

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ИХ РОЛЬ В ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПУНКТАХ ГЛУБИННОГО ЗАХОРОНЕНИЯ РАО

Ю. Н. Токарев, Е. В. Моисеенко, Н. И. Дробышевский, Р. А. Бутов

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва

Статья поступила в редакцию 11 октября 2018 г.

Численное моделирование сложных подземных сооружений, таких как пункты глубинного захоронения радиоактивных отходов, требует совместного учета теплогидромеханических и, возможно, прочих процессов. Таким образом, надежная оценка поля температур является одной из ключевых задач. При этом расчетные средства, используемые для моделирования, должны быть, среди прочего, верифицированы на задачах, имеющих точные аналитические решения и отвечающих характерным особенностям моделируемых объектов. Для задачи теплопроводности это пространственное и временное описание источников тепла. Получены точные аналитические решения нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности для среды с постоянными физическими свойствами и экспоненциально затухающим источником тепла, сосредоточенным на плоскости, прямой и в точке, что достаточно близко для целей верификации соответствует решаемым при анализе пунктов глубинного захоронения РАО задачам. Полученные решения могут быть использованы для верификации расчетных средств, в которых реализовано численное решение уравнений теплопроводности или сходные численные модели, например, диффузии, броуновского движения и т. д.

Ключевые слова: радиоактивные отходы, глубинное захоронение, верификация расчетных средств, нестационарное уравнение теплопроводности, точные аналитические решения.

Введение

К настоящему времени как в России, так и за рубежом накоплено значительное количество высокоактивных отходов (ВАО). Среди прочих особенностей, которые требуется учитывать при выработке подходов к их окончательной изоляции, в частности в пунктах глубинного захоронения радиоактивных отходов (ПГЗРО), можно указать их высокое тепловыделение. Значительные объемы радионуклидов и необходимость их надежной изоляции в течение длительного времени — десятков тысяч лет и более — определяют необходимость тщательных исследований для подтверждения безопасности пунктов глубинного захоронения [1–4]. Эволюция ПГЗРО происходит под влиянием множества взаимосвязанных процессов: тепловых, механических,

гидрологических, химических, биологических и прочих, следовательно, ее моделирование должно проводиться комплексно, с взаимным учетом явлений, что показывает и международный опыт [5]. При этом тепловые явления во многом определяют протекание прочих процессов, так как от температуры зависят переносные свойства среды, скорость и пути протекания химических реакций, механические напряжения материалов и т. д. В свою очередь, перенос тепла в ПГЗРО и вмещающих породах определяется, например, конвекцией содержащейся в порах воды и источниками или стоками тепла, связанными как с тепловыделением РАО, так и с химическими реакциями. Соответственно, в настоящее время при анализе эволюции сложных

подземных сооружений применяются расчетные средства, в которых реализованы с той или иной степенью сопряжения модели теплогидромеханических и химических процессов (thermo-hydro-mechanical-chemical — ТНМС) [6]. В некоторых случаях рассматривается также влияние биологических процессов, вследствие которых, например, могут изменяться переносные и механические свойства материалов [7]. Отметим, что полное сопряжение всех указанных процессов в рамках одного расчета пока не используется, так, в [6] приводятся примеры сопряжения максимум трех моделей одновременно (ТНМ, ТНС).

В разрабатываемом расчетном коде FENIA (Finite Element Nonlinear Incremental Analysis) [8, 9] также реализуется сопряжение трех моделей: тепловой, гидравлической и механической (ТНМ). При этом уравнения сохранения энергии (теплопроводность) и равновесия (механика) решаются последовательно на каждом временном шаге, соответственно, модель механики всегда использует актуальное расчетное поле температур. Обратное влияние — механических процессов на тепловое состояние — пренебрежимо мало и в коде не учитывается.

Гидравлическая модель может сопрягаться с тепловой двумя способами. В первом случае реализуемая в коде FENIA упрощенная модель гидравлики взаимодействует с тепловой аналогично механической — на каждом шаге в ней используется актуальное поле температур. Но при этом учитывается и обратная связь — на следующем шаге используются обновленные значения тепловых свойств среды (теплоемкость, теплопроводность), зависящих от обводненности пород. Во втором случае моделирование гидравлических процессов производится внешним расчетным средством — кодом GeRa [9]. При этом используются более сложные гидравлические модели, но обмен данными происходит через внешние интерфейсы расчетных кодов. В этом случае синхронизация на каждом временном шаге невозможна, соответственно, коды реже получают информацию друг от друга. Аналогичным образом могут использоваться и другие расчетные коды, например, моделирующие химические реакции.

