{div } \mathbf{u}=0$

Проблема – отличие $\neq 0$, скорости, определяемые из НС при вычисленном давлении, не удовлетворяют уравнению непрерывности (погрешность).

Решение – **коррекция** полученных скоростей – по ур-ю непрерывности вычисляются поправки к давлению, подставляются в ур-е НС, вычисляются скорости и т.д. Процедура называется **pressure-velocity coupling**.

Способы **pressure-velocity coupling**: **SIMPLE, SIMPLEC, PISO**, их версии

SIMPLE – Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations

PISO – Pressure Implicit with Splitting of Operators

2. Coupled solution – **не метод расщепления, а одновременное решение** уравнений неразрывности (или давления) и импульса в *одной системе* (4-кратного размера)

"Решатели" (solvers) уравнений движения

Density-based – только сжимаемая жидкость;

Решение уравнений движения – исключение плотности –
в Fluent – сопряжённое (coupled) решение 4-х уравнений

По времени:

- *явный* (система уравнений газодинамики) – условие Куранта !
- *неявный* (неявная схема интегрирования по времени)
- стационарный

Pressure-based – как несжимаемая, так и сжимаемая жидкость (малые скорости, большие давления)

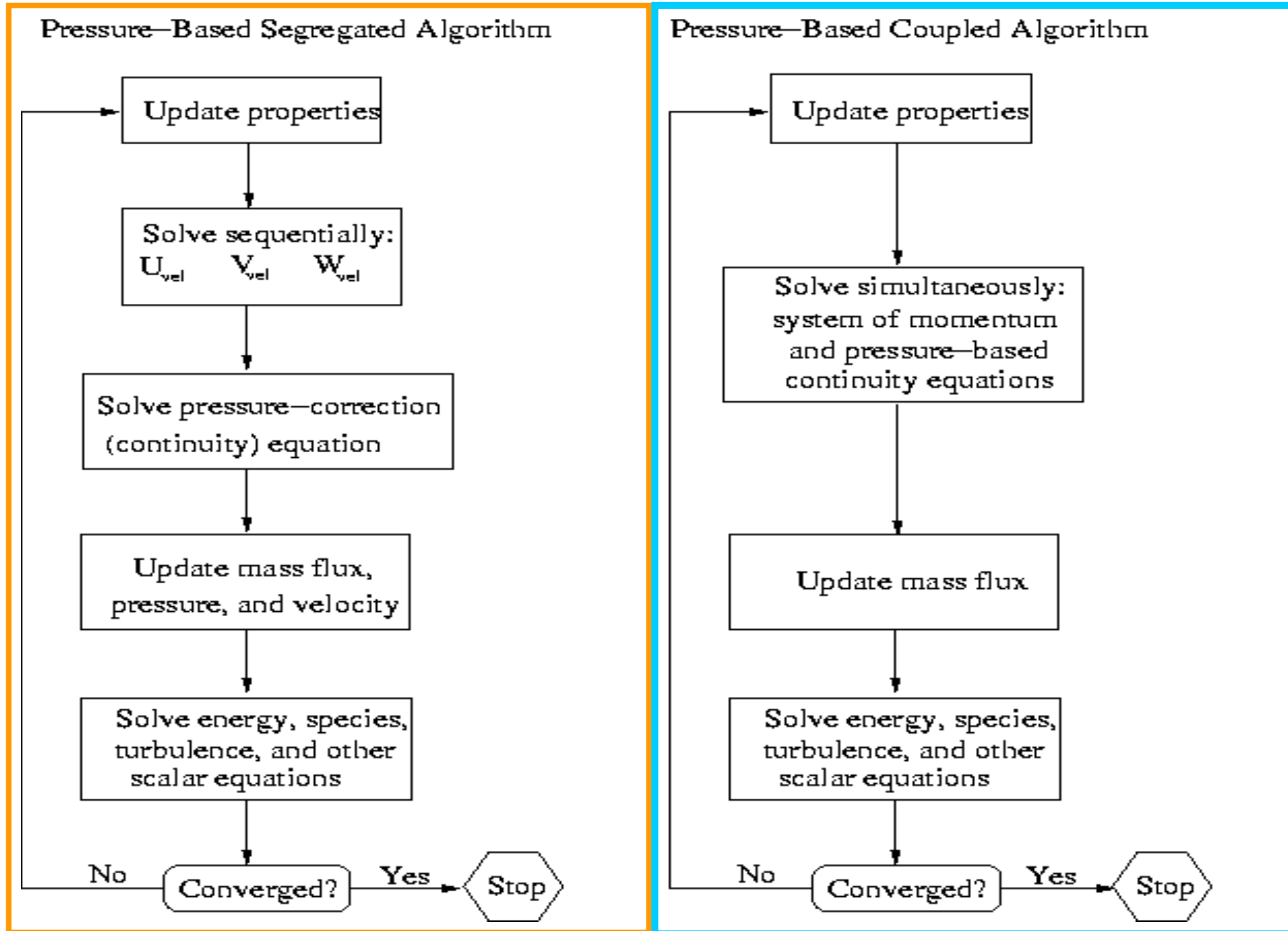
Решение уравнений движения – через уравнение давления:

- сопряжённый (coupled)
- расщепления (segregated)

По времени:

- всегда неявный
- (не)стационарный

Pressure-based алгоритм решения уравнений движения в Fluent



Внутренние и внешние итерации

- 1) итерации по давлению (внутренние) на каждой внешней итерации
- 2) внешняя итерация
- 3) шаги по времени в нестационарных задачах

(демонстрация итераций etc. – в расчёте – опция **verbose=2**)

На что в основном тратится время в расчёте? – обычно – **на уравнение давления** (*segregated solver*) **или динамики жидкости** (*coupled*): делается много **внутренних** итераций. Остальные уравнения: для турбулентных величин, энергии, состава etc. часто решаются гораздо быстрее.

Это следует иметь в виду при выборе решателей, моделей etc. для нестационарных задач (много шагов по времени) – *если данный набор опций допускает большой шаг по времени* – остальное часто можно простить (лишнее уравнение, дополнительная оперативная память ...)

Выбор схемы дискретизации транспортных ур-й (pressure-based solver!)

- а) 1-й порядок – монотонная сходимость, но – численная диффузия
- б) 2-й порядок (при наличии нелинейного конв. слагаемого – условно 2-й ...) – точнее, фактически – только при 2-м порядке можно рассчитывать на точность, но возможна немонотонная сходимость – **монотонность** – нужна!
- в) дальнейшие уточнения: "high-order schemes" – применять

Схема дискретизации уравнения давления :

- см. меню ...
- существенно – учёт архимедовых сил – пригодны две – Body Force weighted и PRESTO. Чаще всего – PRESTO (личный опыт, мнение других)

Дискретизация по времени (нестационарные задачи) – обычно достаточно 1-го порядка ... 2-й порядок: не сильно увеличивает точность (может улучшить или ухудшить сходимость – в сложных задачах надо пробовать)

Способы вычисления градиентов (обычно – линейная аппроксимация, но есть и другие) – см. меню CFD-кода

Начальные, граничные, operational условия, источники

Начальные условия – инициализация: см. меню FLUENT

Operational conditions: см. список задаваемого в меню FLUENT

Гидродинамика задаётся границами потока – граничные условия :

"просто условия" и "пристеночные функции"

А. "Просто условия" – могут быть вычисляемые, распределённые etc. – на входе-выходе или у стенки (wall)

Б. Пристеночные функции – аппроксимация эффектов турбулентности – разные способы, разные модели ... (см. далее – пристеночная турбулентность)

Источники: постоянные (включая нулевые), пользовательские (UDF)

Граничные и operational условия (1)

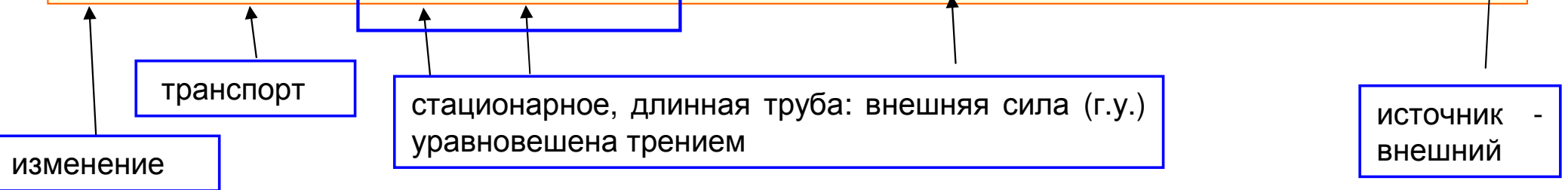
Формальная постановка г.у. – уравнения потока – второго порядка

- Уравнение неразрывности – баланс массы
– нужно условие на «вход» массы – расход

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

- Ур-е движения – баланс импульса – используется в преобразованном виде

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\mu_2 + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u_j + G_i$$



- условие на вход-выход - расход (скорость), давление или градиент давления – условия 1-го или 2-го рода (в мод. турбулентности – и 3-го ...)
- условия на стенках (по скорости) – трение или скольжение – 1-го рода

Гран. условия для других величин (T , Y_i , ...) извлекаются из уравнений для них и постановки задачи

Граничные и operational условия (2)

Пример – уравнение теплопроводности – гармония математики и физ. смысла ... (*пример из меню*)

В случае уравнения течения – не одно уравнение, а несколько связанных, но общие соображения сохраняют силу ...

Пример: задание г.у. в задаче о течение в прямой трубе

- Вход в трубу (в канал) – скорость (расход) – г.у. 1-го рода;
- Выход – давление – 1-го рода;
- Влияние стенок – трение: вместе с трением в потоке определяет ∇p .

Часть условий в FLUENT задаётся по постановке задачи (гидростат. давление), частично – вычисляемые (пристеночные функции)

Остальное – задаётся с контролем переопределения – диагностируются неточности ввода, часть комбинаций отсутствует в меню

Граничные и operational условия (3)

Давление – относительно фонового (для уменьшения ошибок округления)

$$P_{abs} = P_{op} + P_{gauge}$$

Сжимаемый газ: $p_{op}=0$, $\rho_{op}=0$! Иначе – возможны ошибки и неточности

(В гидростатике $\rho g(z-z_0)$ также отнимается от основного давления и на картинке давления по умолчанию строится разность давлений – вид странноватый)

Скорость –

На входе/выходе : компоненты вектора ... – для напорных течений

У стенки :

Скорость: нормальные и касательные: "непротекание", "нескольжение" (no slip)

Температура

Граничные условия 1-, 2-, 3-го рода и по излучению «на бесконечность»

По умолчанию – нулевой поток тепла

Концентрация и другие скаляры, переносимые потоком

Аналогично температуре, хотя условия 2-3-го рода для уравнения диффузии в меню FLUENT отсутствуют (для просто скаляра есть условие 2-го рода)

Г.у. по умолчанию – нулевой поток – “zero gradient” или нулевое значение

Граничные и operational условия (4)

По турбулентности – используются оценки

На входе:

Intensity –

$$I_{turb} = \frac{\langle \delta u \rangle}{u_m} \sim 0,16 Re^{-1/8}$$

Turbulence Length Scale :

(fully-developed duct flow of relevant size L)

$$l_{max} \sim 0,07 L$$

Hydraulic Diameter :

$$D_H = 4(Area) / (perimeter)$$

Estimating Turbulent Kinetic Energy from Turbulence Intensity

$$k = \frac{3}{2}(u_{avg} I)^2$$

Estimating Turbulent Dissipation Rate from a Length Scale

$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

Условия на стенке при наличии турбулентности

wall functions – задаются (выбираются) автоматически – см. далее

*Гладко писано в бумаге,
Да забыли про овраги, как по ним ходить?*

Л.Н.Толстой, Песня (1855 г.)