Как видно из вышесказанного, результаты, получаемые при решении тепловой задачи, используются как входные данные для целого ряда других моделей. Следовательно, не умаляя роли прочих процессов, можно сказать, что надежная оценка поля температур является одной из ключевых задач при обосновании проекта ПГЗРО. При этом расчет теплового состояния ПГЗРО даже без сопряжения с другими моделями является нетривиальной задачей вследствие сложности геологической среды, дополненной особенностями инженерных барьеров безопасности, с одной стороны, и структуры горных выработок, в которых размещаются РАО, с другой.

Вследствие этого непосредственное использование аналитических решений уравнения теплопроводности для предсказания эволюции теплового состояния ПГЗРО практически невозможно, и требуется использовать программные средства (расчетные коды), в которых реализуются методы численного моделирования.

Использование аналитических решений для верификация расчетных кодов

Тем не менее важность точных аналитических решений не следует недооценивать, поскольку такие программные средства перед их использованием должны быть верифицированы. В данной статье под верификацией будет подразумеваться проверка реализации численных методов на задачах, имеющих точное аналитическое решение, в соответствии с концепцией, в которой разделяются понятия верификации (на аналитических задачах) и валидации (на экспериментальных данных и т. д.) [11]. Как писал академик А. А. Самарский в [12], «свойства того или иного алгоритма для расчета задач газодинамики, как правило, трудно оценить теоретически. Поэтому при анализе качества численных схем, помимо различных априорных суждений, большую роль играют апостериорные исследования. Сюда в первую очередь следует отнести опробование схем и алгоритмов на специальных «точных» решениях — тестах. Для этого проводится расчет некоторых упрощенных вариантов исходной задачи, которые, быть может, не дают полную физическую картину процесса, но допускают простое (например, аналитическое) решение. Сопоставление результатов расчетов с известными решениями позволяет судить о точности схемы, скорости сходимости и т. д. Поэтому построение точных тестовых решений, в частности автомодельных, представляет собой необходимый элемент в общей программе конструирования численных алгоритмов».

Естественно, подобный подход следует применять и к другим численным алгоритмам, в частности к алгоритмам решения уравнений теплопередачи. Более того, теоретические исследования сходимости численных схем справедливы только при стремлении размеров расчетной ячейки к нулю и не могут гарантировать точность получаемых результатов при конечных размерах ячейки. И только сравнения с точными решениями позволяют оценить при конечных размерах расчетных ячеек, которые всегда и используются при решении сложных практических задач, близость численного решения к решению исходных дифференциальных уравнений. Поэтому получение точных аналитических решений, особенно решений, которые в определенной степени отражают действительную физическую картину

практической задачи, является важнейшей частью разработки численных алгоритмов и основанных на них программных продуктов. Это отражено и в нормативных документах, так, в НП-100-17 [13] говорится: «Адекватность, достоверность и точность математических моделей, применяемых расчетных методик и расчетных схем должны быть обоснованы путем сравнения численных решений с аналитическими решениями, полученными при применении других моделей, адекватность, достоверность и точность которых оценена».

Рассмотрим особенности, которые должны быть учтены при формулировании аналитических задач, применимых для верификации расчетных средств, моделирующих тепловое состояние ПГЗРО. В первую очередь отметим, что задача будет нестационарной, так как тепловыделение РАО меняется со временем. Остеклованные отходы включают различные изотопы и, как следствие, могут иметь сложную временную зависимость тепловыделения. Однако в соответствии с законом радиоактивного распада можно для верификационных задач считать эту зависимость экспоненциальной. Если для стационарной задачи теплопроводности имеются точные аналитические решения (см., например, [14]) для разнообразных пространственных конфигураций источника тепла, то для нестационарного случая общее решение имеет сложный вид [15], и авторам неизвестны аналитические решения для экспоненциально затухающего источника. Наибольший прогресс в этом направлении был достигнут Ходжкинсоном (D.P.Hodgkinson), который получил полуаналитическое решение, описанное в [16]. Но это решение требует численного интегрирования, следовательно, может лишь с оговорками применяться при верификации, поскольку к нему, как и к полученному расчетным кодом результату, относятся приведенные выше рассуждения о точности схемы, скорости сходимости и т. д.

В настоящей работе предлагается ряд задач с экспоненциально затухающим источником тепла, применимых для верификации расчетных кодов, моделирующих динамику теплового состояния ПГЗРО, для которых авторами получены точные аналитические решения.

Единичный изолирующий контейнер (ИК) с тепловыделяющими ВАО, окруженный достаточно большим объемом вмещающей породы можно приближенно считать точечным источником тепла. Действительно, характерный размер ИК составляет несколько метров, в то время как в случае его уединенного захоронения, например, в рамках эксперимента в подземной исследовательской лаборатории (ПИЛ), его могут окружать десятки метров породы. Таким образом, можно приближенно говорить о задаче моделирования трехмерного поля температур точечного источника тепла с экспоненциальным

спадом тепловыделения. В этой и следующих задачах вмещающая порода будет предполагаться однородной. Это связано с тем, что случай среды, в которой неоднородности описываются линейной или кусочно-постоянной пространственной зависимостью, легко сводится заменой переменных к однородному случаю. Более же сложные пространственные зависимости приводят к значительному усложнению задачи получения аналитического решения.

В отличие от ПИЛ, в проектах ПГЗРО рассматриваются не одиночные контейнеры, а некоторые их совокупности. Например, в бельгийском и французском проектах [17] предполагается захоронение в протяженных горизонтальных галереях длиной несколько десятков метров. Также может рассматриваться вариант размещения в глубоких скважинах или комбинации скважин и горизонтальных галерей [9]. При этом диаметр контейнера с ВАО составляет лишь около метра, то есть, одиночная галерея или скважина может рассматриваться как источник тепла с равномерно распределенным вдоль прямой тепловыделением. Вследствие большой длины участка, занятого отходами, на большей его части можно пренебречь эффектами, возникающими вблизи торцов. Таким образом, следующую применимую для верификации задачу можно сформулировать как задачу моделирования двумерного поля температур для бесконечного протяженного вдоль прямой линии (линейного) источника тепла с экспоненциальным спадом тепловыделения.

В отдельных случаях можно рассмотреть в качестве источника тепла и ПГЗРО в целом. Так, в проекте KBS-3, реализуемом в Швеции и Финляндии, контейнеры с ВАО располагаются в отдельных углублениях, расположенных на одном горизонте. При описании теплового состояния вмещающих пород на существенном расстоянии выше или ниже ПГЗРО совокупность контейнеров с ВАО можно приближенно считать тепловыделяющей плоскостью. Таким образом, еще одну верификационную задачу можно определить как задачу моделирования одномерного поля температур для распределенного по плоскости источника тепла. Спад тепловыделения будет предполагаться также экспоненциальным.

Для этих трех задач авторами получены точные аналитические решения с использованием единого подхода на основе обобщенного решения уравнения теплопроводности.

Нестационарное температурное поле экспоненциально затухающего источника

Общий случай

Решение нестационарного уравнения теплопроводности для среды с постоянными физическими свойствами в n -мерном пространстве R^n , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ с начальным условием

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T = q(t, \mathbf{x}),$$

$$T|_{t=0} = T_0(\mathbf{x}) \quad (1)$$

в общем случае дается формулой [15]

$$T(\mathbf{x}, t) = \iint_{0R^n} \frac{q(s, \xi)}{[2a\sqrt{\pi(t-s)}]^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\xi|^2}{4a^2(t-s)}\right) d\xi ds +$$

$$+ \frac{1}{[2a\sqrt{\pi t}]^n} \int_{R^n} T_0(\xi) \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi. \quad (2)$$

В (1) $q(t, \mathbf{x}) = \frac{Q(t, \mathbf{x})}{\rho c}$, $Q(t, \mathbf{x})$ — мощность тепло-

выделения, ρ — плотность грунта, c — его теплоемкость, $a^2 = \lambda/(\rho c)$ — температуропроводность,

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа. В случае однород-

ного начального условия $T_0(\mathbf{x}) = T_0 = \text{const}$ уравнение (1) с помощью замены $T(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + T_0$ сводится к уравнению с нулевым начальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = q(t, \mathbf{x}),$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будет определяться только первым слагаемым в правой части (2)

$$u(\mathbf{x}, t) = \iint_{0R^n} \frac{q(s, \xi)}{[2a\sqrt{\pi(t-s)}]^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\xi|^2}{4a^2(t-s)}\right) d\xi ds. \quad (4)$$

Аналитические решения для источника, сосредоточенного на плоскости, прямой и в точке

Из выражения (4) получим решения для важных при изучении температурного поля вокруг тепловыделяющих РАО случаев $n = 1, 2, 3$, отвечающих тепловыделяющей плоскости, прямой и точечному источнику соответственно. Рассматриваемые конфигурации приведены на рисунках 1–3, где также схематически показаны формы распределений температуры.

Для источника тепла, сосредоточенного в плоскости, обозначим эту плоскость $z = 0$. Тогда тепло будет распространяться вдоль оси z , и задача будет одномерной ($n = 1$, $x_1 = z$, $\mathbf{x} = (z)$, рис. 1). Если источник сосредоточен на прямой, примем ее за ось z , тепло при этом распространяется в плоскости, ортогональной этой оси ($n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\mathbf{x} = (x, y)$, рис. 2). В случае точечного источника тепло распространяется по всем направлениям, и задача является трехмерной ($n = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, рис. 3). В этом случае