Пример анизотропии: пристеночная турбулентность

Основные объекты экспериментирования по пристеночной турбулентности – пластины и каналы (труба)

- **Структура потока в пристеночной области**
- **Количественное описание** – параметры потока, зависимости
- **Численное моделирование** – пристеночные функции (wall functions)
- **Расчётный пример** – "benchmark" – течение в прямой трубе
- **Турбулентные величины** – сравнение с экспериментом

Строение потока в окрестности стенки (см. у Хинце)

Подобласти в зависимости от расстояния до стенки: y или $y^+ = y u_{FR} / \nu$:

1. Вязкий подслой: напряжение постоянно, вязкий закон:

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

скорость пропорциональна
расстоянию до стенки ($u^+ = y^+$):

$$u_{FR} u^+ \equiv u_x \sim \frac{\tau}{\mu} y = \frac{\rho u_{FR}^2}{\mu} y = \frac{u_{FR}^2}{\nu} y = u_{FR} \frac{u_{FR} y}{\nu} = u_{FR} y^+$$

"скорость трения", "динамическая скорость" (в потоке импульса) –

$$u_{FR} = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2}$$

2. Турбулентный погран. слой – область пристеночной турбулентности – здесь турбулентная вязкость пропорциональна расстоянию: $\mu_T = \mu_T(y^+) = \kappa y^+$. Отсюда – уравнение логарифмического закона:

$$const = \tau = \mu_T(y^+) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \kappa y \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \text{или} -$$

$$\frac{const}{\kappa y} = \frac{du_x}{dy} \quad \text{ли} -$$

$$\frac{1}{\kappa y^+} = \frac{1}{u_{FR}} \frac{du_x}{dy^+}$$

– **универсальный закон стенки:**
($\kappa = 0,39$ - постоянная Кармана)

$$u^+ = u_x / u_{FR} = (\ln y^+) / \kappa + B = (\ln E y^+) / \kappa$$

3. Основной поток (в канале – ядро потока) – в зависимости от геометрии ...

Показатель – безразмерное расстояние до стенки – $y^+ = y u_{FR} / \nu$

Основные особенности потока (см. у Хинце) _1

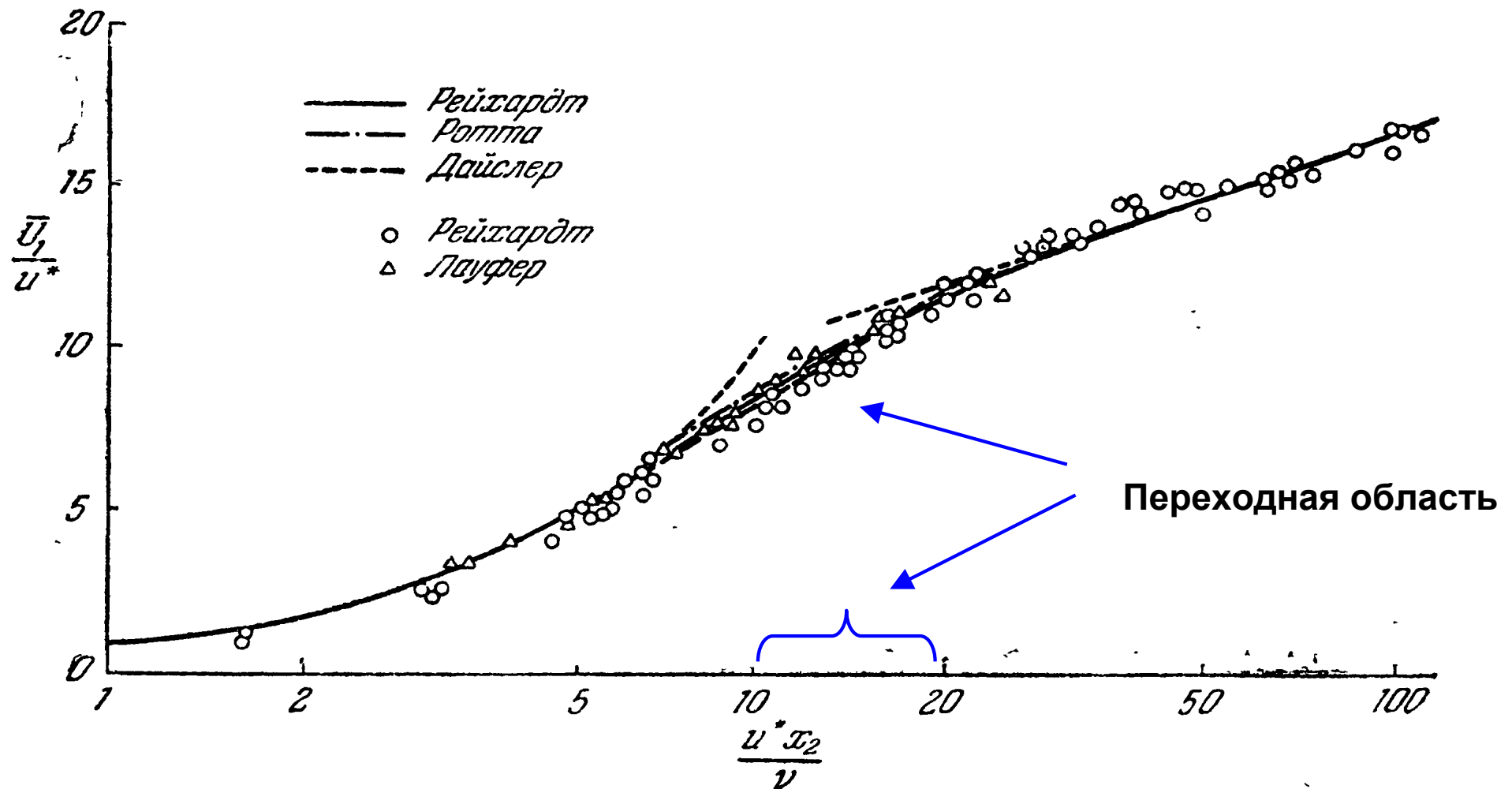


Рис. 7.3. Сравнение теоретических распределений скорости в переходной области турбулентного пограничного слоя с экспериментальными данными Рейхардта [12] для течения в канале и Лауфера [41] для течения в трубе.

Профиль продольной скорости по высоте от границы $x_2 = y$ при $y^+ < 100$.

Основные особенности потока (см. у Хинце) _2

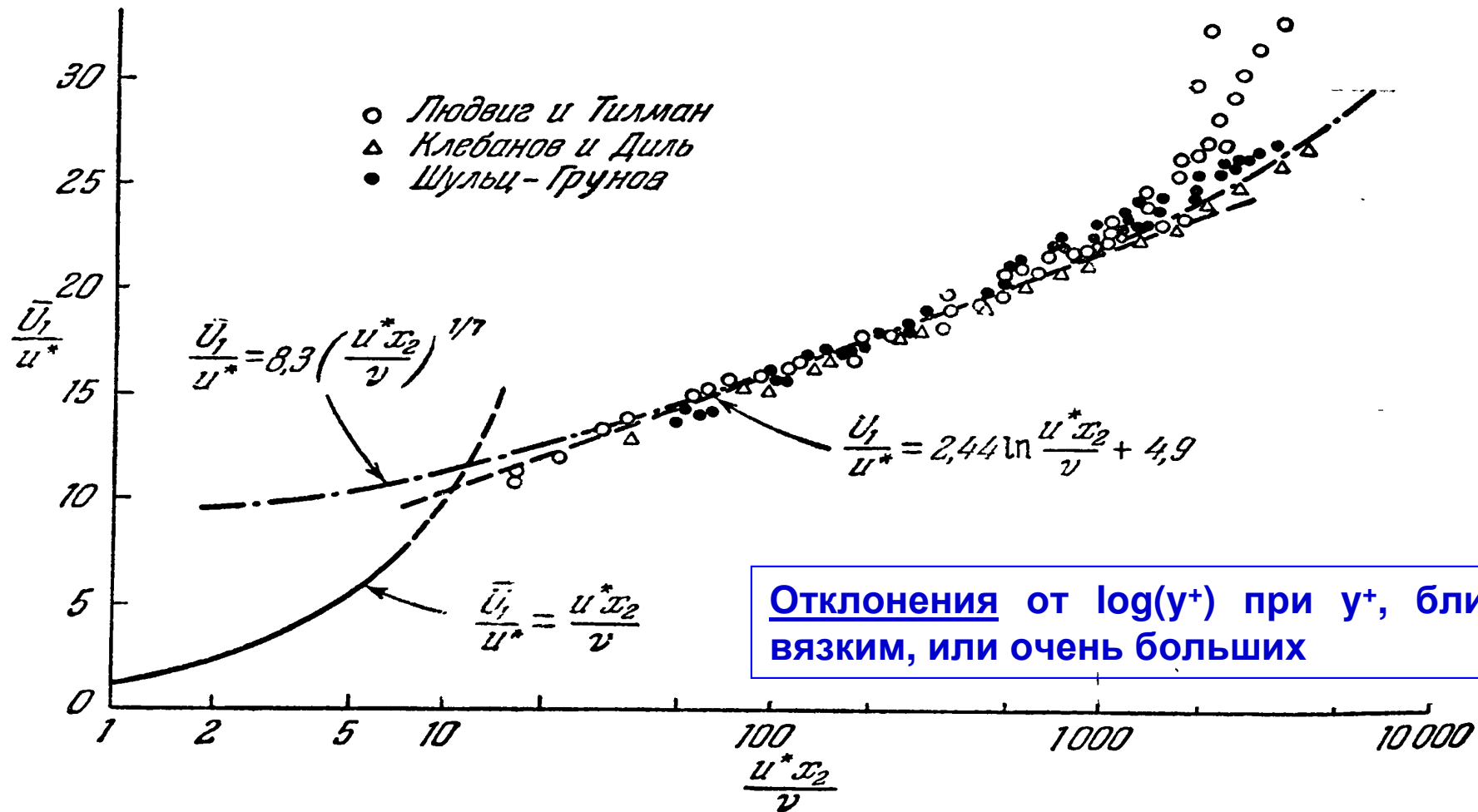


Рис. 7.2. Распределение осредненной скорости вблизи гладкой стенки.

Профиль продольной скорости по высоте от границы $x_2 = y$ при $y^+ < 10000$.