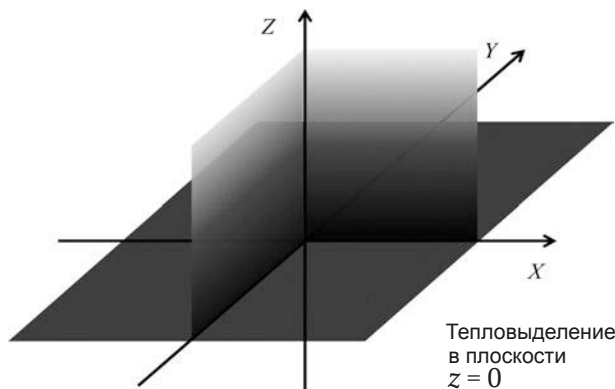


Рис. 1. Конфигурация задачи с тепловыделяющей плоскостью ($n = 1$)

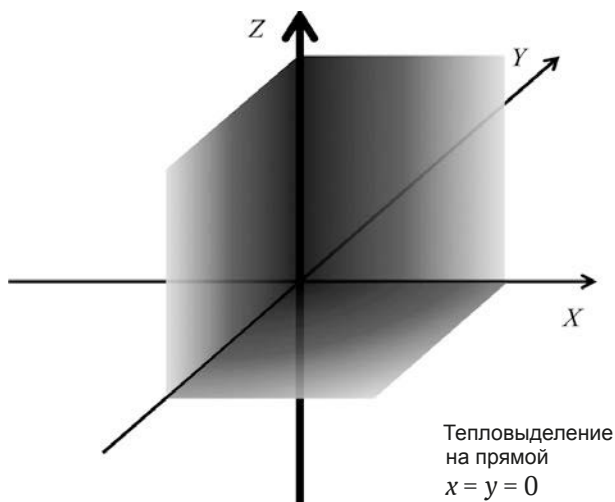


Рис. 2. Конфигурация задачи с тепловыделяющей прямой ($n = 2$)

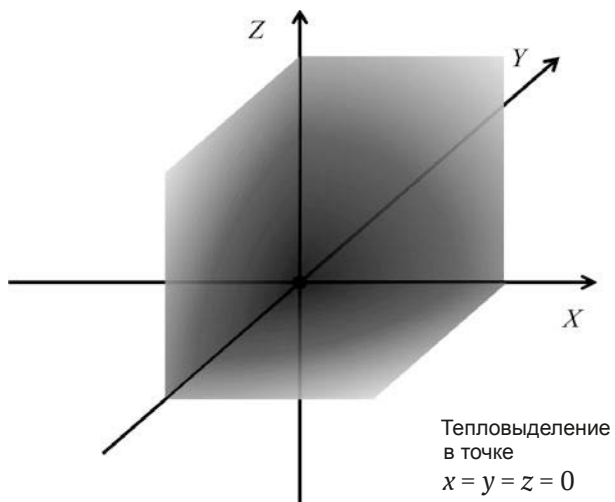


Рис. 3. Конфигурация задачи с точечным источником тепла ($n = 3$)

считаем источник сосредоточенным в начале координат, $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$.

Для затухающего источника тепла примем формулу

$$q(t, \mathbf{x}) = q_0 \exp(-pt) \delta(\mathbf{x}). \quad (5)$$

Отметим, что источниковый член уравнения (3) в виде (5) описывает все случаи $n = 1, 2, 3$, при этом для его размерности справедливо соотношение $[q] = \text{Вт}/\text{м}^{3-n}$.

Подставляя (5) в (4), получим

$$u(\mathbf{x}, t) = \int \int_{0_R^n} \frac{q_0 \exp(-ps) \delta(\xi)}{[2a\sqrt{\pi(t-s)}]^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\xi|^2}{4a^2(t-s)}\right) d\xi ds =$$

$$= q_0 \int_0^t \frac{\exp(-ps)}{[2a\sqrt{\pi(t-s)}]^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4a^2(t-s)}\right) ds. \quad (6)$$

Сделаем в (6) замену $t-s \rightarrow bs'$ и обозначим

$$b = \frac{|\mathbf{x}|^2}{4a^2}, \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (7)$$

Также введем безразмерные величины $h = pb$, $c = t/b$, в результате чего выражение (6) принимает вид:

$$u(\mathbf{x}, t) = q_0 \int_0^c \frac{\exp(-p(t-bs'))}{[2a\sqrt{\pi bs'}]^n} \exp\left(-\frac{1}{s'}\right) b ds' =$$

$$= \frac{q_0 \exp(-pt) b^{1-n/2}}{[2\sqrt{\pi a}]^n} \int_0^c \frac{1}{s^{n/2}} \exp\left(hs - \frac{1}{s}\right) ds. \quad (8)$$

Для дальнейших вычислений величину $\exp(hs)$ в (8) разложим в ряд Маклорена, тогда интеграл в (8) принимает вид:

$$\int_0^c \frac{1}{s^{n/2}} \exp\left(hs - \frac{1}{s}\right) ds = \int_0^c \frac{1}{s^{n/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(hs)^i}{i!} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} \int_0^c s^{i-n/2} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) ds. \quad (9)$$

С помощью замены $s \rightarrow \frac{c}{s'}$ выразим интеграл под знаком суммы в (9) через экспоненциальный