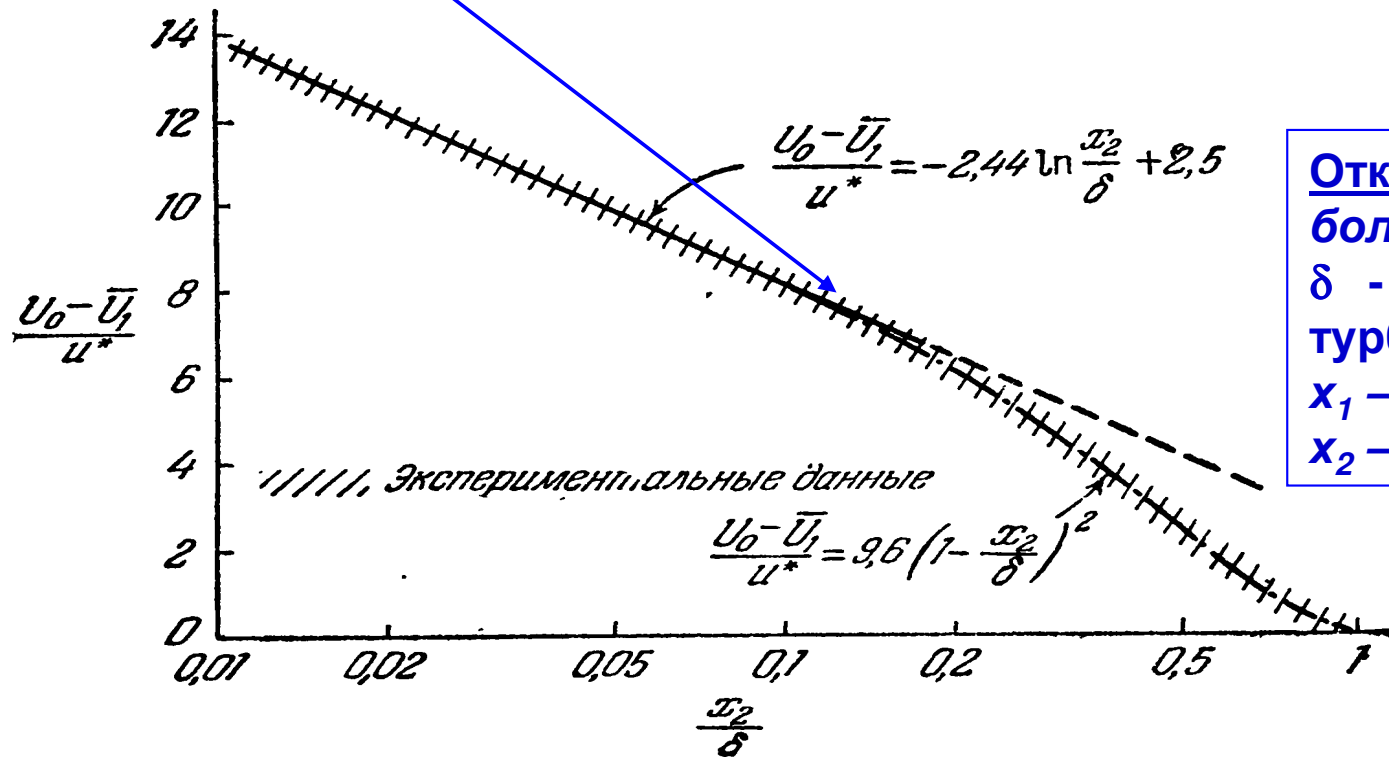
В вязком подслое – линейный закон для скорости

В прилегающем турбулентном слое – логарифмический (закон "1/7" в трубе)

Основные особенности потока (см. у Хинце) _3

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -2,44 \ln \frac{x_2}{\delta} + 2,5. \quad (7.67)$$

Значение $x_2/\delta \approx 0,15$, выше которого это логарифмическое распределение скорости отклоняется от действительного, соответствует



Отклонения от $\log(y^+)$ при больших y^+ ,
 δ - эффектив. толщина турбул. погран. слоя
 x_1 - это x
 x_2 - это y

Рис. 7.4. Распределение скорости во внешней части турбулентного пограничного слоя в полулогарифмическом масштабе [21].

приблизенному значению $u^* x_2 / \nu = 750$ (см. рис. 7.2). Эта вели-

«Избыточная» продольная скорость $u(\delta)-u(y)$ в погран. слое

CFD-моделирование стенки: wall functions _1

В экспериментах с пластинами: log закон выполняется, начиная с $y^+=30$

С неплохой точностью можно брать (см. выше) $y^+(1)=15-20...$

Критерий в CFD-кодах $y^*=11,63$ – решение уравнения $y^* = \ln(Ey^*)/\kappa$

!! в FLUENT – для удобства вычислений y^* (y-star) вместо y^+ (y-plus)!!

Задание граничных условий (скорость) в уравнениях движения и в уравнениях турбулентности – на этой основе.

Надо – задать значения на границе области с учётом турбулентного погран. слоя и вязкого подслоя. **Случаи:**

а) граничная ячейка – в области турбулентности

б) граничная ячейка – в области вязкого подслоя

В обоих случаях находится сток импульса в пристеночной ячейке – сила трения и по ней – скорость трения или связанные с ней величины

Последовательность (в FLUENT – несколько иначе):

1) в граничной ячейке решается алгебр. уравнение относительно u_{FR} – по U_p и y_p на итерации (FLUENT: можно также выразить её через ТКЭ: y^*)

$$U_p = \frac{u_{FR}}{\kappa} \left(\ln \frac{u_{FR} y_p}{\nu} + \ln E \right)$$

2) Определяется новое $y^+_{+}=y^+(1)$ для пристеночного узла и по критерию $y^*=11,63$ решается, где находится граничная ячейка – случай а) или случай б)

CFD-моделирование стенки: wall functions _2

Случай а): вязкий подслой в 1-й ячейке – в пристеночной ячейке вводится сток в уравнение продольной (у стенки) компоненты импульса – *турбулентное трение* [Versteeg]:

$$F_S = -\tau_w A_{cell} = -\frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} u_P}{u^+} A_{cell} = -\left(\frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} A_{cell}}{u^+} \right) u_P$$

Случай б): 1-я ячейка – в вязком подслое (мелкая сетка) – условие ламинарного потока у стенки: в уравнении продольной компоненты u_x :

$$u_x(0)=0 \text{ (или } \partial u_x / \partial y = 0 \text{ – без трения) , } u_y=0. \text{ (ср. – г.у. стенка-жидкость-газ?)}$$

Но это грубовато. При мелкой сетке моделирование переходной области можно уточнить – применить дополнительную модель перехода к логарифм. закону в области турб. погранслоя – *enhanced wall treatment* (k- ϵ model), ****-function* (k-w model) – см. меню моделей турбулентности ...

Таким образом, в расчёте следует заранее узнать – оценить или вычислить (запустить пробный расчёт) y^* на границах и решить, какую пристеночную функцию выбрать (замечание относительно *enhanced wall treatment* ...)

Далее – определяются величины, описывающие пристеночную турбулентность в других уравнениях и гран. условиях для них:

- для ТКЭ
 - для скорости диссипации
 - для температуры
- и в др. скалярных уравнениях
-

Существенно!

Рассматривается развитая, установившаяся (вдоль стенки и по времени) турбулентность!

Идеальный случай – длинный прямой канал (углы сечения не рассматриваются) или пластина при $Re > \sim 10000$

В противном случае – возможны отклонения.

Этапы числ. решения

- ✓ Постановка задачи и цели численного расчёта (см. выше и ниже)
- ✓ Создание геометрической модели и её разбиение (готовая сетка)
- 1. Выбор процедуры решения, параметров расчёта и физических моделей
- 2. Численное решение – контроль сходимости и решения
- 3. Визуализация, проверка, сохранение решения
- 4. Доработка модели (другие опции ...), варианты расчёты

Расчёт при варьируемых параметрах:

Модели турбулентности – RANS ...

Пристеночные функции – стандартные и –

Enhanced wall treatment – улучшенное описание пристеночной области

Далее – манипуляции с сеткой:

Влияние входного участка (см. у Хинце) – заметно? – для его уменьшения –
растяжение сетки

Adaptation – *измельчение сетки* – проверка качества разбиения

Цели расчёта –

- **Получить с заданной точностью стационарное решение, проанализировать на предмет соответствия экспериментам для длинной трубы**
- **Рассмотреть причины отклонений (входной участок, сетка, режим и др.)**
- **Сравнить влияние различных опций :**
 - **при различных Re (высокорейнольдсовы и низкорейнольдсовы)**
 - **на разных сетках**
 - **при разных гран. условиях (*wall functions*)**
- **Для этого – построить графики, обезразмерить, сравнить**

Расчёт течения в круглой трубе _3 : варианты вх. данных

No	Turbulence	Re	Вход. условия	Name
1	k-e standard, standard	small / large	однородно	
2	k-e standard, nonequilibrium	small / large	однородно	
3	k-e realizable, nonequilibrium	small / large	однородно	
4	k-e realizable, enhanced	small / large	однородно	
5	k-e realizable, adaptation	small / large	однородно	
6	k-w standard	small / large	однородно	
7	k-w SST	small / large	однородно	
8	Spalart-Almaras	small / large	однородно	
9	RSM	small / large	однородно	

Что рассчитывается численно и служит результатом расчёта

Конфигурация – длинная труба; входная скорость – равномерна по радиусу; участок установления и участок развитой турбулентности

Случаи:

- а) Невысокие Re – проверить работу опций гран. условий модели турбулентности (standard, enhanced wall treatment). Сравнение по радиальному распределению скорости (лог. профиль) в области установившегося течения – результатов расчётов и аналитического выражения $(1/k \ln(y^+) + C)$.
- б) Высокие Re – сравнение моделей $k-w$, $k-e$ (RNG, Realizable) .
- в) Расчёты для нескольких значений входной скорости.

Результаты:

- На участке развитой турбулентности – $\log(y^*)$, зависимость давления от расстояния вдоль длины трубы (2 варианта – вариация модели турб. и пристен. функций).
- Сравнить перепад давления с получаемым по формуле Блазиуса – зависимость от входной скорости – по нескольким вариантам.
- Другие величины ...

Варианты для разных авторов:

- Разные диаметры (оценка числа Re !)
- Воздух или вода (оценка числа Re !)
- Разные модели турбулентности

Обработка численного результата: вычисление величин для сравнения

Оценка касательного напряжения

на участке развитой турбулентности –
поток импульса на ед. длины трубы:

$$\Delta p_{tub} \pi R^2 \approx 2\pi RL\tau, \quad \tau = \Delta p_{tub} \frac{R}{2L}$$

Отсюда – динамическая скорость (friction velocity)

$$u_{FR} = u^* = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2}$$

Обезразмеривание:

$$u^+ = \frac{\langle u_1 \rangle}{u_{FR}}, \quad y^+ = \frac{u_{FR}}{\nu} y$$

Далее могут быть построены нужные зависимости (использовать – curve length: линия от данной точки, custom field functions – множитель скорости, units – множитель длины – здесь – только для графика(!), свои обозначения осей ...)

Замечание – различия расчёта и эксперимента объективно существуют:

- Лишь приближённое определение профилей скорости как \log^{**} ...
- Установление турбулентности на входе, входной участок
- Вывод – обычно расчёт имеет только «инженерную» точность – в отсутствии прецизионных измерений и высокоточных моделей не следует стремиться к совпадению до 1%

Результаты расчёта течения в трубе: дальнейший анализ

Формулы для сравнения и использования –

Логарифмический профиль продольной скорости:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

Профиль скорости по сечению
– «закон 1/7» для трубы

$$\frac{\langle u_z(r) \rangle}{\langle u_z^{\max} \rangle} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} = \left(\frac{R-r}{R}\right)^{1/7} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

Коэффициент сопротивления
и формула Блазиуса :

$$\Delta p_{tub} = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{\rho U^2}{2}, \quad \Delta p_{tub} \propto L,$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}$$

Дальнейший анализ – вывод турбулентных величин:

• турбулентная кинетическая энергия:

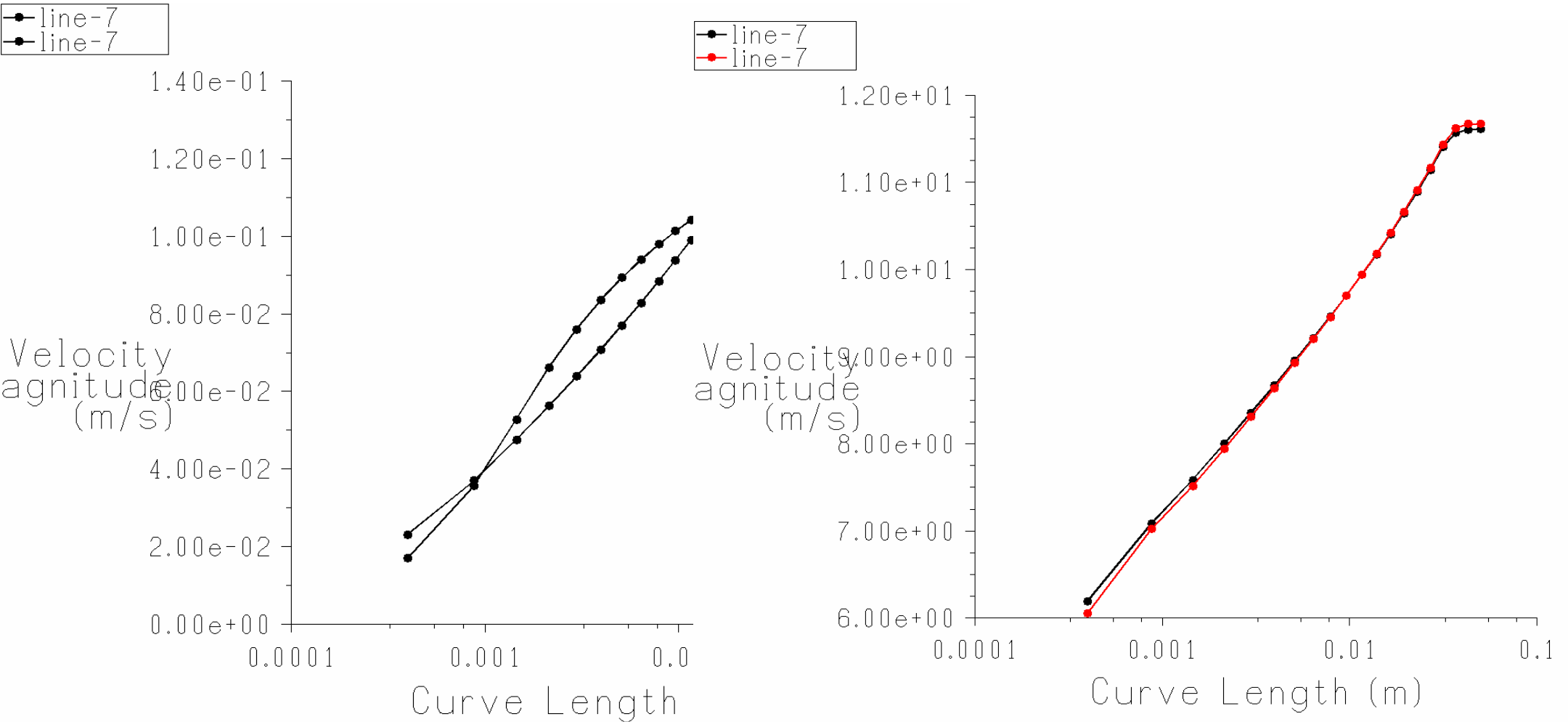
$$\kappa = \frac{1}{2} \langle v_i v_i \rangle$$

• скорость диссипации ε ,

• интенсивность турбулентности :

$$I = \frac{\langle v_1 \rangle}{U_1}$$

Замечание: лог. профиль при разных числах Re

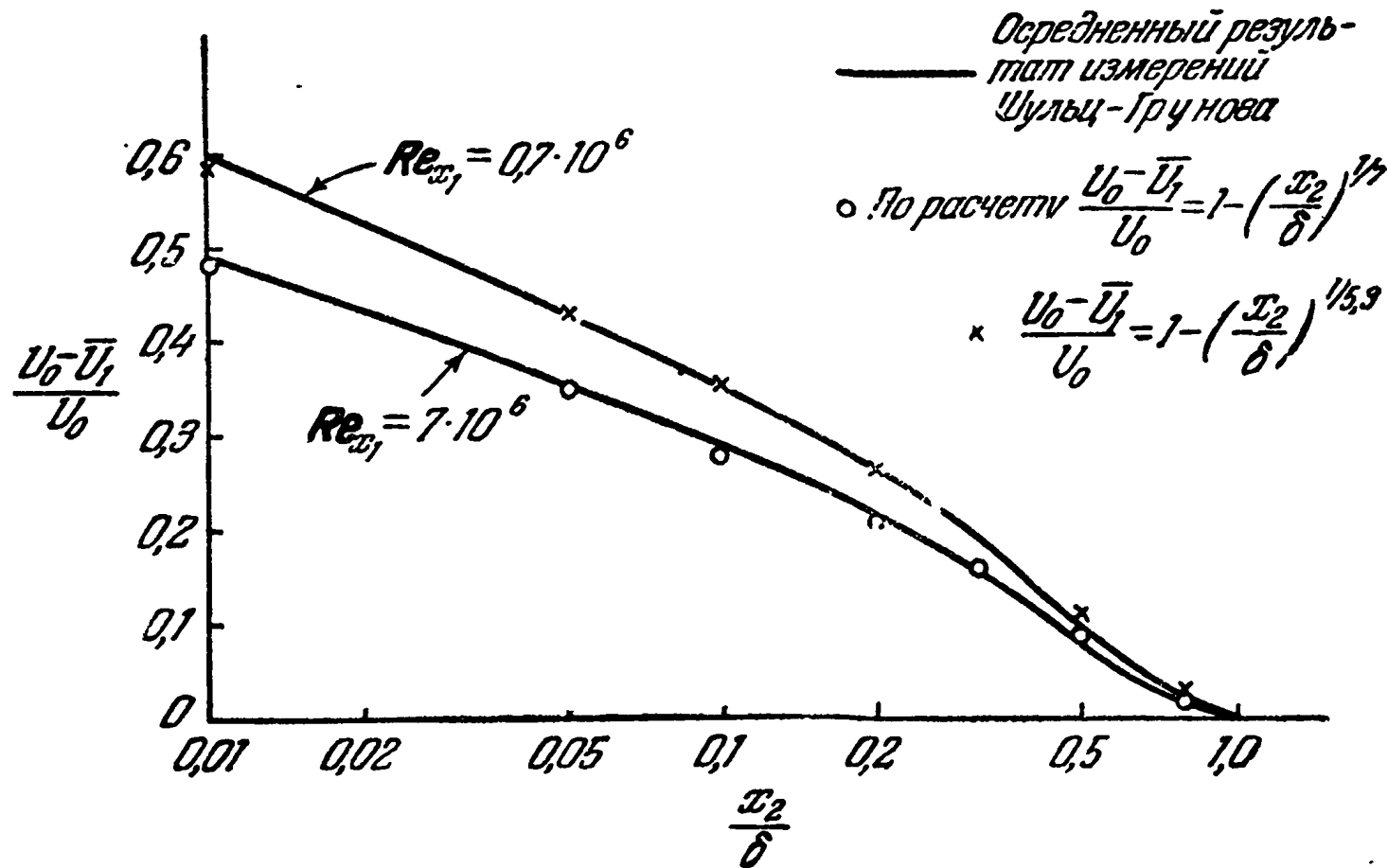


Расчётные профили скорости $u=u(\log(R))$ с опцией *enhanced wall ... / no:*

RNGke_ $Re=10^4$ ($y^+(1)=1$)

RNGke_ $Re=10^6$ ($y^+(1)=74$)

Замечание: о распределении продольной скорости у стенки



Хинце: "Этот результат наглядно демонстрирует влияние числа Рейнольдса на величину показателя степени n распределение скорости по степенному закону нельзя рассматривать как универсальное."

Рис. 7.5. Сравнение распределения скорости, соответствующего степенному закону, с результатами опытов Шульц-Грунова [18].

О «законе 1/7» для продольной скорости по высоте: менее универсальный, чем логарифм, но – для всего сечения трубы ...

**Правило (руководство к действию): следует пользоваться каждой
возможностью сравнивать расчёт с экспериментом – ниже
рассмотрены некоторые сравнения**

Турбулентные величины в потоке (см. у Хинце) _1

line-7

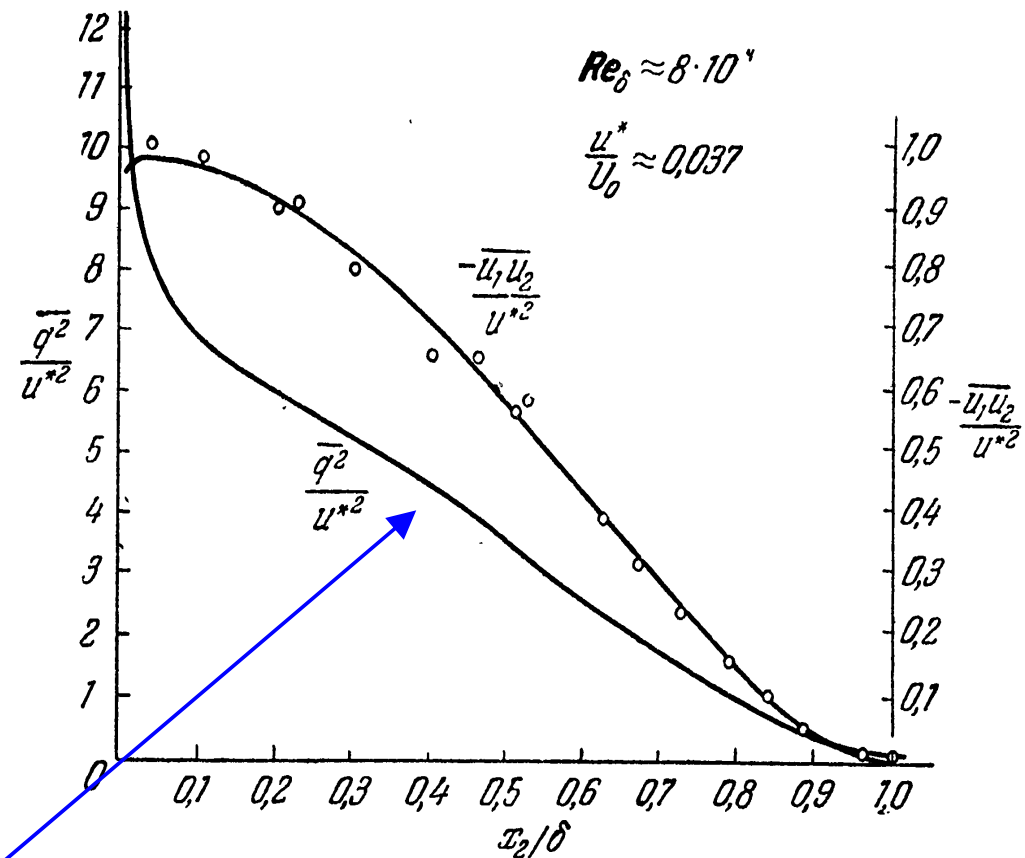
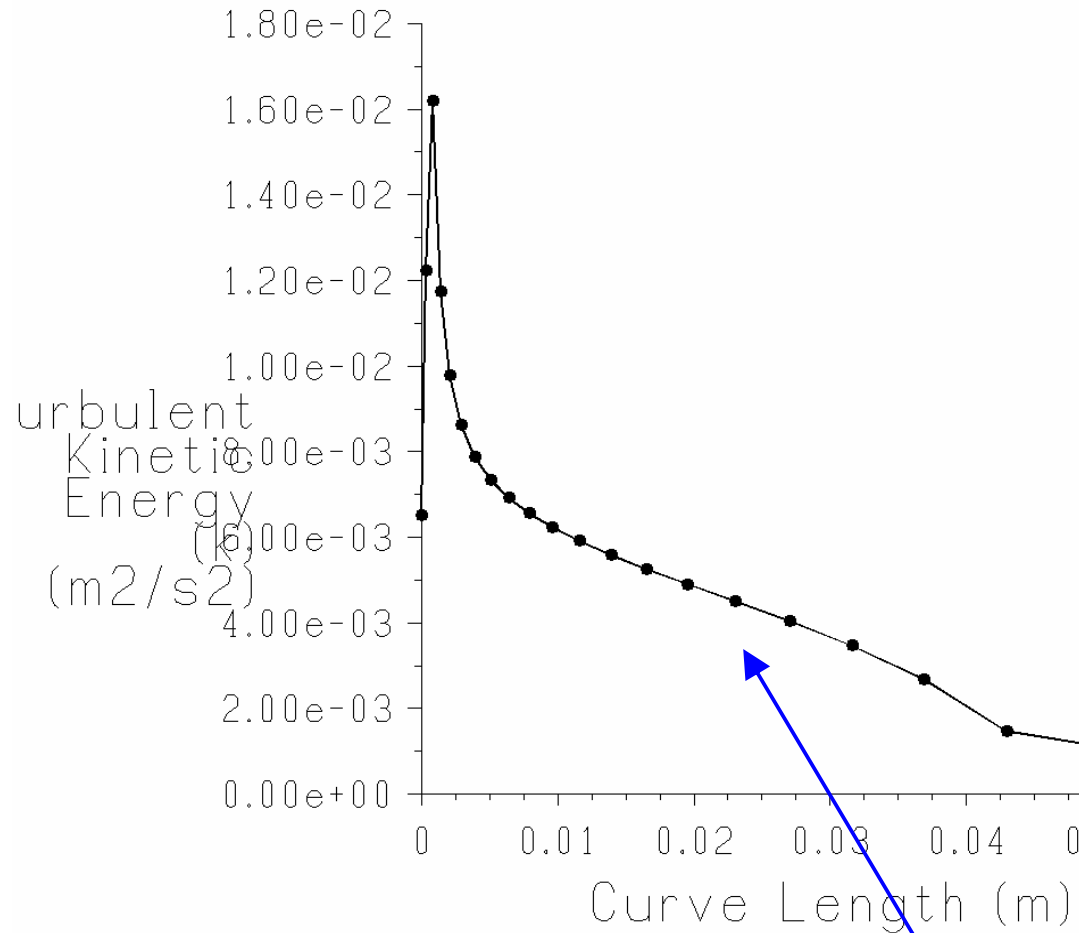


Рис. 7.13. Распределение кинетической энергии турбулентности и турбулентного напряжения сдвига в поперечном сечении пограничного слоя [27].

Профили турбулентной кинетической энергии:

Расчётный (RNGke_Re=10⁵)

Экспериментальный (Re=0,8·10⁵)

Турбулентные величины в потоке (см. у Хинце) _2

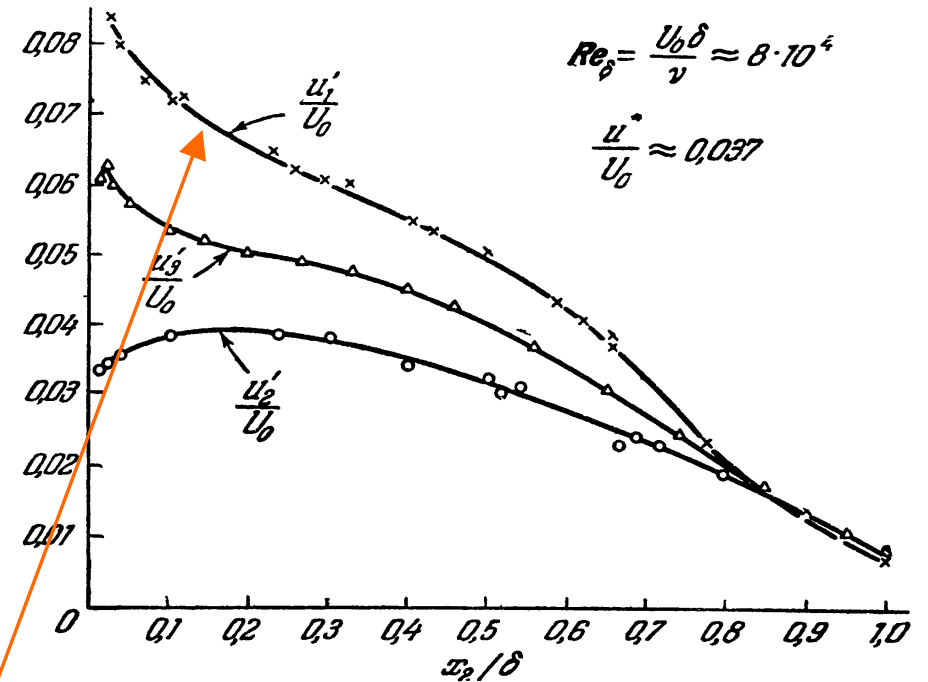
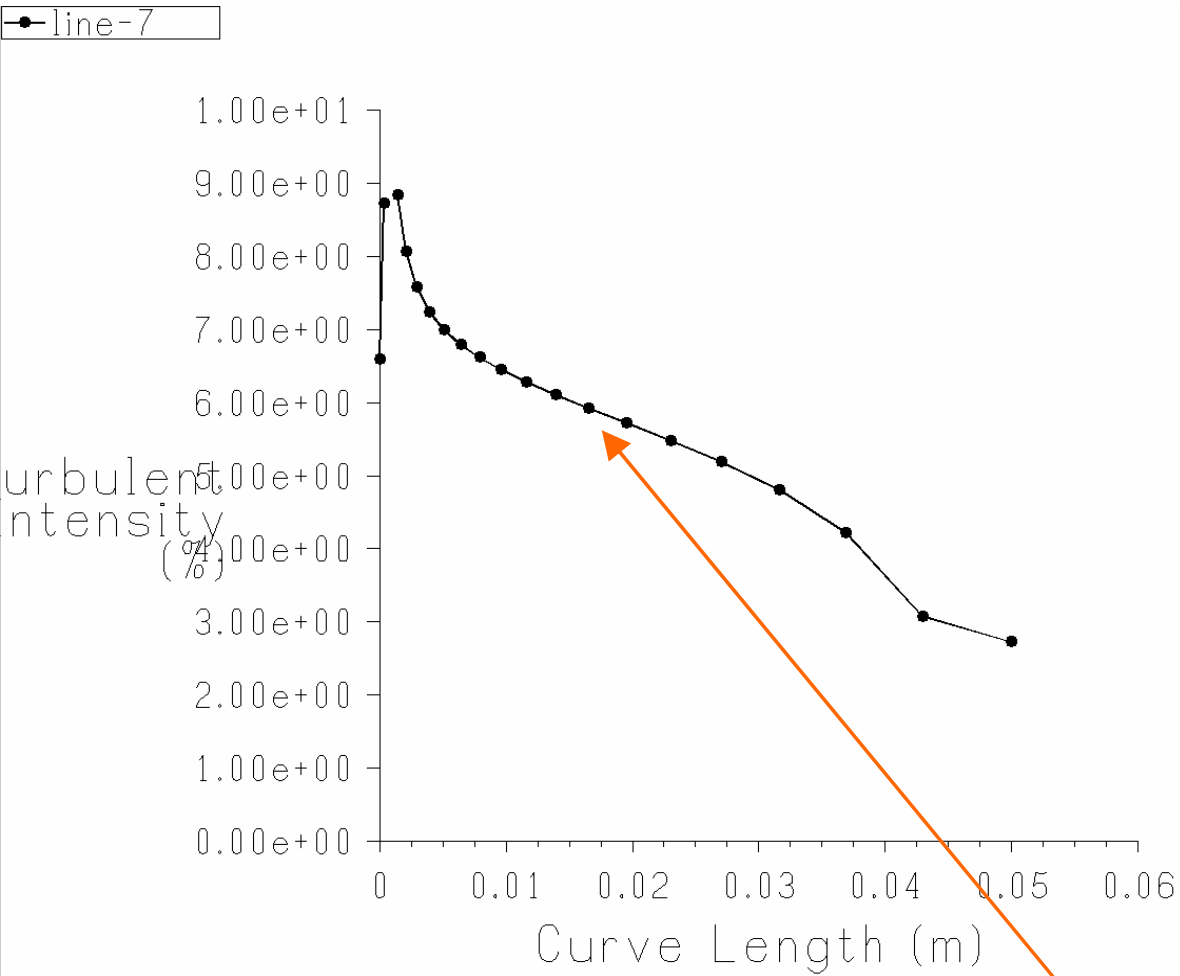


Рис. 7.10. Относительная интенсивность турбулентности в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [27].

Профили интенсивности турбулентности:

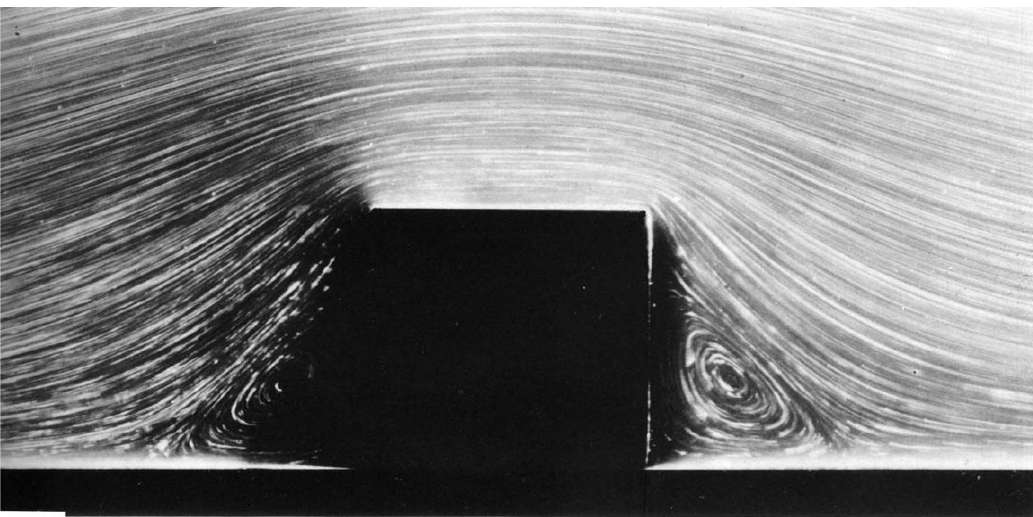
Расчёт (RNGke_Re=10⁵, max=0,1)

Эксперимент (Re=0,8.10⁵, max=0,085)

Отрыв пограничного слоя при резком изменении рельефа

- Строение потока за отрывом
- Место присоединения – восстановление погран. слоя
- Особенности – местное гидравлическое сопротивление, вариации теплоотдачи
- Примеры:
 - задача об обратной ступеньке
 - теплообмен в канале с внезапным расширением

Отрывные течения: примеры (Ван-Дайк)



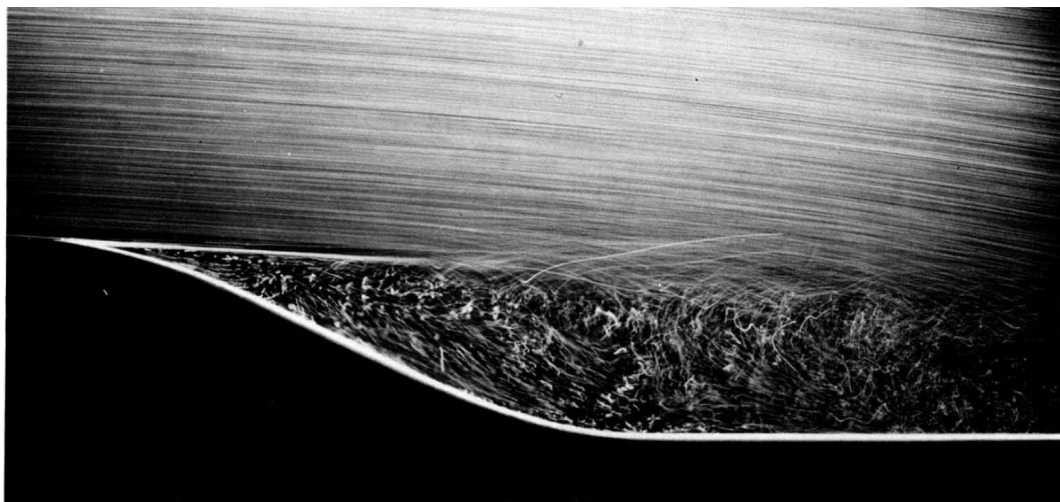
11. Ползущее течение при обтекании квадратного выступа на пластинке. Число Рейнольдса, рассчитанное по стороне квадрата, равно 0,02. В отличие от линий тока безотрывного потенциального обтекания, показанных на фото 5, изображенное здесь плоское течение имеет две области отрыва, которые расположены симметрично спереди выступа