интеграл $E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xs)}{s^n} ds$, являющийся спе-

циальной функцией, для вычисления которой можно использовать имеющиеся математические библиотеки GSL или boost.

$$\int_0^c s^{i-n/2} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) ds = -\int_1^{\frac{c}{s}} \left(\frac{c}{s}\right)^{i-n/2} \exp\left(-\frac{s}{c}\right) d\left(\frac{c}{s}\right) =$$

$$= c^{i+1-n/2} \int_1^{\frac{c}{s}} \frac{\exp\left(-\frac{s}{c}\right)}{s^{i+2-n/2}} ds = c^{i+1-n/2} E_{i+2-n/2}\left(\frac{1}{c}\right). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и результат в (8), а также раскрывая выражения для констант h, c , получим окончательное решение:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{q_0 \exp(-pt) b^{1-n/2}}{[2\sqrt{\pi a}]^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} c^{i+1-n/2} E_{i+2-n/2}\left(\frac{1}{c}\right) =$$

$$= \frac{q_0 \exp(-pt) b^{1-n/2} c^{1-n/2}}{[2\sqrt{\pi a}]^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(pt)^i}{i!} E_{i+2-n/2}\left(\frac{1}{c}\right) =$$

$$= \frac{q_0 \exp(-pt) t^{1-n/2}}{[2\sqrt{\pi a}]^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(pt)^i}{i!} E_{i+2-n/2}\left(\frac{r^2}{4a^2 t}\right). \quad (11)$$

Получим отдельно окончательные решения для $n = 1, 2, 3$. Для источника, сосредоточенного на плоскости ($n = 1$):

$$u(z, t) = \frac{q_0 \exp(-pt) \sqrt{t}}{2\sqrt{\pi a}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(pt)^i}{i!} E_{i+3/2}\left(\frac{z^2}{4a^2 t}\right). \quad (12)$$

В случае источника, сосредоточенного на прямой линии:

$$u(x, y, t) = \frac{q \exp(-pt)}{4\pi a^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(pt)^i}{i!} E_{i+1}\left(\frac{x^2 + y^2}{4a^2 t}\right). \quad (13)$$

В случае точечного источника ($n = 3$):

$$u(x, y, z, t) = \frac{q_0 \exp(-pt)}{[2\sqrt{\pi a}]^3 \sqrt{t}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(pt)^i}{i!} E_{i+1/2}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4a^2 t}\right). \quad (14)$$

При этом в трехмерном случае возможно также получить решение, в котором температура выражается через так называемую функцию ошибок. Преобразуем формулу (6), положив в ней $n = 3$ и используя обозначения (7):

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \frac{q_0 \exp(-ps)}{[2a\sqrt{\pi(t-s)}]^3} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2(t-s)}\right) ds =$$

$$= \frac{2q_0}{(2a)^2 (\sqrt{\pi})^3 r} \int_0^t \exp\left(-ps - \frac{r^2}{4a^2(t-s)}\right) d\frac{r}{2a\sqrt{t-s}}. \quad (15)$$

Сделав в (15) замену $\frac{r}{2a\sqrt{t-s}} \rightarrow s' \Rightarrow s = t - \frac{r^2}{2a^2 s'^2}$, получим

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{2q_0}{(2a)^2 (\sqrt{\pi})^3 r} \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left[-p\left(t - \frac{r^2}{4a^2 s'^2}\right) - s'^2\right] ds =$$

$$= \frac{q_0 \exp(-pt)}{4a^2 \pi r} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left[\frac{pr^2}{4a^2 s'^2} - s'^2\right] ds =$$

$$= \frac{q_0 \exp(-pt)}{4a^2 \pi r} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{pr^2}{4a^2}\right)^n \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{s'^{2n}} \exp[-s'^2] ds. \quad (16)$$

Для интеграла в (16) можно получить рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{s^{2n}} \exp(-s^2) ds &= -\frac{1}{2n-1} \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-s^2) d\frac{1}{s^{2n-1}} = \\ &= -\frac{1}{2n-1} \left[\exp(-s^2) \frac{1}{s^{2n-1}} \Big|_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} + \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \frac{2}{s^{2n-2}} \exp(-s^2) ds \right] = \\ &= \frac{1}{2n-1} \left[\left(\frac{r^2}{4a^2t} \right)^{-n+1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) - 2 \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{s^{2n-2}} \exp(-s^2) ds \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначая в (17) $I_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{s^{2n}} \exp(-s^2) ds$,

получим:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r^2}{4a^2t} \right)^{-n-1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) - 2I_n \right],$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Здесь I_0 — функция, известная как интеграл ошибок:

$$I_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r/2a\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-s^2) ds = \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right). \quad (19)$$

Это позволяет записать ряд (16) в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{q_0 \exp(-pt)}{4a^2\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} \left(\frac{pr^2}{4a^2} \right)^n. \quad (20)$$

Полученное решение допускает реализацию с помощью стандартных библиотек языка C++. Таким образом, при его программной реализации не требуется создания дополнительных процедур численного интегрирования.