и за ним и в которых образуются большие рециркуляционные вихри. В углах должны существовать последовательности меньших и более слабых вихрей аналогично течению в клине, показанному на фото 10. Визуализация осуществляется с помощью стеклянных шариков в глицерине. [Taneda, 1979]



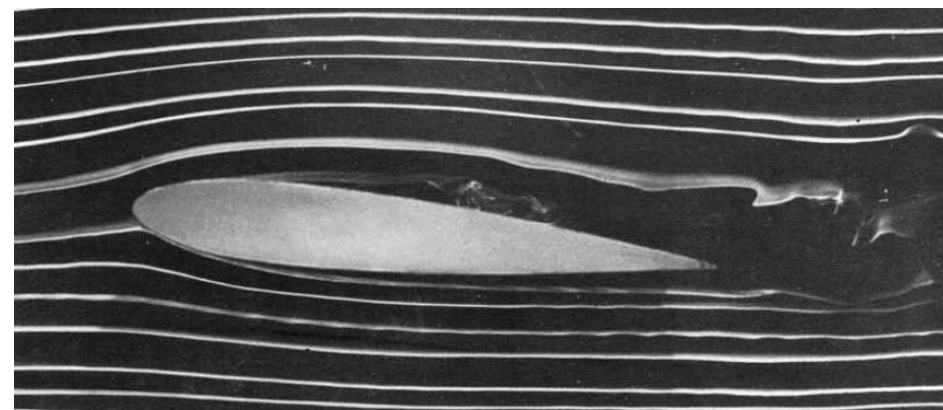
39. Турбулентный отрыв при обтекании прямоугольного выступа на пластинке. Высота выступа велика по сравнению с толщиной набегающего на него ламинарного пограничного слоя. Течение практически плоское, поэтому рециркуляционная

область перед выступом оказывается замкнутой, тогда как в аналогичном трехмерном течении, показанном на фото 92, она открыта и растекается в стороны по бокам. Фото ONERA. [Werlé, 1974]



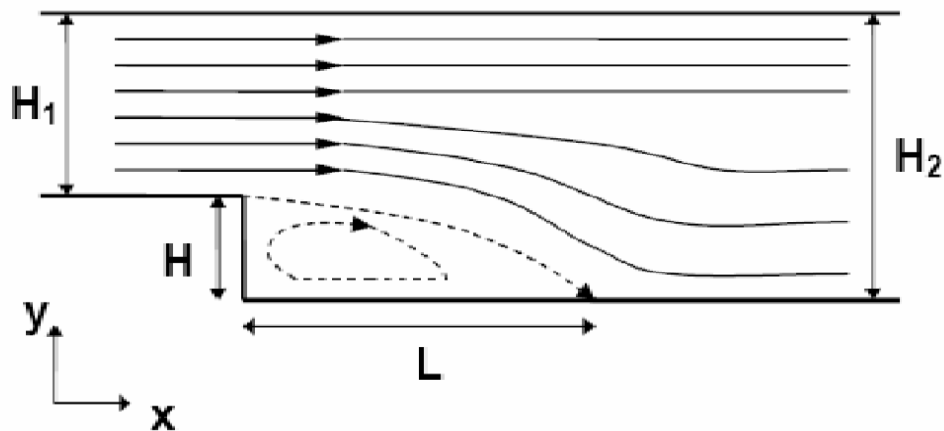
38. Ламинарный отрыв на искривленной стенке. Воздушные пузырьки в воде показывают отрыв ламинарного пограничного слоя, число Рейнольдса которого, рассчитанное по расстоянию от передней кромки, равно 20 000 (передняя кромка здесь не показана). Поскольку пограничный слой

свободен от пузырьков, он проявляется слева в виде тонкой темной линии и отрывается по касательной вблизи начала выпуклой поверхности, оставаясь ламинарным там, где видна темная линия, а затем становится неустойчивым и турбулентным. Фото ONERA. [Werlé, 1974]



72. Симметричный профиль под углом атаки. Дым в аэродинамической трубе показывает отрыв на верхней поверхности профиля, имеющего относительную толщину 15% и установленного под углом атаки 6° , при числе Рейнольдса 20 000. Фото Peter Bradshaw

Задача об обратной ступеньке _1



Явления и задачи

- Отрывное течение – участок свободной турбулентности
- Присоединение потока – место: $L_x=?$
- Вторичное течение – структура?
- Коэффициент трения – касательное напряжение – сопротивление ?

Варьируемые параметры:

Скорость потока – число Re по высоте ступеньки

(или – конфигурация: высота входного участка) ! длина входа – большая!

Модели турбулентности : $k-\epsilon$, $k-w$, RSM. Пристеночные функции ...

Способ решения: стационарное? или – метод установления

Мелкость разбиения сетки – влияет?

Навыки: работа с кодом Fluent:

Адаптация – измельчение сетки

Построение линий тока

Задача об обратной ступеньке _2

Варианты расчётов

Сетка 1: 5000 ячеек, затем – 2- кратное измельчение x4

Сетка 2: 12500 ячеек, однократное измельчение x4

Скорость потока – число Re по высоте ступеньки – фиксировано

Способ решения: стационарное, метод установления

Модели турбулентности : k- ϵ , k- ω , RSM – фиксирована

Соотношение размеров области – проверятся влияние на сетках 1 и 2

Задание граничных условий:

На входе – velocity inlet

На верхней границе – wall, slip

На нижней границе – wall, no slip

На выходе – pressure outlet

На ступеньке – wall, no slip

Back step: предлагаемые расчётные варианты

No	Turbulence	Re	Result: $L_x, L_x/H$	Name
1	k-e realizable, <i>standard, затем</i> – enhanced	small / large		
2	k-e realizable, standard, затем – nonequilibrium	small / large		
3	k-e standard, enhanced, nonequilibrium	small / large		
4	k-w, standard			
5	k-w , SST	small / large		
6	Adaptation of No.1	small / large		
7	RSM, standard and nonequilibrium w.f.	small / large		

В задаче об обратной ступеньке

Что знать, что показать

Отрывное течение – что это такое

Входные данные – развитая турбулентность

Два-три варианта при разных моделях турбулентности или пристеночных функциях

Показать картину течения за уступом

Количественно определить место присоединения потока

Прокомментировать задание граничных условий и др.:

На входе

На выходе

На верхней границе

На нижней границе и на ступеньке

Число Рейнольдса потока

и др. ...

Осесимметричный поток с теплообменом: теплопередача при течении в канале

Труба с внезапным расширением: теплообмен

- а) без входного участка (см. Fluent Validation Manual)
- б) с входным участком (для сравнения)

Напоминания:

Коэффициент теплоотдачи, число Нуссельта etc.

Навыки:

- Задание профилей в граничных условиях – с помощью опции Profiles
- Задание зависимостей – Custom Field Functions

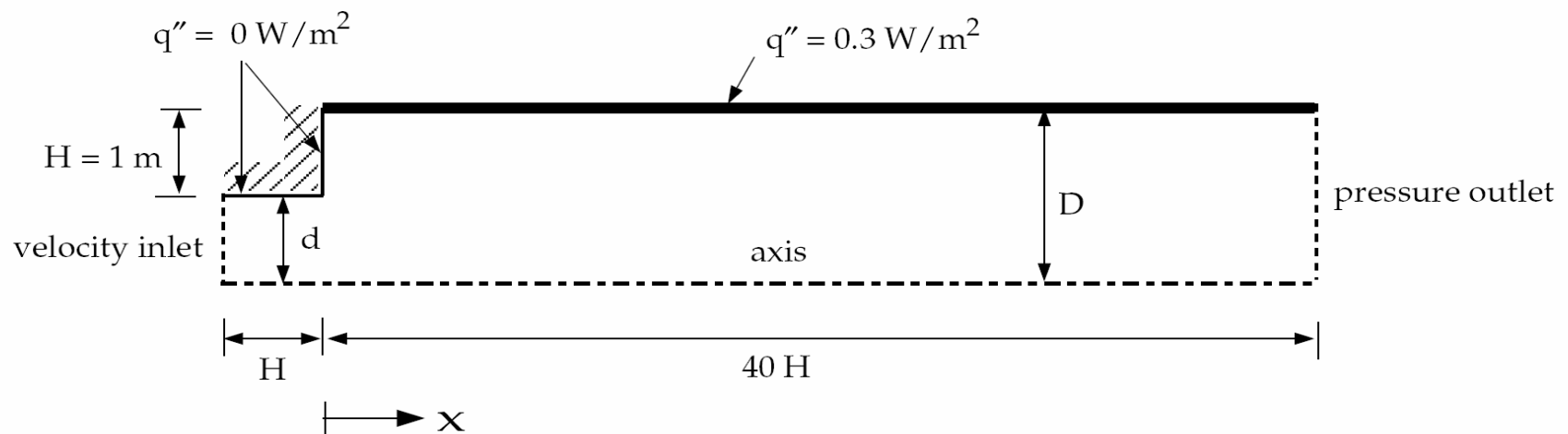
Heat Transfer in a Pipe Expansion __1

6.1 Purpose

The purpose of this test is to validate FLUENT's standard and non-equilibrium wall functions together with the standard $k-\varepsilon$ and RNG $k-\varepsilon$ turbulence models against the experimental data of Baughn et al. [1].

6.2 Problem Description

Figure 6.2.1 shows the geometry of the expansion considered. The inlet is placed $1H$ upstream of the step. The exit boundary is located $40H$ downstream of the step. The expansion ratio is $d/D = 0.400$, where $d = 1.33$ m is the inlet pipe diameter and $D = 3.33$ m is the downstream pipe diameter.