Отметим, что при медленном спаде тепловыделения, когда $p \rightarrow 0$ в выражении для временной зависимости мощности источника тепла (5), при рассмотрении достаточно коротких промежутков времени мощность источника можно приближенно считать постоянной. В этом случае можно ограничиться первым членом ряда:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{q_0}{4\pi a^2 r} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right). \quad (21)$$

При использовании полученных решений для экспоненциально затухающего источника тепла при верификации расчетных средств следует учитывать, что эти решения имеют особую точку при $r = 0$. Следовательно, при значениях r , близких к нулю, при численном моделировании может потребоваться мелкая пространственная и временная дискретизация.

Заключение

Разумеется, полученные решения не учитывают такие аспекты реальных пунктов захоронения РАО, как конечный размер матриц с отходами, сложную структуру инженерных барьеров безопасности, неоднородность и анизотропию вмещающей породы и т. д., то есть, описывают своего рода идеализированные случаи. Тем не менее они отражают принципы расположения РАО в пунктах глубинного захоронения, следовательно, могут использоваться для проверки принципиальной возможности моделирования базовых конфигураций ПГЗРО программными средствами.

Полученные решения были реализованы в виде программного средства [18] и использованы при верификации тепловых моделей расчетного кода FENIA. Результаты верификации показаны в [19], поэтому здесь приводиться не будут. Отметим лишь, что сравнение полученных кодом FENIA результатов с аналитическими решениями показало хорошее их соответствие. Расчет проводился при реалистичных для условий ПГЗРО значениях начального тепловыделения, скорости его спада и теплопроводности вмещающей породы.

Данные аналитические решения могут применяться и для верификации прочих расчетных средств, в которых реализовано численное решение уравнений типа теплопроводности. Это, в частности, могут быть модели диффузии, броуновского движения или их аналоги в других областях, например в экономике [20].

Литература

1. Дорофеев А. Н., Большов Л. А., Линге И. И., Уткин С. С., Савельева Е. А. Стратегический мастер-план исследований в обоснование безопасности сооружения, эксплуатации и закрытия пункта глубинного захоронения радиоактивных отходов // Радиоактивные отходы. — 2017. — № 1. — С. 33–42.
2. Цебаковская Н. С., Уткин С. С., Линге И. И., Пронь И. А. Зарубежные проекты захоронения ОЯТ и РАО. Часть I. Актуальное состояние проектов создания пунктов глубинного геологического захоронения в европейских странах: Препринт ИБРАЭ, № IBRAE-2017-03. — М.: ИБРАЭ РАН, 2017. — 35 с.
3. Цебаковская Н. С., Уткин С. С., Коновалов В. Ю. Зарубежные проекты захоронения ОЯТ и РАО. Часть II. Актуальное состояние проектов создания пунктов глубинного геологического захоронения в США, Канаде и странах Азиатского региона: Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2017-04. — М.: ИБРАЭ РАН, 2017. — 41 с.
4. Линге И. И., Уткин С. С., Хамаза А. А., Шарфутдинов Р. Б. Опыт применения международных требований по обоснованию долгосрочной безопасности пунктов захоронения

- радиоактивных отходов: проблемы и уроки // Атомная энергия. — 2016. — Вып. 120. — № 4 — С. 208—213.
5. Features, Events and Processes (FEPs) for the Geologic Disposal of Radioactive Waste. An International Database. — OECD/NEA — 2000.
6. Thermo-hydro-mechanical-chemical Processes in Fractured Porous Media: Modelling and Benchmarking. From Benchmarking to Tutoring / Ed: Olaf Kolditz et al. — Springer International Publishing AG, 2018 — 310 p.
7. *Pusch R.* Geological Storage of Highly Radioactive Waste. Current Concepts and Plans for Radioactive Waste Disposal. — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. — 379 p.
8. *Дробышевский Н. И., Моисеенко Е. В., Бутов Р. А., Токарев Ю. Н.* Трехмерное численное моделирование теплового состояния пункта глубинного захоронения радиоактивных отходов в Нижнеканском массиве горных пород // Радиоактивные отходы. — 2017. — № 1. — С. 65 – 74.
9. *Butov R. A., Drobyshevsky N. I., Moiseenko E. V., Tokarev Yu. N.* 3D numerical modelling of the thermal state of deep geological nuclear waste repositories // Journal of Physics: Conference Series 899 (2017), 052002.
10. *Konshin I., Kapyrin I.* Scalable Computations of GeRa Code on the Base of Software Platform INMOST. Lecture notes in computer science. Vol 10421. V. Malyshev (Ed.): PaCT 2017, pp. 433–445, 2017.
11. *Roache P. J.* Verification and Validation in Computational Science and Engineering. — Albuquerque, NM, Hermosa Publishers, 1998. — 464 p.
12. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: «Наука», 1992. — 424 с.
13. НП-100-17. Федеральные нормы и правила в области использования атомной энергии. Требования к составу и содержанию отчета по обоснованию безопасности пунктов захоронения радиоактивных отходов. Утверждены приказом Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 23 июня 2017 г. № 218
14. Thermo-hydro-mechanical-chemical Processes in Fractured Porous Media: Modelling and Benchmarking. Benchmarking Initiatives / Ed: Olaf Kolditz et al. — Springer International Publishing AG, 2015 — 275 p.
15. *Владимиров В. С. Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.
16. *Gibb F. G. F., Travis K. P., McTaggart N. A., Burley D.* A model for heat flow in deep borehole disposals of high-level nuclear waste // J. Geophys. Res., 113, 2008, B05201.
17. *Цебаковская Н. С.* и др. Обзор зарубежных практик захоронения ОЯТ и РАО. — М.: «Комтех-принт», 2015. — 208 с.
18. Вычисление нестационарных температурных полей с затухающим источником тепла. v 1.0. Свидетельство о регистрации № 2018615229, зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 3 мая 2018 года
19. *Butov R. A., Drobyshevsky N. I., Moiseenko E. V., Tokarev Yu. N.* Finite element code FENIA verification and application for 3D modelling of thermal state of deep geological storage of radioactive waste // Journal of Physics: Conference Series 891 (2017), 012174.
20. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 81 (3), 1973, 637–654.