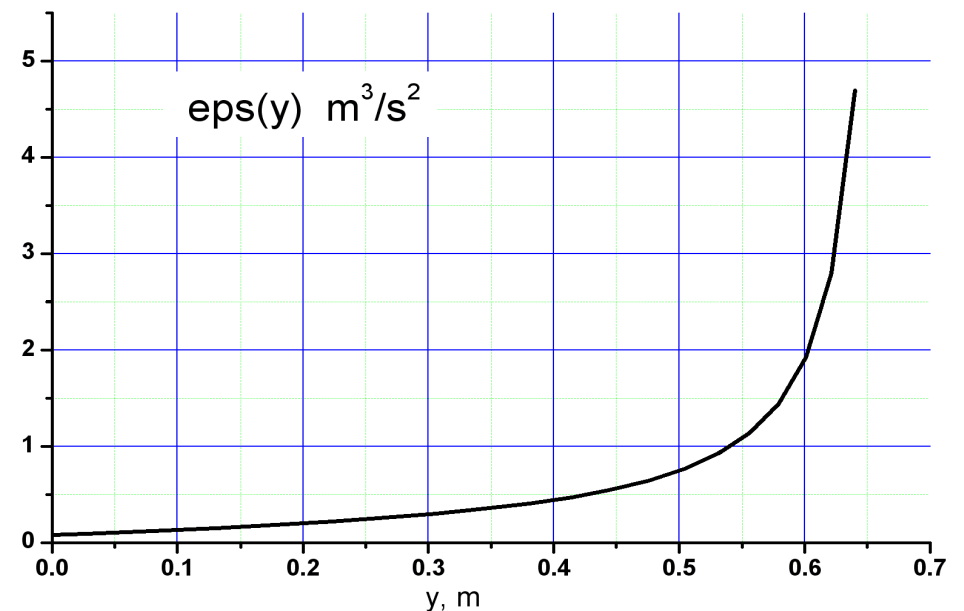
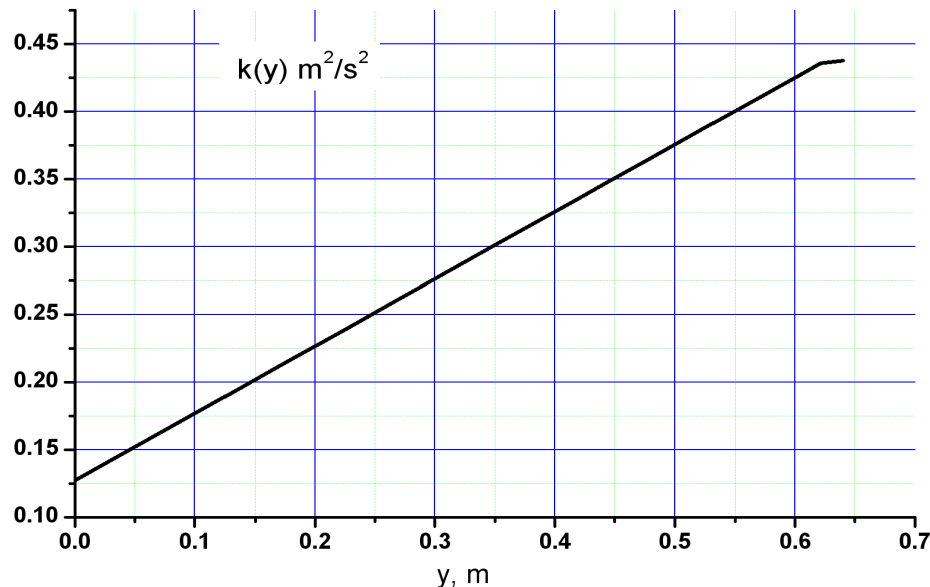
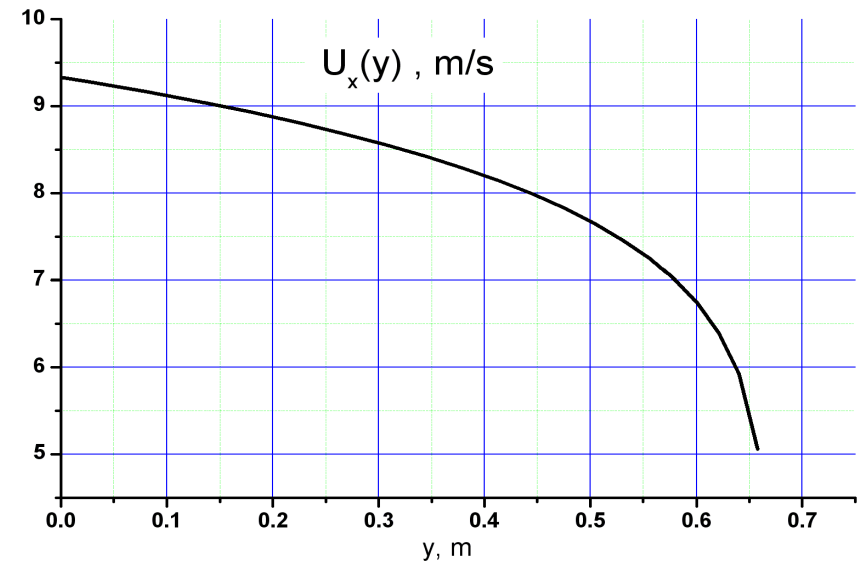
6.3 References

1. Baughn et al., Local Heat Transfer Downstream of an Abrupt Expansion in a Circular Channel With Constant Wall Heat Flux, *Journal of Heat Transfer*, 106:789–796, 1984.
2. Patel, C., Rodi, W., and Scheuerer, G., Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Flows: A Review, *AIAA Journal*, 23(9), 1984.
3. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1979.

Heat Transfer in a Pipe Expansion __3

Входные данные: параметры потока (развитое турбулентное течение в канале) задаются как profiles – таблицы значений

Выходные данные: безразмерный локальный критерий Нуссельта – вычисляется как Custom Field Function



Heat Transfer in a Pipe Expansion __4

The quantity of interest for comparison with the measurements of [1] is the Nusselt number, Nu , along the heated wall. The Nusselt number was calculated from the bulk temperature and the heat transfer coefficient. (See Figure 6.2.1 for the location of x .)

The bulk temperature is

Входящий поток тепла нагревает газ, газ уносит тепло:

$$\frac{1}{4} \pi D^2 \rho U C_p (T_B(x) - T_{in}) = q'' \pi x D$$

$$T_B(x) = \frac{4q'' \pi x D}{\pi D^2 \rho U C_p} + T_{in} = \frac{4q'' x}{\rho \nu C_p D U / \nu} + T_{in} = \frac{4q'' x}{\mu C_p Re} + T_{in}$$

$$T_B(x) = \frac{\dot{q}''(x) 4x}{Re \mu c_p} + 273 \quad (6.4-1)$$

$Re \equiv DU / \nu$

where $\dot{q}''(x)$ is the local heat flux (constant, in this case). The local heat transfer coefficient is

По определению – коэффициент теплоотдачи на границе –

$$h(x) = \frac{\dot{q}''(x)}{T_{wall}(x) - T_B(x)} \quad (6.4-2)$$

Finally, the local Nusselt number is

По определению – местное число Нуссельта

$$Nu(x) = \frac{h(x) D}{k} \quad (6.4-3)$$

where D is the diameter of the pipe and k is the thermal conductivity of the fluid.

Нормировка по значению на бесконечности

Data of [1] are in terms of Nu/Nu_{DB} where Nu_{DB} is the Nusselt number calculated with the Dittus-Boelter formula.

Цели расчётов: влияние модели ...

The variation of the ratio Nu/Nu_{DB} along the heated wall for the standard $k-\varepsilon$ and RNG $k-\varepsilon$ models with standard wall functions and non-equilibrium wall functions is presented here.

Dittus-Boelter equation

The Dittus-Boelter equation (for turbulent flow) is an [explicit function](#) for calculating the Nusselt number. It is easy to solve but is less accurate when there is a large temperature difference across the fluid. It is tailored to smooth tubes, so use for rough tubes (most commercial applications) is cautioned. The Dittus-Boelter equation is

$$Nu_D = 0.023 Re_D^{4/5} Pr^n$$

Here:

D is the inside diameter of the circular duct

Pr is the [Prandtl number](#)

$n=0.4$ for heating of the fluid, and $n=0.3$ for cooling of the fluid.

The Dittus-Boelter equation is valid for

$0.6 < Pr < 160$

$Re > 10000$

$L/D > 10$

Heat Transfer in a Pipe Expansion __6

Сравнение – по вычисляемым величинам –

Field functions:

$$T_B(x) = \frac{4q''x}{\text{Re}\mu C_p} + T_{in} = \frac{4q''x}{\text{Re} \cdot 0,0001 \cdot 0,7} + 273$$

$$t_{\text{bulk}} = \text{heat-flux} * x * 4 / (40750 * 0.0001 * 0.7) + 273.$$

$$h_{\text{coeff}} = \text{heat-flux} / (\text{wall-temp-out-surf} - t_{\text{bulk}} + 0.0000001)$$

$$q'' = h(x)(T_B(x) - T_{\text{wall}}(x))$$

$$\text{nusselt-no.} = h_{\text{coeff}} * 3.33333 / 0.0001$$

$$Nu(x) = \frac{h(x)}{\lambda / D}$$

$$\text{nu_nub} = \text{nusselt-no.} / 97.24$$

$$Nu_{\text{plot}}(x) = \frac{Nu(x)}{Nu_{DB}} = \frac{Nu(x)}{97,24}$$

Nu_{DB} was computed as 97.24 (at taken mat. props?)

Вычисляются в FLUENT – записываются в файл и читаются в формате языка SCHEME (script)

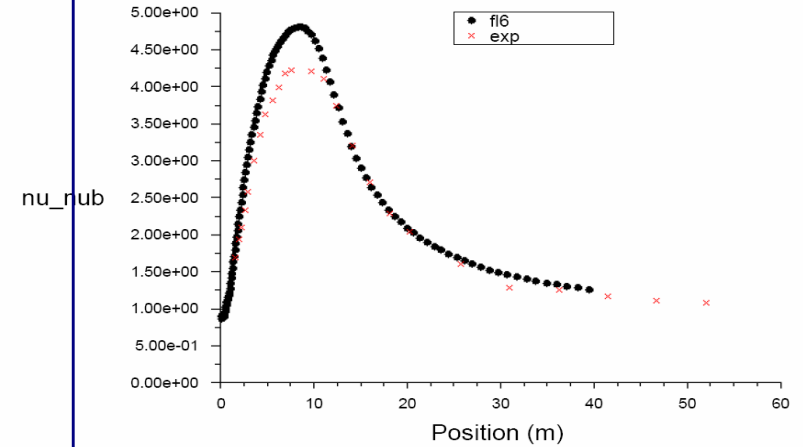
Heat Transfer in a Pipe Expansion __7

No	Turbulence	Input	Result: $L_x, L_x/H$	Name
1	k-e realizable, <i>standard w.f.</i>	Profiles		
2	k-e realizable, nonequilibrium	=		
3	k-e standard, nonequilibrium	=		
4	k-w, standard	=		
5	k-w , SST	=		
6	k-e standard, nonequilibrium	Длинный вход		
7	RSM, standard (Nonequibr	=		

Heat Transfer in a Pipe Expansion __8

Замечания по расчётам –

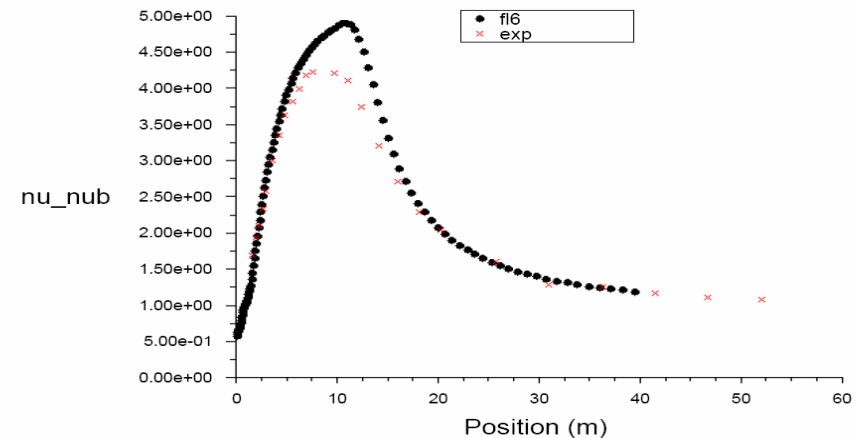
- Максимум потока тепла – в точке присоединения
- Non-Equilibrium WF – лучше в макс., похуже после него
- Наилучшая модель – видимо, RNG, но – см. без Profile!
- Сетка не должна быть очень мелкой –
- Должно быть $y^+ > 10-20$
- Большие x – теплообмен выходит на const: $Nu=Nu_{DB}$
(в ~ 30 больше ламинарной асимптотики Греча-Нуссельта)



bghnexp (Baughn's Pipe Expansion, Re_D = 40,750)
nu_nub
Standard k-e with Standard Wall Functions

Jul 20, 2004
FLUENT 6.2 (axi, segregated, ske)

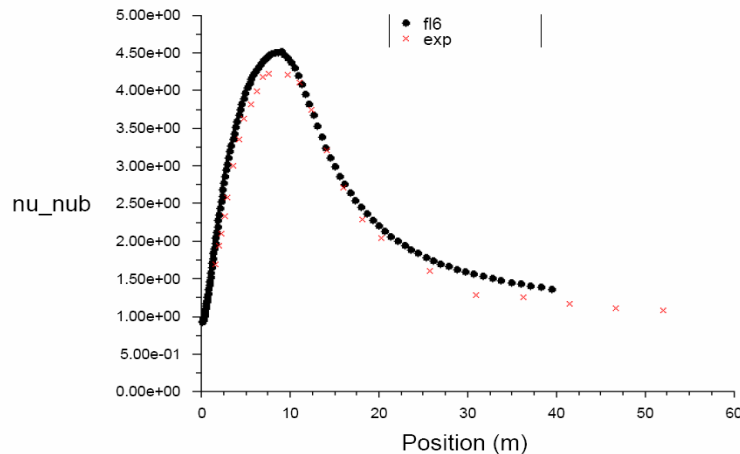
Nu/Nu_{DB} along the Downstream Pipe Wall
(Standard $k-\epsilon$ Model, Standard Wall Functions)



bghnexp (Baughn's Pipe Expansion, Re_D = 40,750)
nu_nub
RNG k-e model with Standard Wall Functions

Jul 20, 2004
FLUENT 6.2 (axi, segregated, rngke)

Nu/Nu_{DB} along the Downstream Pipe Wall
(RNG $k-\epsilon$ Model, Standard Wall Functions)



bghnexp (Baughn's Pipe Expansion, Re_D = 40,750)
nu_nub
Standard k-e with Non-Equilibrium Wall Functions

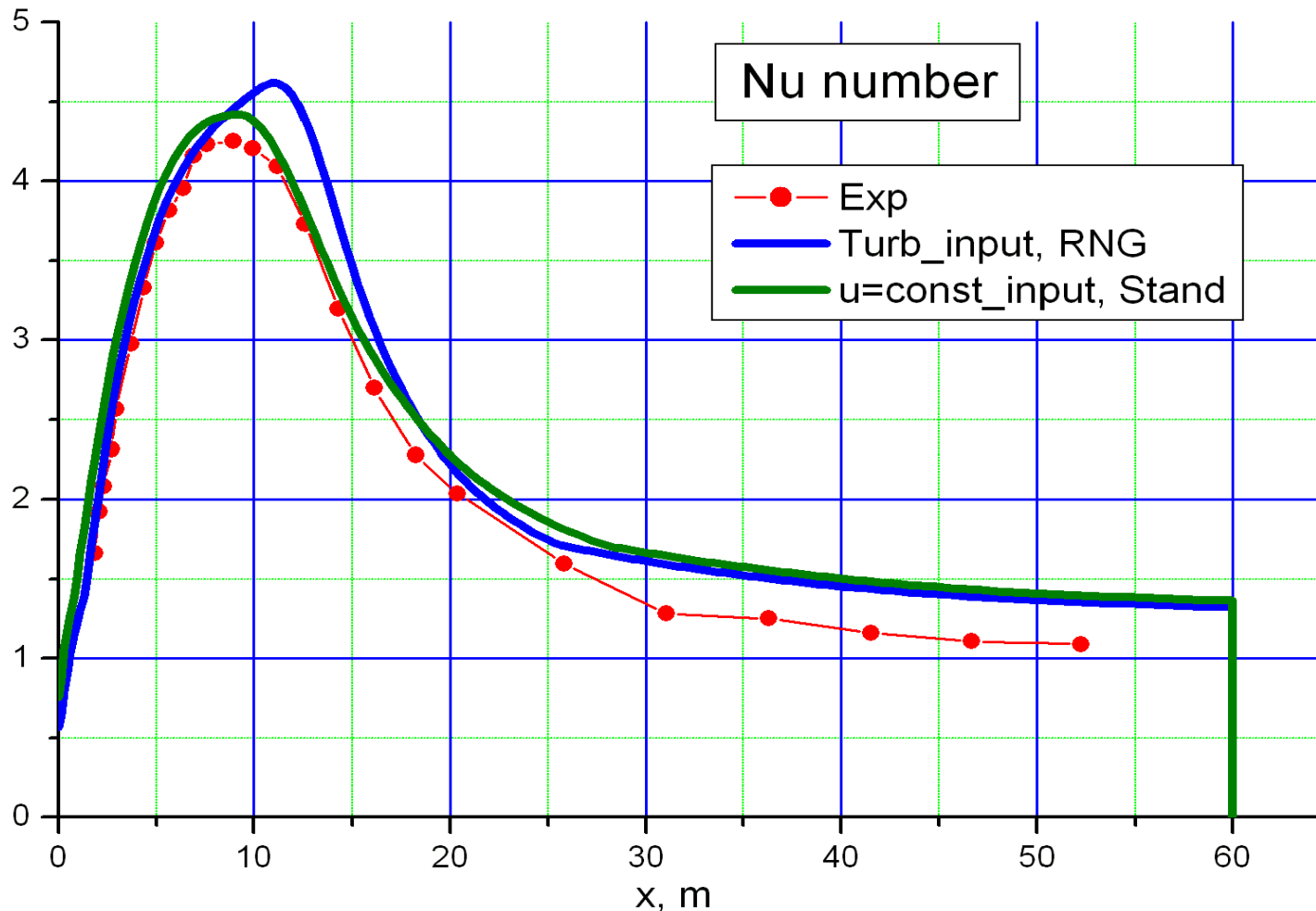
Jul 20, 2004
FLUENT 6.2 (axi, segregated, ske)

Nu/Nu_{DB} along the Downstream Pipe Wall
(Standard $k-\epsilon$ Model, Non-Equilibrium Wall Functions)

Heat Transfer in a Pipe Expansion __9

Обратить внимание – при расчёте без Profile, с установлением потока:
возможно следует применять pressure-velocity coupling, т.к. с SIMPLE может быть плохая сходимость итераций

Далее – влияние типа k-е модели – RNG – оказывается, не всегда лучший выбор ...



Струйные течения и плавучесть

Затопленная струя

- дозвуковая
- сверхзвуковая
- асимптотика

Неоднородный состав, температура – стратификация

Свободно-конвективные течения

плоско-параллельные горизонтальные пластины

- а) ламинарный режим: $Ra < 10^7 - 10^8$
- б) турбулентная $Ra > 10^8$

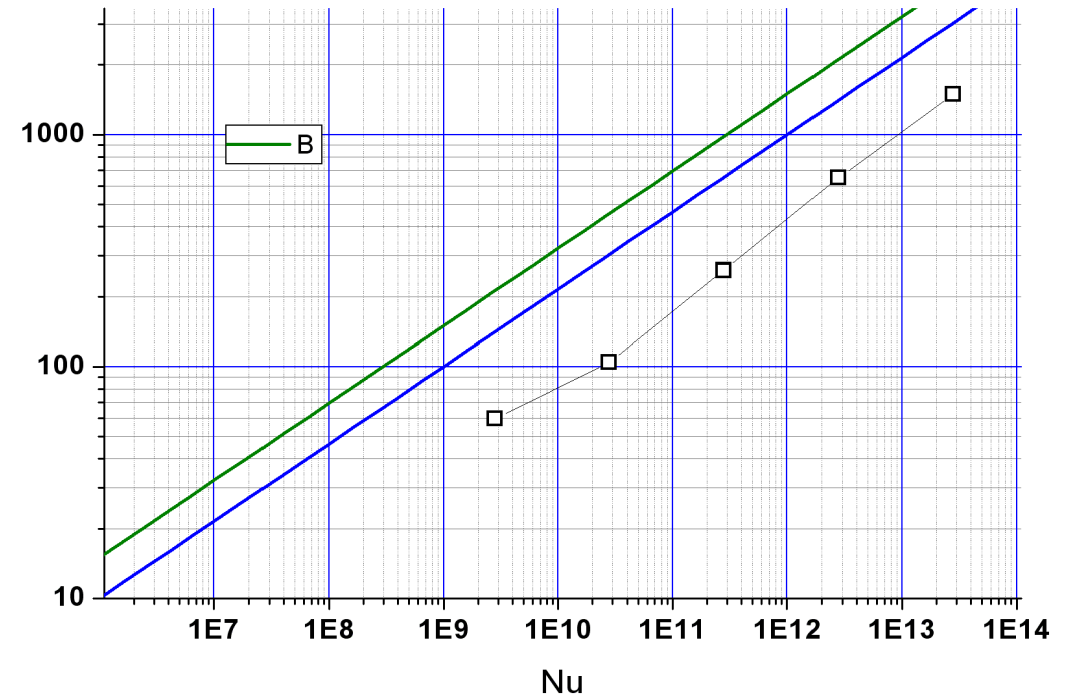
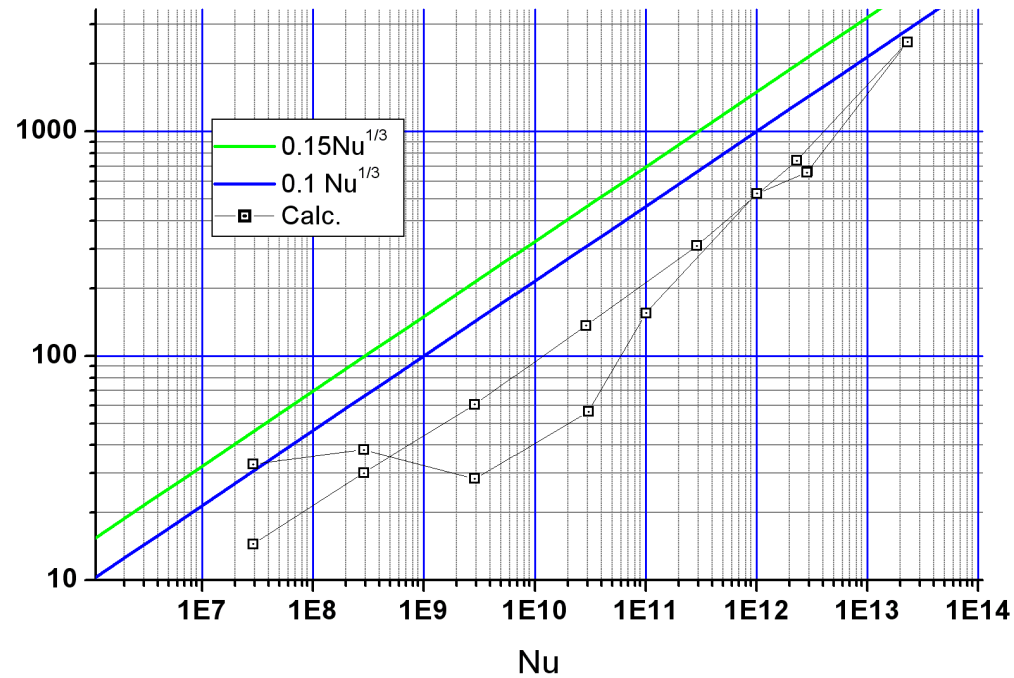
Цель расчётов

- проверить закон теплоотдачи
- оценить влияние а) выбора опций расчёта, б) коэффициентов

Существенно!

- а) пристеночные функции при $y^+ \sim 10$ (standard ...)
- б) зависимости коэффициентов от температуры
- в) в газах – перепад температуры – Буссинеск? или – incompressible ideal gas

Лабораторная работа: конвекция Рэля-Бенара _2



Конвекция Р.-Б. в воздухе и воде

- влияние пристеночных функций при $y^+ \sim 10$
(standard, nonequilibrium, enhanced)
- вязкости и теплоёмкости