Информация об авторах

Токарев Юрий Николаевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: ytokarev@ya.ru.

Моисеенко Евгений Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: moi@ibrae.ac.ru.

Дробышевский Николай Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: drobyshevsky@inbox.ru.

Бутов Роман Александрович, инженер, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: bra@ibrae.ac.ru.

Библиографическое описание статьи

Токарев Ю. Н., Моисеенко Е. В., Дробышевский Н. И., Бутов Р. А. Точные аналитические решения нестационарных задач теплопроводности и их роль в верификации моделей тепло-гидро-механических процессов в пунктах глубинного захоронения РАО // Радиоактивные отходы. — 2018. — № 4 (5). — С. 90—98.

EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS FOR NON-STEADY HEAT TRANSFER PROBLEMS AND THEIR ROLE IN VERIFICATION OF MODELS FOR THERMO-HYDRO-MECHANICAL PROCESSES IN DEEP GEOLOGICAL RADIOACTIVE WASTE REPOSITORIES

Tokarev Y. N., Moiseenko E. V., Drobyshevskiy N. I., Butov R. A.

Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Article received 11 October 2018

Numerical simulation of complex underground facilities, such as deep geological radioactive waste repositories, requires coupled assessment of thermo-hydro-mechanical and, possibly, other processes. Therefore, a robust estimate of the temperature field is one of the crucial tasks. Computer codes used for modelling require verification on the problems that have exact analytical solution. Furthermore, these problems should reflect characteristic features of modelled objects. For heat transfer problems, these features are primarily spatial and temporal distribution of heat sources. In this paper, the exact analytical solutions for non-steady 3D heat transfer equation are obtained for the medium with constant thermal properties and exponentially decreasing point, linear and planar heat sources. These configurations are sufficiently well related for verification purposes to actual problems solved in safety analysis of deep geological radioactive waste repositories. Presented solutions can be used for verification of computer codes that implement the numerical solution of heat transfer equation or similar numerical models, such as diffusion, Brownian movement, etc.

Keywords: radioactive waste, deep geological repository, computer code verification, non-steady heat transfer equation, exact analytical solutions.

References

1. Bolshov L. A., Linge I. I., Utkin S. S., Savelyeva E. A., Dorofeev A. N. Strategic Master Plan for R&D Demonstrating the Safety of Construction, Operation and Closure of a Deep Geological Disposal Facility for Radioactive Waste. *Radioactive waste*, 2017, no. 1, pp. 33–42. (In Russian).
2. Cebakovskaya N. S., Utkin S. S., Linge I. I., Pron' I. A. Zarubezhnye proekty zahoroneniya OYAT i RAO. CHast' I Aktual'noe sostoyanie proektov sozdaniya punktov glubinnogo geologicheskogo zahoroneniya v evropejskih stranah: *Preprint IBRAE*, no. IBRAE-2017-03. Moscow, IBRAEH RAN Publ., 2017. 35 p.
3. Cebakovskaya N. S., Utkin S. S., Konovalov V. Yu. Zarubezhnye proekty zahoroneniya OYAT i RAO. CHast' II. Aktual'noe sostoyanie proektov sozdaniya punktov glubinnogo geologicheskogo zahoroneniya v SSHA, Kanade i stranah Aziatskogo regiona: *Preprint IBRAE* no. IBRAE-2017-04. Moscow, IBRAE RAN Publ., 2017. 41 p.
4. Linge I. I., Utkin S. S., Khamaza A. A., Sharafutdinov R. B. Experience in Applying the International Requirements for the Validation of Long-Time Safety of Radwaste Disposal Sites: Problems and Lessons. *Atomic Energy*, 2016, vol. 120, no 4, pp. 259–264.
5. *Features, Events and Processes (FEPS) for the Geologic Disposal of Radioactive Waste*. An International Database. OECD/NEA, 2000.
6. *Thermo-hydro-mechanical-chemical Processes in Fractured Porous Media: Modelling and Benchmarking*. From Benchmarking to Tutoring. Ed: Olaf Kolditz et al. Springer International Publishing AG, 2018. 310 p.
7. Pusch R. *Geological Storage of Highly Radioactive Waste*. Current Concepts and Plans for Radioactive Waste Disposal. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. 379 p.
8. Drobyshevskij N. I., Moiseenko E. V., Butov R. A., Tokarev YU. N. Three-dimensional numerical modelling of the thermal state of the deep radioactive waste disposal facility in the Nizhnekansk granitoid massif. *Radioactive waste*, 2017, no. 1, pp. 65–74. (In Russian).
9. Butov R. A., Drobyshevskiy N. I., Moiseenko E. V., Tokarev Yu. N. 3D numerical modelling of the thermal state of deep geological nuclear waste repositories. *Journal of Physics: Conference Series*, 899 (2017), 052002.
10. Konshin I., Kapyrin I. Scalable Computations of GeRa Code on the Base of Software Platform INMOST. *Lecture notes in computer science*. Vol 10421. V. Malyshkin (Ed.): PaCT 2017, pp. 433–445, 2017.
11. Roache P. J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Albuquerque, NM, Hermosa Publishers, 1998. 464 p.
12. Samarskij A. A., Popov Yu. P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoj dinamiki*. Moscow, "Nauka" Publ., 1992, 424 p.
13. NP-100-17. Federal'nye normy i pravila v oblasti ispol'zovaniya atomnoj ehnergii. *Trebovaniya k sostavu i soderzhaniyu otcheta po obosnovaniyu*

bezopasnosti punktov zahoroneniya radioaktivnyh othodov. Utverzhdeny prikazom Federal'noj sluzhby po ehkologicheskomu, tekhnologicheskomu i atomnomu nadzoru ot 23 iyunya 2017 g. no. 218.

14. *Thermo-hydro-mechanical-chemical Processes in Fractured Porous Media: Modelling and Benchmarking*. Benchmarking Initiatives. Ed: Olaf Kolditz et al. Springer International Publishing AG, 2015. 275 p.

15. Vladimirov V. S. Zharinov V. V. *Urvneniya matematicheskoy fiziki*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 400 p.

16. Gibb F. G. F., Travis K. P., McTaggart N. A., and Burley D. A model for heat flow in deep borehole disposals of high-level nuclear waste. *J. Geophys. Res.*, 113, 2008, B05201.

17. Cebakovskaya N. S. i dr. *Obzor zarubezhnyh praktik zahoroneniya OYAT i RAO*. M.: Izdatel'stvo «Kometekhprint», 2015. – 208 p.

18. *Vychislenie nestacionarnykh temperaturnykh polej s zatuhayushchim istochnikom tepla*. v 1.0. Svidetel'stvo o registracii № 2018615229, zaregistrirvano v Reestre programm dlya EHVM 03 maya 2018 goda.

19. Butov R. A., Drobyshevsky N. I., Moiseenko E. V., Tokarev Yu. N. Finite element code FENIA verification and application for 3D modelling of thermal state of deep geological storage of radioactive waste. *Journal of Physics: Conference Series*, 891 (2017), 012174.

20. Black, F., M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (3), 1973, pp. 637–654.

Information about the authors

Tokarev Yuriy Nikolaevich, PhD, Senior Researcher, Nuclear Safety Institute (52, Bolshaya Tuskaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: ytokarev@ya.ru.

Moiseenko Evgeniy Viktorovich, PhD, Senior Researcher, Nuclear Safety Institute (52, Bolshaya Tuskaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: moi@ibrae.ac.ru.

Drobyshevskiy Nikolay Ivanovich, PhD, Senior Researcher, Nuclear Safety Institute (52, Bolshaya Tuskaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: drobyshevsky@inbox.ru.

Butov Roman Aleksandrovich, Engineer, Nuclear Safety Institute (52, Bolshaya Tuskaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: bra@ibrae.ac.ru.

Bibliographic description

Tokarev Y. N., Moiseenko E. V., Drobyshevsky N. I., Butov R. A. Exact analytical solutions for non-steady heat transfer problems and their role in verification of models for thermo-hydro-mechanical processes in deep geological radioactive waste repositories. *Radioactive Waste*, 2018, no. 4 (5), pp. 90–98. (In Russian).